ПМТФ, №3, 1962

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОДОЕМЕ ПОСТОЯННОЙ ГЛУБИНЫ НА БОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ ОТ МЕСТА ВЗРЫВА

Б. А. Луговцов

(*Новосибирск*)

Опыт и теоретические исследования показывают, что распространение ударных волн носит существенно нелинейный характер, проявляющийся как в скорости затухания амплитуды ударной волны (более быстрое по сравнению с акустикой) [1, 2, 3], так и во взаимодействии ударной волны с поверхностями раздела (нерегулярное отражение) [4,5]. Правильное описание названных явлений невозможно без учета зависимости скорости распространения возмущений от их амплитуды. Эта зависимость связана с нелинейностью уравнений движения сжимаемой жидкости. Отбрасывание нелинейных членов при переходе к уравнениям акустики приводит к тому, что все возмущения распространяются с одинаковой скоростью. Тем не менее, принимая во внимание тот факт, что существенное изменение величин, характеризующих возмущенное движение происходит в малой области, примыкающей к фронту ударной волны, можно упростить уравнения движения так, что нелинейность и, следовательно, зависимость скорости распространения возмущений от их амплитуды будет сохранена. Требуемое упрощение уравнений газовой динамики проведено в работах [3, 5, 6]. Течения, описываемые выведенной системой уравнений названы «короткими волнами». При помощи этих уравнений были исследованы асимптотика одномерных ударных волн [3] и отражение ударной волны от свободной поверхности [6] и жесткой стенки [5].

При взрыве заряда, радиус которого сравним с глубиной водоема, течение, возникающее при прохождении ударной волны на расстояниях больших по сравнению с глубиной, принадлежит к типу коротких волн. Таким образом, для изучения этого явления можно использовать указанную систему уравнений.

1. Для удобства изложения приведем вывод уравнений коротких волн, основанный на разложении искомых функций в ряды по малому параметру $\tau_0 = h/R_0$, где h — глубина водоема, а R_0 — расстояние от места взрыва, начиная с которого возмущения, вызываемые прохождением ударной волны, становятся достаточно малыми.

Уравнения сжимаемой жидкости в цилиндрических координатах при симметрии относительно оси z в общепринятых обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + v\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial r} + v\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a^2\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{ku}{r}\right) = 0$$

где a — скорость звука в воде.

Система координат выбрана так, что ось z перпендикулярна дну водоема, причем $z = 0$ соответствует дну водоема, а $z = h_0$ — поверхности воды. В соответствии с этим в случае взрыва сосредоточенного заряда $k = 1$, а при взрыве линейного заряда следует положить $k = 0$, что равносильно переходу к декартовой системе координат.

Используя то обстоятельство, что изменение энтропии в ударном разрыве является величиной третьего порядка малости относительно разности давлений, можно представить зависимость плотности воды от давления в виде [4]

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{p - p_0}{nB} - \frac{n-1}{2}\left(\frac{p - p_0}{nB}\right)^2 \qquad (1.1)$$

где ρ_0 — начальная плотность воды, ρ — плотность, $p - p_0$ — избыточное давление, $B = 3000$ *кг/см*^{2} и $n = 7$.

Пусть $r = r_1(z, t)$ является уравнением фронта ударной волны. Тогда на линии разрыва, учитывая, что перед фронтом ударной волны жидкость покоится, должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = N\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right)^2}, \qquad u = \frac{q}{\sqrt{1 + (\partial r / \partial z)^2}}, \qquad v = -\frac{\partial r_1}{\partial z} u \tag{1.2}$$

$$N = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0}} \approx a_0\left(1 + \frac{n+1}{4}\frac{p - p_0}{nB}\right) \tag{1.3}$$

$$q = \sqrt{\frac{(\rho - \rho_0)(p - p_0)}{\rho\rho_0}} \approx a_0 \frac{p - p_0}{nB} \qquad \left(a_0 = \left(\frac{nB}{\rho_0}\right)^{1/2}\right) \tag{1.4}$$

где в (1.3) и (1.4) использовано равенство (1.1).

Обозначим расстояние от оси z до точки пересечения фронта ударной волны со свободной поверхностью через

$$R(t) = \int_0^t N_* \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right)^2_*} dt \tag{1.5}$$

где N_* и $(\partial r_1 / \partial z)_*$ — значения этих величин в указанной точке.

Введем далее безразмерные величины согласно следующим равенствам:

$$P = \frac{n+1}{2}\frac{p - p_0}{nB}, \qquad M = \frac{n+1}{2}\frac{u}{a_0}, \qquad V = \frac{n+1}{2}\frac{v}{a_0} \tag{1.6}$$

$$\tau = \tau_0 \frac{R}{h_0}, \qquad X = \frac{r}{h_0} - \frac{\tau}{\tau_0}, \qquad Y = \frac{z}{h_0} \tag{1.7}$$

Первое равенство (1.2) на фронте ударной волны после подстановки безразмерных величин и отбрасывания заведомо малых членов примет вид

$$\tau_0 \frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{1}{2}(P - P_*) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)^2_*$$

Так как $\tau \sim Y \sim 1$, то из этого равенства следует

$$X \sim \tau_0, \qquad P \sim \tau_0^2 \tag{1.8}$$

Из равенств (1.2) находим, что

$$M \sim \tau_0^2, \qquad V \sim \tau_0^3 \tag{1.9}$$

Соотношения (1.8) и (1.9) определяют порядки малости величин на фронте ударной волны. Считая, что величины P, M, V имеют те же порядки малости и в некоторой области течения, примыкающей к фронту ударной волны, представим искомые функции в виде рядов по малому параметру τ_0 следующего вида:

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} P_j \tau_0^{2j}, \qquad M = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \tau_0^{2j}, \qquad V = \sum_{j=1}^{\infty} V_j \tau_0^{2j+1}$$

Уравнение фронта ударной волны представим в виде

$$\frac{r_1(z, t)}{h_0} = \frac{\tau}{\tau_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\tau, Y)\, \tau_0^{2j-1}$$

Вместо переменной X согласно (1.8) введем переменную

$$\delta = \frac{1}{\tau_0} X$$

Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим для первого приближения следующую систему:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \delta} - \frac{\partial M_1}{\partial \delta} = 0, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial Y} - \frac{\partial V_1}{\partial \delta} = 0 \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \tau} + \left[M_1 - \tfrac{1}{2} M_{1*} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial Y}\right)^2_*\right]\frac{\partial M_1}{\partial \delta} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial Y} + \frac{k}{2}\frac{M_1}{\tau} = 0 \quad (1.11)$$

Условия на фронте ударной волны для первого приближения имеют вид

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} = \tfrac{1}{2}(P_1 - P_{1*}) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial Y}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial Y}\right)^2_* \qquad (1.12)$$

$$P_1 = M_1, \qquad V_1 = -\frac{\partial \delta}{\partial Y} M_1 \qquad (1.13)$$

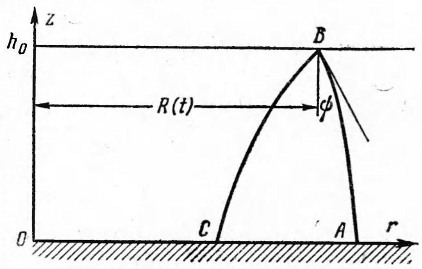
Полученная система уравнений и является системой уравнений коротких волн. Из (1.10) и (1.13) следует, что $P_1 = M_1$ и, следовательно, условие (1.13) на фронте ударной волны выполняется автоматически.

2. Из (1.8) следует, что асимптотически давление на фронте ударной волны изменяется по закону

$$p \sim \frac{1}{R^2}$$

а длина l ударной волны (расстояние по дну водоема от фронта ударной волны до точки, в которой $p = p_0$) по закону

$$l \sim \frac{1}{R}$$



Фиг. 1

Этот результат не зависит от формы заряда, т. е. при взрыве сосредоточенного заряда асимптотический закон затухания давления на фронте ударной волны будет таким же, как в случае линейного. Различие проявляется только в соответствующих коэффициентах. Этот результат объясняется тем, что свободная поверхность представляет собой основной фактор, определяющий закон затухания, в силу которого скорость затухания резко увеличивается по сравнению с безграничной средой.

Закон затухания давления на фронте ударной волны можно найти также следующим образом. На большом расстоянии от места взрыва область, занимаемая ударной волной, имеет вид, изображенный на фиг. 1. Здесь AB — фронт ударной волны, BC — линия, на которой $p = p_0$. Так как изменением энтропии можно пренебречь, то на BC $\rho = \rho_0$. Пусть далее $r = r_1(z, t)$ — уравнение фронта ударной волны, а $r = r_0(z, t)$ — уравнение линии $p = p_0$, u_0 и v_0 — составляющие скорости на линии $r = r_0(z, t)$. Тогда закон сохранения массы и горизонтальной составляющей импульса соответственно для области ABC (на единицу длины при взрыве линейного заряда и в секторе с углом раствора $\Delta\omega$ при взрыве сосредоточенного заряда) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1} \rho r^k\, dr\, dz = \rho_0 \int_0^{h_0}\left[r_1^k \frac{\partial r_1}{\partial t} - r_0^k\left(\frac{\partial r_0}{\partial t} - u_0 + v_0\frac{\partial r_0}{\partial z}\right)\right] dz$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1} \rho u r^k\, dr\, dz = -\rho_0 \int_0^{h_0} u_0 r_0^k\left(\frac{\partial r_0}{\partial t} - u_0 + v_0\frac{\partial r_0}{\partial z}\right) dz +$$

$$+\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1} \Delta p\, dr\, dz \qquad (\Delta p = p - p_0) \qquad (2.1)$$

Здесь значения соответствующих величин при $r = r_1(z, t)$ берутся равными их значениям справа от разрыва (фиг. 1) в невозмущенной области, а $v(r, 0, t) = 0$. Прибавим и вычтем в подынтегральном выражении левой части первого из этих равенств величину $\rho_0 r^k$. В результате получим

$$\frac{d}{dt}\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right) r^k\, dr\, dz = \int_0^{h_0} r_0^k\left(u_0 - v_0\frac{\partial r_0}{\partial z}\right) dz \tag{2.2}$$

В области ABC с достаточной степенью точности можно положить

$$\frac{\rho}{\rho_0}-1=\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}, \qquad \frac{\rho}{\rho_0}u=\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0}, \qquad r = R(t) \tag{2.3}$$

На линии $r = r_0(z, t)$ с той же точностью

$$r_0 = R(t), \qquad \frac{\partial r_0}{\partial t} = a_0 \tag{2.4}$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt} = a_0\frac{d}{dR} \tag{2.5}$$

Используя (2.3), (2.4) и (2.5), перепишем (2.1) и (2.2) в виде

$$\frac{d}{dR}R^k\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\, dr\, dz = -R^k\int_0^{h_0}\frac{u_0}{a_0}\, dz + k\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\, dr\, dz \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dR}R^k\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\, dr\, dz = R^k\int_0^{h_0}\frac{u_0}{a_0}\, dz - R^k\int_0^{h_0}\frac{v_0}{a_0}\frac{\partial r_0}{\partial z}\, dz \tag{2.7}$$

При переходе от (2.1) к (2.6) были отброшены малые по сравнению с a_0 члены u_0 и $v_0 \partial r_0 / \partial r_0$. Складывая (2.6) и (2.7), получим

$$\frac{d}{dR}R^k\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\, dr\, dz = \frac{1}{2}k\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\, dr\, dz - \frac{1}{2}R^k\int_0^{h_0}\frac{v_0}{a_0}\frac{\partial r_0}{\partial z}\, dz \tag{2.8}$$

На достаточно большом расстоянии от места взрыва все интегралы, входящие в уравнение (2.8) в первом приближении, определяются заданием величины давления в некоторой точке на фронте ударной волны, за которую удобно принять точку пересечения фронта ударной волны с дном водоема. Действительно, на основании соотношений (1.8), имеем

$$\left|\frac{\partial r_1}{\partial z}\right| \sim \left|\frac{\partial r_0}{\partial z}\right| \sim \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^{1/2}$$

и в соответствии с этим площадь области ABC

$$S_{ABC} \sim h_0^2\left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^{1/2}$$

На основании (1.9)

$$v \sim a_0\left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^{3/2}$$

Согласно этим соотношениям интегралы, входящие в уравнение (2.8), можно заменить выражениями

$$\int_0^{h_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\, dr\, dz = C_1 h_0^2\left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^{3/2}, \quad \frac{1}{2}\int_0^{h_0}\frac{v_0}{a_0}\frac{\partial r_0}{\partial z}\, dz = C_2 h_0\left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^2 \tag{2.9}$$

Здесь C_1 и C_2 в первом приближении можно считать постоянными, величина которых зависит от формы течения и конфигурации области ABC. Последние в свою очередь вырабатываются под влиянием свободной поверхности и дна водоема и на больших расстояниях не зависят (или зависят очень слабо) от начальных условий.

Подставляя (2.9) в (2.8), получим

$$h_0 \frac{d}{dR} R^k \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^{3/2} = \frac{1}{2} k h_0 \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^{3/2} - \frac{C_2}{C_1} R^k \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right)^2$$

Интегрируя это уравнение, получим в случае $k = 0$ (линейный заряд)

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}\right) = \left(\frac{2C_1}{C_2}\right)^2 \left(\frac{h_0}{R}\right)^2 \frac{1}{(1 + C_3 R^{-1})^2} \tag{2.10}$$

и в случае $k = 1$ (сосредоточенный заряд)

$$\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2} = \left(\frac{5}{2} \frac{C_1}{C_2}\right)^2 \left(\frac{h_0}{R}\right)^2 \frac{1}{(1 + C_3 R^{-5/6})^2} \tag{2.11}$$

Постоянная C_3, входящая в эти равенства, определяется начальными условиями: энергией заряда, глубиной заложения заряда и т. д. Из (2.10) и (2.11) следует, что асимптотически давление на фронте ударной волны падает по закону

$$\frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2} = \mathrm{const} \left(\frac{h_0}{R}\right)^2 \tag{2.12}$$

где постоянная в соответствии с вышесказанным не зависит (или зависит очень слабо) от энергии взрыва и различна при взрыве линейного и сосредоточенного заряда.

Отметим, что точно таким же способом можно получить асимптотический закон затухания давления и в случае распространения одномерной ударной волны в безграничной среде. При этом необходимо к уравнению (2.8) добавить уравнение

$$\frac{dl}{dt} = N - a_0 \approx \frac{n+1}{4} \frac{\Delta p}{\rho_0 a_0^2}$$

где l — длина ударной волны. В результате получаются общеизвестные законы [1].

3. Перейдем к построению течения за фронтом ударной волны. Введем в уравнения (1.10), (1.11) новые переменные согласно равенствам

$$M_1 = \frac{1}{\tau^2} \mu, \qquad V_1 = \frac{1}{\tau^3} \nu, \qquad \delta = \frac{1}{\tau} x, \qquad Y = y$$

В результате преобразований система примет следующий вид:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

$$\tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \left(\mu + x - \frac{1}{2} \mu_* - \frac{1}{2} \psi_*^2\right) \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial y} - \left(2 - \frac{k}{2}\right) \mu = 0 \qquad \left(\psi_* = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_*\right)$$

Условия на фронте ударной волны после введения новых переменных примут вид

$$\tau \frac{\partial x}{\partial \tau} = x + \frac{1}{2} (\mu - \mu_*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2} \psi_*^2, \qquad \nu = -\frac{\partial x}{\partial y} \mu \tag{3.2}$$

Предположим теперь, что картина течения в переменных μ, ν, x, y не меняется со временем. Это предположение согласуется с законом (2.12). В соответствии с этим в системе (3.1) и в условиях на фронте (3.2) исчезают производные по времени.

Кроме условий на фронте ударной волны (3.2), на решение должны быть наложены дополнительные требования, одним из которых является равенство нулю вертикальной составляющей скорости на дне водоема, т. е.

$$\nu(x, 0) = 0 \tag{3.3}$$

Еще одно условие относится к характеру решения в точке пересечения ударной волны с поверхностью воды и заключается в следующем. Опыт показывает, что в точке B (фиг. 1) на фронте ударной волны скачок давления Δp отличен от нуля. С другой стороны, на поверхности $p = p_0$. В соответствии с этим переход от давления на фронте ударной волны к давлению p_0 должен осуществляться с помощью течения типа Прандтля — Майера. Характер возникающей при этом особенности можно определить следующим образом. Введем полярную систему координат с началом в точке B так, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{y-1}, \qquad \rho^2 = x^2 + (y-1)^2$$

Вводя эти переменные в систему (3.1) и устремляя $\rho \to 0$, получим

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\mu_* - \frac{1}{2}\psi_*^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi\right)\frac{d\mu}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{d\nu}{d\varphi} = -\operatorname{tg}\varphi\frac{d\mu}{d\varphi}$$

Из этих равенств следуют две возможности:

$$\mu = \text{const}, \quad \nu = \text{const} \tag{3.4}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\mu_* + \frac{1}{2}\psi_*^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi, \quad \nu = \text{const} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi \tag{3.5}$$

Последние равенства описывают течение, аналогичное центрированной волне разрежения. Так как на фронте ударной волны $\mu = \mu_*$, то (3.5) имеет место при

$$\operatorname{tg}\varphi \geqslant \sqrt{\psi_*^2 - \mu_*} \tag{3.6}$$

а в секторе $\sqrt{\psi_*^2 - \mu_*} \geqslant \operatorname{tg}\varphi \geqslant -\psi_*$, имеет место (3.4), т. е.

$$\mu = \mu_*, \qquad \nu = \mu_*\psi_*$$

Последнее из этих равенств следует из (3.2). Легко видеть, что постоянная во втором равенстве (3.5) равна

$$\text{const} = \mu_*\psi_* - \frac{1}{3}(\psi_*^2 - \mu_*)^{3/2}$$

Таким образом, в точке B решение должно обладать особенностью (3.5). Из (3.6) следует, что

$$\psi_*^2 \geqslant \mu_* \tag{3.7}$$

Наименьший возможный при заданном μ_* угол ψ_* называется критическим [4]. В дальнейшем, следуя [4], предположим, что угол ψ_* является критическим, т. е. в (3.7) имеет место знак равенства.

Согласно сделанным предположениям система (3.1) примет вид

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial x} = 0 \tag{3.8}$$

$$(\mu + x - \mu_*)\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial y} - \left(2 - \frac{k}{2}\right)\mu = 0$$

Первое из условий на фронте (3.2), которое в дальнейшем будем называть уравнением фронта, перепишем в виде

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{2\mu_* - \mu - 2x} \tag{3.9}$$

Условие непрерывности касательной составляющей вектора скорости при переходе через фронт ударной волны (второе из условий (3.2)) примет вид

$$\nu = -\mu\frac{dx}{dy} \tag{3.10}$$

Из (3.3) и (3.10) следует, что фронт ударной волны подходит к дну вертикально, т. е. имеет место равенство

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{при } y = 0$$

Если обозначить через μ_0 и x_0 значения μ и x на фронте ударной волны при $y = 0$, то из (3.9) получим

$$\mu_0 = 2(\mu_* - x_0) \tag{3.11}$$

Величина μ_0 определенным образом связана с постоянной, входящей в равенство (2.12), и определяется по данным эксперимента. На основании (1.6) и (2.12) имеем

$$\mathrm{const} = \frac{2}{n+1}\mu_0$$

Измеряя давление на фронте ударной волны в некоторой точке на дне водоема на достаточно большом расстоянии от места взрыва, можно вычислить μ_0 из (2.12). Как будет видно из дальнейшего, величина μ_0 определяет также длину ударной волны.

Ввиду нелинейности системы (3.8) решение поставленной задачи строится при помощи частных решений. Произвол в полученных решениях не велик,— ограниченный набор постоянных вместо произвольных функций; поэтому удовлетворить всем требуемым условиям невозможно. При отборе частных решений потребуем прежде всего, чтобы в точке B ($x = 0$, $y = 1$) они имели особенность (3.5) в соответствии с тем, что основным фактором, определяющим картину течения, является влияние свободной поверхности.

Будем искать решение среди решений следующего вида:

$$\mu = \varphi_2(q)(y-1)^2 + \varphi_0(q) + \mu_* \tag{3.12}$$

$$\nu = \psi_3(q)(y-1)^3 + \psi_1(q)(y-1) + 2\left(2 - \frac{k}{2}\right)\mu_* y + \nu_0$$

$$x = -q(y-1)^2 + \chi_0(q)$$

где ν_0 — произвольная постоянная. Решения такого вида были использованы в работе [6] для построения течения, возникающего при отражении ударной волны от свободной поверхности.

Подставляя (3.12) в систему (3.8), получим систему из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений для определения пяти функций φ_2, φ_0, ψ_3, ψ_1 и χ_0. Для определения φ_2 получим уравнение

$$(\varphi_2 - q + 2q^2)\frac{d^2\varphi_2}{dq^2} + \left(1 - \frac{k}{2} - q\right)\frac{d\varphi_2}{dq} + \left(\frac{d\varphi_2}{dq}\right)^2 + \varphi_2 = 0$$

В дальнейшем ограничимся случаем $k = 1$. Положим

$$q = c\lambda + \frac{5}{18}, \qquad \varphi_2(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q + \frac{25}{216} - \frac{3}{2}c^2 u(\lambda)$$

где C — произвольная постоянная. Для $u(\lambda)$ получаем уравнение

$$(\lambda^2 - u)u'' - (u' + 2\lambda)u' = \frac{4}{81c^2} \tag{3.13}$$

Для того чтобы (3.12) имело требуемую особенность, необходимо

$$\frac{u(\lambda)}{\lambda^2} \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty \tag{3.14}$$

Будем теперь искать решение уравнения (3.13) в виде ряда по степеням ε, где

$$\varepsilon = \frac{4}{81c^2}$$

т. е. положим[1]

$$u(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\lambda)\,\varepsilon^n \tag{3.15}$$

Подставляя (3.15) в (3.13), получим рекуррентную систему уравнений, интегрирование которой с учетом (3.14) дает

$$u_0=0,\qquad u_1=-\tfrac{1}{3}\ln\lambda,\qquad u_n=\int_\lambda^\infty \lambda^2\left[\int_\lambda^\infty \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(u_{n-j}u_j)''\frac{d\lambda}{\lambda^4}\right]d\lambda \qquad (n\geqslant 2)$$

Ограничиваясь первыми тремя членами $(n\leqslant 2)$ разложения (3.15), получим для $\varphi_2(q)$ выражение

$$\varphi_2(q)=-\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{6}q+\frac{25}{216}+0.02469\ln\frac{(q-{}^5/_{18})}{c}+$$
$$+\frac{0.00004}{(q-{}^5/_{18})^2}\ln\frac{q-{}^5/_{18}}{c}-\frac{0.00001}{(q-{}^5/_{18})^2}$$

Остальные функции определяются следующими формулами:

$$\psi_3=\frac{2}{3}\left[(\varphi_2-q+2q^2)\frac{d\varphi_2}{dq}+\left(\frac{3}{2}-2q\right)\varphi_2\right]$$

$$\chi_0=A\int_q^\infty \exp\left(-\int\frac{4q\,dq}{\varphi_2-q+2q^2}\right)dq$$

$$\varphi_0=A\int_q^\infty \varphi_2'\exp\left(-\int\frac{4q\,dq}{\varphi_2-q+2q^2}\right)dq,\qquad \psi_1=3\varphi_0+2(\varphi_2-q+2q^2)\varphi_0'$$

где A — произвольная постоянная.

Нетрудно видеть, что полученное решение обладает требуемой особенностью в точке B и, кроме того, содержит пять произвольных постоянных μ_*, ν_0, A, c и величину $q=q_0$, соответствующую точке пересечения ударной волны с дном водоема. Для их определения потребуем выполнения следующих условий:

$$\mu(q_0,0)=\mu_0,\qquad \mu_0=2(\mu_*-x_0) \tag{3.16}$$

Если $x=x_1(y)$ есть уравнение фронта ударной волны, то должны иметь место равенства

$$x_1(1)=0,\qquad x_1(0)=x_0$$

В полученном решении ни при каком выборе постоянных нельзя выполнить условие на дне $\nu(x,0)=0$. Однако, если потребовать выполнения равенств $\nu=0$ и $\partial\mu/\partial y=0$ в точке пересечения фронта ударной волны с дном водоема, то, как показывают вычисления, $\nu(x,0)$ будет мала по сравнению с $\max\nu(x,y)$ в области ABC. Из (3.12) имеем

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=2(\varphi_2-q\varphi_2')(y-1)$$

Отсюда получаем

$$\varphi_2(q_0)=q_0\varphi_2'(q_0) \tag{3.17}$$

Это равенство определяет зависимость константы C от q_0.

Для определения произвольных постоянных поступаем следующим образом. Задаемся некоторым значением q_0 и из равенства (3.17) опре-

[1] То, что в данном случае этим способом можно получить достаточно точное аналитическое выражение было сообщено автору Б. И. Заславским.

деляем C. Затем численным способом определяем $\chi_0(q)$ и $\varphi_0(q)$. Из условий (3.16) находим μ_* и A. После этого численно интегрируем уравнение фронта (3.9), начиная из точки $y = 0$, $x = x_0(q_0, 0)$. Если построенный фронт проходит через точку $x = 0$, $y = 1$, то задача определения постоянных считается решенной, если же фронт при выбранном q_0 пересекает линию $y = 1$ в точке, отличной от $x = 0$, то q_0 изменяется и весь процесс повторяется сначала. После того как q_0, c, μ_* и A найдены, из условия $\nu = 0$ при $y = 0$, $x = x_0(q_0, 0)$ определяется постоянная ν_0.

Ниже в качестве примера приводим результаты расчета для случая $\mu_0 = 14.0$. На фиг. 2 показано поле давлений. Здесь AB — фронт ударной волны, BD — линия перехода, отделяющая область эллиптичности системы (3.8) от области гиперболичности, определяемая уравнением

$$\mu = \mu_* - x$$

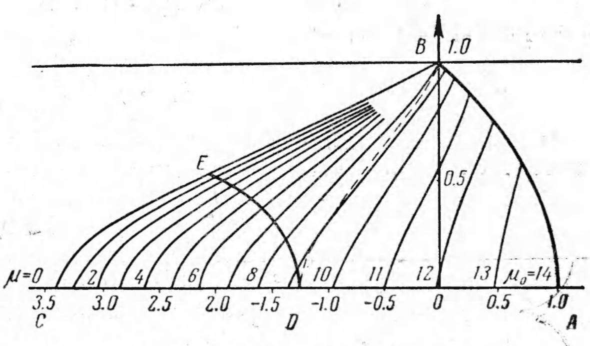
BC — линия $\mu = 0$. На участке дна от фронта ударной волны до линии перехода $\nu(x, 0)$ растет от нуля до значения $\nu = 2.30$. Эта величина мала по сравнению с $\max \nu = 41.4$, которой достигается на линии $\mu = 0$ при $y = 0.6$. За линией перехода $\nu(x, 0)$ растет от значения $\nu = 2.30$ до $\nu = 25.1$, которое ν принимает в точке пересечения линии $\mu = 0$ с дном. Для исправления этого недостатка полученного решения поступаем следующим образом. Строим характеристику DE, выходящую из точки пересечения линии перехода с дном, и по значениям, которые принимают μ и ν на этой характеристике в полученном решении, и значению $\nu(x, 0) = 2.30$ на дне строим методом характеристик течение в области DEC. На фиг. 2 приведена окончательная картина течения.

Условие непрерывности касательной составляющей вектора скорости при переходе через фронт ударной волны (3.10) в соответствии с приближенным характером решения можно заменить условием интегрального сохранения проекции импульса на направление, перпендикулярное дну водоема для области ABC. С принятой точностью будем иметь

$$\int\limits_{x_0(0)}^{x_1(0)} \mu(x, 0)\, dx = \int\limits_0^1 \nu_0(y)\, dy$$

Проверка этого соотношения показывает, что для найденного решения оно выполняется с точностью около 20% относительно величины

$$\int\limits_0^1 \nu_0(y) dy$$



Фиг. 2

Автор благодарит С. А. Христиановича, под руководством которого была проделана работа.

Поступила 5 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., ГТТИ, 1954.
3. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
4. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
5. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
6. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.