УДК 532.516+532.64

К. Байокки, В. В. Пухначев

ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА И ПРОБЛЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО КРАЕВОГО УГЛА

Проблема динамического краевого угла возникает вследствие несовместимости условий на свободной поверхности жидкости и условий прилипания на твердой стенке в окрестности движущейся линии контакта трех фаз. Впервые эта несовместимость отмечена в [1] и, при минимальных предположениях на гладкость поля скоростей и свободной поверхности, доказана в [2]. Существуют различные способы замыкания постановки задачи о движении вязкой капиллярной несжимаемой жидкости при наличии движущейся линии (в двумерных задачах — точек) трехфазного контакта: замена условия прилипания условием проскальзывания на некотором участке твердой стенки вблизи линии контакта [3—6], асимптотический подход, при котором решение не продолжается вплоть до линии контакта [7], предложение считать динамический краевой угол равным π в режиме натекания жидкости на сухую поверхность и нулю — в режиме оттекания [2].

Первые два способа требуют привлечения эмпирической информации (значения коэффициентов в различных вариантах условия проскальзывания, задание угла наклона свободной поверхности к стенке на малом расстоянии от нее), а третий неприменим к описанию движения при малом капиллярном числе $\mathrm{Ca} = \rho\nu V/\sigma$ (ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения. V — нормальная скорость движения линии трехфазного контакта относительно твердой стенки).

В данной работе предлагается новый подход к исследованию ряда модельных задач динамики вязкой жидкости с движущимися точками контакта свободной границы и твердой стенки. Наши рассмотрения ограничены лишь двумерными (плоскими и осесимметричными) стационарными задачами. Считая капиллярное число малым, можно приближенно определить свободную границу жидкости из условий капиллярного равновесия, после чего возникает задача нахождения решения уравнений Навье — Стокса со смешанными краевыми условиями. Граница области течения содержит угловые точки, в которых происходит смена типа краевых условий. Возникающая задача, вообще говоря, не имеет даже обобщенного решения с конечным интегралом Дирихле. Необходима модификация ее постановки. Предлагаемая модификация состоит в замене интегрального тождества, которому удовлетворяет обобщенное решение задачи (если оно существует), вариационным неравенством. Одностороннее ограничение, участвующее в новой формулировке задачи, состоит в знакоопределенности касательной составляющей скорости на части границы области.

Доказывается разрешимость упомянутого неравенства, а для линеаризованных уравнений Навье — Стокса — и единственность его решения. В конкретных случаях (задача о заполнении капилляра, задача о течении во вращающемся контейнере) полученное решение допускает естественную физическую интерпретацию.

1. Постановка модельной задачи о заполнении капилляра. Пусть вязкая несжимаемая жидкость под действием силы тяжести g заполняет плоский вертикальный капилляр ширины $2a$. Предположим, что в системе координат, связанной с движущимися точками контакта, течение установившееся, и перейдем в эту систему. Считаем также, что при удалении вверх по течению от точек контакта движение стремится к течению Пуазейля, на которое наложен постоянный поток со скоростью $-V$, которая определяется из условия нулевого расхода жидкости через поперечное сечение капилляра: $V = ga^2/3\nu$. Введем безразмерные переменные, выбирая в качестве масштабов длины, скорости и давления a, V и $\rho\nu Va$ соответственно. В этих переменных уравнения движения имеют вид

$$\Delta\mathbf{v} - \nabla p + 3\mathbf{e}_1 = \mathrm{Re}\,\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v},\quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и p — безразмерные вектор скорости и давление; $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$; $\mathrm{Re} = Va/\nu$ — число Рейнольдса.

Оговоримся заранее, что течение предполагается симметричным относительно оси капилляра $x_2 = 0$. Отсюда и из инвариантности физической постановки задачи относительно сдвига по оси x_1 следует, что точками контакта можно считать точки $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ре-

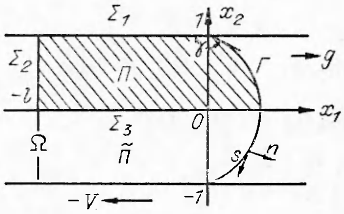

Рис. 1

шение системы (1.1) требуется найти в области Ω (рис. 1), ограниченной стенками капилляра $x_1 < 0$, $x_2 = -1$ и $x_1 < 0$, $x_2 = 1$ и свободной границей $\Gamma = \{x_1, x_2 : x_1 = f(x_2), \ |x_2| \leqslant 1\}$, которая заранее неизвестна и подлежит определению вместе с функциями $\mathbf{v}$, p. Традиционная постановка краевой задачи для указанной системы уравнений состоит в задании условий прилипания на стенках капилляра

$$\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1, \ x_1 < 0, \ x_2 = \pm 1, \tag{1.2}$$

кинематического

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \ (x_1, x_2) \in \Gamma \tag{1.3}$$

и динамических

$$\mathbf{s} \cdot D \cdot \mathbf{n} = 0, \ (x_1, x_2) \in \Gamma; \tag{1.4}$$

$$H = K + \mathrm{Ca}(p - 2\mathbf{n} \cdot D \cdot \mathbf{n}), \ (x_1, x_2) \in \Gamma \tag{1.5}$$

условий на свободной границе [8]. Здесь введены следующие обозначения: $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ — единичные векторы внешней нормали и касательной к кривой $\mathbf{v}$; $D = D(\mathbf{v})$ — тензор скоростей деформаций, соответствующий вектору $\mathbf{v}$, с элементами $D_{ij} = 0{,}5(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$, $i, \ j = 1, \ 2$; H — кривизна кривой Γ; $K = -ap_a/\sigma$ — постоянная (p_a — атмосферное давление); $\mathrm{Ca} = \rho\nu V/a$. Считается, что $H > 0$, если кривая Γ выпукла наружу жидкости.

Условие (1.3) означает, что кривая Γ — линия тока. Вследствие (1.4) касательное напряжение на Γ равно нулю. Условие (1.5) выражает тот факт, что разность капиллярного давления и нормального напряжения в точках свободной границы жидкости равна атмосферному давлению.

Ввиду некомпактности области Ω для решения системы (1.1) требуется поставить некоторое условие при $x_1 \to -\infty$. Предполагаем, что вдали от свободной границы реализуется течение, близкое к суперпозиции течения Пуазейля и равномерного потока:

$$v_1 \to (1 - 3x_2^2)/2, \ v_2 \to 0, \ p \to \mathrm{const}, \ x_1 \to -\infty, \ |x_2| \leqslant 1. \tag{1.6}$$

Наконец, необходимо задать дополнительное условие в точках контакта свободной границы с твердыми стенками. Его возьмем, по аналогии с задачей капиллярного равновесия жидкости [3], в виде

$$f' = \mp \operatorname{ctg} \gamma \quad \text{при } x_2 = \pm 1 \tag{1.7}$$

($\gamma \in (0, \pi]$ — постоянная величина, которую будем отождествлять с динамическим краевым углом [3]).

2. Асимптотическое упрощение задачи. Задача (1.1)—(1.7)— задача с неизвестной границей для нелинейной системы уравнений в неограниченной области. Кроме того, если в (1.7) $\gamma < \pi$, то скорость диссипации кинетической энергии жидкости в окрестности точек контакта представляется расходящимся интегралом [2]. Это ставит под сомнение физический смысл решения обсуждаемой задачи, даже если оно и существует в более широком классе функций, чем тот, который обычно используется при анализе краевых задач для уравнений Навье — Стокса [9]. Имея в виду редукцию задачи (1.1)—(1.7) к более обозримой задаче, предположим, что ее определяющие параметры Re и Ca малы, их зависимость от исходных данных задачи такова: $\mathrm{Re} = ga^3/3\nu^2$, $\mathrm{Ca} = \rho g a^2/3\sigma$ (последнее соотношение позволяет отождествить в рассматриваемом случае капиллярное число с числом Бонда). Таким образом, малость Re и Ca может быть обеспечена за счет малости полуширины канала a при прочих фиксированных значениях исходных данных. Полагая в системе (1.1) $\mathrm{Re} = 0$, получаем систему Стокса:

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla p + 3\mathbf{e}_1 = 0, \ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2.1}$$

Предельный переход по капиллярному числу в задаче (1.1)—(1.7) основан на предположении, что $\mathbf{v} \to 0$, $\nabla \mathbf{v} \to 0$, $\Delta \mathbf{v} \to 0$, когда $\mathrm{Ca} \to 0$, но при этом $p\mathrm{Ca} \to K_0 = \mathrm{const}$, что соответствует предельному состоянию капиллярного равновесия при отсутствии внешних сил. (Процедура разложения решения задачи со свободной границей по параметру, ответственному за деформируемость свободной поверхности, описана в [10]; в нашем случае таким параметром является число Ca.) Из соотношения (1.5) в пределе $\mathrm{Ca} \to 0$ получаем $H = K + K_0 = \mathrm{const}$. Таким образом, в главном по параметру Ca порядке кривая Γ есть дуга окружности

$$(x_1 + \operatorname{tg} \gamma)^2 + x_2^2 = (\cos \gamma)^{-2}, \ |x_2| \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Параметры окружности определены в соответствии с (1.7).

Сделаем еще одно упрощение, которое частично можно оправдать ссылкой на принцип Сен-Венана для системы Стокса [11]. Считаем, что при $x_1 \to -\infty$ искомое решение быстро выходит на решение Пуазейля, и перенесем условие (1.6) из бесконечности на конечное расстояние:

$$v_1 = (1 - 3x_2^2)/2, \ v_2 = 0, \ x_1 = -l, \ |x_2| \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Здесь l — достаточно большая положительная постоянная (во всяком случае, $l > 1$). Теперь можем сформулировать упрощенный вариант задачи о заполнении капилляра, который и будет объектом дальнейшего исследования.

Требуется найти решение $\mathbf{v}$, p системы (2.1) в области $\Pi = \{x_1, x_2$: $0 < x_2 < 1, \ -l < x_1 < [(\cos\gamma)^{-2} - x_2^2]^{1/2} - \operatorname{tg}\gamma\}$ (на рис. 1 заштрихована), удовлетворяющее условиям (2.3) и

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1, \ -l \leqslant x_1 \leqslant 0, \ x_2 = 1; \tag{2.4}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \ (x_1, x_2) \in \Gamma, \ x_2 \geqslant 0; \tag{2.5}$$

$$\mathbf{s} \cdot D(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0, \ (x_1, x_2) \in \Gamma, \ x_2 \geqslant 0; \tag{2.6}$$

$$v_2 = 0, \ \partial v_1/\partial x_2 = 0, \ -l \leqslant x_1 \leqslant \operatorname{tg}(\gamma/2 - \pi/4), \ x_2 = 0, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ — орты нормали и касательной к кривой Γ, определенной соотношениями (2.2).

Задача (2.1)—(2.7) намного проще исходной: она линейна, область определения решения ограничена. Специфическая особенность задачи — наличие угловых точек границы области Π. Три из них ($x_1 = -l$, $x_2 = 1$; $x_1 = -l$, $x_2 = 0$; $x_1 = \operatorname{tg}(\gamma/2 - \pi/4)$, $x_2 = 0$) являются вершинами прямых углов, а краевые условия на линиях, образующих эти углы, согласованы между собой, так что сингулярностей у решения в этих точках не возникает. (Это утверждение приводится без доказательства, однако его справедливость не вызывает сомнений, так как указанные угловые точки имеют искусственное происхождение.) Что касается точки контакта свободной границы и твердой стенки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, то здесь ситуация иная. Как установлено в [2], если угол контакта удовлетворяет неравенствам $0 < \gamma < \pi$, то не существует соленоидального векторного поля $\mathbf{v}$, удовлетворяющего условиям (2.4), (2.5) и имеющего конечный интеграл Дирихле

$$\int_\Pi \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, dx < \infty$$

($\nabla \mathbf{v}$ — градиент вектора $\mathbf{v}$, двоеточие — свертка тензоров).

Оставим в стороне вопрос о разрешимости задачи (2.1)—(2.7) в классе функций $\mathbf{v}$ с неограниченным интегралом Дирихле. Такие решения описывают течения с бесконечной скоростью диссипации энергии, поэтому представляют лишь академический интерес.

Значения $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$ исключительны. Случай $\gamma = 0$ в работе не рассматривается, поскольку в задаче о заполнении капилляра он, по-видимому, физически нереализуем. В случае $\gamma = \pi$, действуя по методике [12, 13], нетрудно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (2.1)—(2.7) с конечным интегралом Дирихле. Фактически ее разрешимость связана с непрерывностью поля скоростей в окрестности точки контакта, имеющей место при $\gamma = \pi$, когда граница области П в точке $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ гладкая.

Это наблюдение наводит на мысль сместить точку смены условий (2.4) и (2.5), (2.6) вдоль твердой стенки, чтобы она уже не являлась угловой точкой границы. Итак, предположим, что на некотором участке твердой стенки, примыкающем к точке контакта, условие прилипания заменено условиями

$$v_2 = 0, \quad -\delta \leqslant x_1 \leqslant 0, \quad x_2 = 1; \tag{2.8}$$

$$\partial v_1/\partial x_2 = 0, \quad -\delta < x_1 \leqslant 0, \quad x_2 = 1 \tag{2.9}$$

($\delta < l$ — малая положительная величина). На остальной части стенки сохраним условие прилипания

$$\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1, \quad -l \leqslant x_1 < -\delta, \quad x_2 = 1. \tag{2.10}$$

Условие (2.8) — это условие непротекания, а условие (2.9) естественно назвать условием идеального проскальзывания. Оно наиболее простое из условий такого рода, предлагавшихся в [3—6], и используется при описании движения линии трехфазного контакта вдоль шероховатой стенки (см. обсуждение этого вопроса в [14]).

Малый параметр $\delta > 0$ можно считать параметром регуляризации, так как задача (2.1), (2.3), (2.5)—(2.10) имеет, и притом единственное, обобщенное решение при любом $\gamma \in (0, \pi]$. (Это утверждение, по существу,— следствие результатов [12, 13].) Более того, указанная задача допускает вариационную постановку: ее решение можно получить, минимизируя функционал диссипации энергии

$$J(\mathbf{v}) = 2\int_{\Pi} D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{v})\, dx \tag{2.11}$$

на множестве соленоидальных вектор-функций $\mathbf{v}$ с компонентами v_i ($i = 1, 2$) из соболевского класса $H^1(\Pi)$, удовлетворяющих условиям (2.3), (2.5), (2.8), (2.10) и первому из (2.7) — главным для функционала (2.11). Условия (2.6), (2.9) и второе из (2.7) — естественные условия: они выполняются на экстремали функционала J.

3. Вариационное неравенство. Регуляризация задачи (2.1)—(2.7), изложенная в п. **2**, содержит параметр δ, который в рамках классических представлений динамики вязкой жидкости определен быть не может. Ниже предлагается модификация постановки этой задачи, не содержащая дополнительных параметров. Она также базируется на вариационном принципе, связанном с функционалом (2.11). Однако вместо (2.8), (2.10), входящих в число главных условий вариационной задачи, мы потребуем выполнения равенства

$$v_2 = 0, \quad -l \leqslant x_1 \leqslant 0, \quad x_2 = 1 \tag{3.1}$$

и неравенства

$$v_1 \leqslant -1, \quad -l \leqslant x_1 \leqslant 0, \quad x_2 = 1. \tag{3.2}$$

Соотношение (2.5), (3.1) и первое из (2.7) означают, что на всей границе области П, за исключением отрезка $x_1 = -l$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$, выполнено условие непротекания. Условие, выраженное неравенством (3.2),— основное для рассмотрений п. **3**. В тех точках, где $v_1 = -1$, (3.2) переходит в условие прилипания. Вместе с тем (3.2) не исключает возможности проскальзывания жидкости относительно стенки. При $\gamma < \pi$ и конечном интеграле J такая возможность заведомо реализуется при малых $|x_1|$, $x_1 < 0$ (см. п. 2).

Предположение $v_1 \leqslant -1$ является формализацией интуитивного представления о тормозящей роли стенки в движении, причина которого — сила тяжести. Оно означает, что в точках, где жидкость проскальзывает относительно стенки, абсолютное значение скорости v_1 не может быть меньше скорости стенки.

Задача минимизации функционала (2.11) неудобна тем, что одно из главных условий — условие (2.3) — неоднородное. Сделаем замену

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \tag{3.3}$$

$\mathbf{w}$ — вектор с компонентами

$$w_1 = \partial(\zeta\Psi)/\partial x_2, \; w_2 = -\partial(\zeta\Psi)/\partial x_1. \tag{3.4}$$

Здесь $\Psi(x_2) = (x_2 - x_2^3)/2$ — функция тока, соответствующая течению типа Пуазейля; $\zeta(x_1, x_2)$ — срезающая функция. Если $\gamma \geqslant \pi/2$ (что представляет наибольший физический интерес), то срезающую функцию можно выбрать в виде $\zeta = \eta(x_1)$, где функция $\eta \in C^\infty[-l, 0]$ подчинена условиям $\eta = 1$ при $-l \leqslant x_1 \leqslant -\varepsilon$, $\eta = 0$ при $-\varepsilon/2 \leqslant x_1 \leqslant 0$ и $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $d\eta/dx_1 \leqslant 0$ при всех $x_1 \in [-l, 0]$, а в остальном произвольна. В случае $0 < \gamma < \pi/2$ положим $\zeta = \eta\langle l^{-1}x_1\{l - [(\cos\gamma)^{-2} - x_2^2]^{1/2} + \operatorname{tg}\gamma\}\rangle$. Ясно, что в обоих случаях $\zeta \in C^\infty(\bar{\Pi})$ и $\zeta = 0$ вблизи части Γ границы области Π. Далее будем считать $\gamma \geqslant \pi/2$, что не ведет к принципиальным упрощениям, но несколько сокращает изложение.

Определим функционал I равенством

$$I(\mathbf{u}) = 2\int_\Pi [D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{u}) + 2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w})]\, dx. \tag{3.5}$$

Задачи минимизации функционалов I и J эквивалентны, поскольку $J(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - I(\mathbf{u})$ не зависит от $\mathbf{u}$. Введем обозначения: $\Sigma_1 = \{x_1, x_2\colon -l \leqslant x_1 \leqslant 0,\; x_2 = 1\}$, $\Sigma_2 = \{x_1, x_2\colon x_1 = -l,\; 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$, $\Sigma_3 = \{x_1, x_2\colon -l \leqslant x_1 \leqslant \operatorname{tg}(\gamma/2 - \pi/4),\; x_2 = 0\}$. Объединение множеств Γ, Σ_1, Σ_2 и Σ_3 образует границу области Π. Определим функциональное пространство $\mathbf{H}^1(\Pi)$ как замыкание по норме

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}^1(\Pi)} = \left[\int_\Pi D(\boldsymbol{\varphi}) : D(\boldsymbol{\varphi})\, dx\right]^{1/2}$$

множества гладких соленоидальных в Π вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}$, удовлетворяющих условиям

$$\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n} = 0, \; (x_1, x_2) \in \Gamma; \tag{3.6}$$

$$\varphi_2 = 0, \; (x_1, x_2) \in \Sigma_1; \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = 0, \; (x_1, x_2) \in \Sigma_2; \tag{3.8}$$

$$\varphi_2 = 0, \; (x_1, x_2) \in \Sigma_3. \tag{3.9}$$

Пространство $\mathbf{H}^1(\Pi)$ становится гильбертовым, если для любой пары его элементов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ определить скалярное произведение по формуле

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{H}^1(\Pi)} \equiv a(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = \int_\Pi D(\boldsymbol{\varphi}) : D(\boldsymbol{\psi})\, dx.$$

Для функций из пространства $\mathbf{H}^1(\Pi)$ справедливы неравенство Корна [13]

$$\int_\Pi \nabla\boldsymbol{\varphi} : \nabla\boldsymbol{\psi}\, dx \leqslant C_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Pi)}$$

и неравенство Пуанкаре—Фридрихса [9]

$$\int_\Pi |\boldsymbol{\varphi}|^2\, dx \leqslant C_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Pi)}$$

с положительными постоянными C_1 и C_2, не зависящими от $\boldsymbol{\varphi}$. Наконец, обозначим через K множество $K = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Pi)\colon \varphi_1 \leqslant \eta(x_1) - 1$ на $\Sigma_1\}$. Оно выпукло и замкнуто в $\mathbf{H}^1(\Pi)$. (В силу неравенств Корна и Пуанкаре — Фридрихса компоненты φ_1, φ_2 вектора $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Pi)$ принадлежат пространству Соболева $H^1(\Pi)$. По теореме вложения след φ_1 на отрезке Σ_1 есть функция из класса $H^{1/2}(\Sigma_1)$. Поэтому высказывание «$\varphi_1 \leqslant \eta(x_1) - 1$ почти всюду на Σ_1» имеет смысл.)

Как следует из теории вариационных неравенств [15], задача минимизации функционала (3.5) на множестве $K \subset \mathbf{H}^1(\Pi)$ равносильна решению вариационного неравенства

$$a(\mathbf{u},\ \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) \leqslant L(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) \ \forall \boldsymbol{\varphi} \in K, \tag{3.10}$$

где L — линейный функционал над пространством $\mathbf{H}^1(\Pi)$, заданный равенством

$$L(\mathbf{u}) = -\int\limits_{\Pi} D(\mathbf{w}) : D(\mathbf{u})\, dx \tag{3.11}$$

(вектор $\mathbf{w}$ определен соотношениями (3.4)). По теореме Лионса — Стампаккьи [15] существует, и притом единственное, решение задачи (3.10).

Нетрудно показать, что построенная с помощью (3.3) по найденному $\mathbf{u}$ вектор-функция $\mathbf{v}$ вместе с подходящей скалярной функцией p удовлетворяет в области Π системе (2.1). Действительно, пусть $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции из $C_0^\infty(\Pi)$ такие, что $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$. Тогда вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\varphi}_2 = \mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}$ принадлежат K. Полагая в (3.10) поочередно $\boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\varphi}_2 = \mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}$, имеем $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \leqslant L(\boldsymbol{\psi})$, $a(\mathbf{u}, -\boldsymbol{\psi}) \leqslant L(-\boldsymbol{\psi})$, что означает $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) = L(\boldsymbol{\psi})$. Пользуясь определением (3.11) функционала L и применяя формулу Грина для системы Стокса [9], получаем

$$\int\limits_{\Pi} \Delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx = 0.$$

Ввиду произвольности соленоидального вектора $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Pi)$ последнее равенство означает существование однозначной функции p такой, что первое из уравнений (2.1) выполнено в Π в смысле распределений.

Перейдем теперь к интерпретации краевых условий. При этом дополнительно предположим, что решение $\mathbf{u}$ задачи (3.10) непрерывно в $\bar{\Pi}$. Согласно (3.8), для $\mathbf{u} \in K$ выполнено $\mathbf{u} = 0$ на Σ_2, поэтому $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ удовлетворяет условию (2.3). Далее, рассмотрим произвольную функцию $\boldsymbol{\varphi} \in K \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1(C_{\xi,\varepsilon_1})$, где $C_{\xi,\varepsilon_1} = \{x_1, x_2\colon (x_1 - \xi)^2 + x_2^2 < \varepsilon_1^2\}$ и $\boldsymbol{\varphi} = 0$ для $(x_1, x_2) \in \Pi \setminus C_{\xi,\varepsilon_1} \cap \Pi$. Здесь $(\xi,\ 0)$ — произвольная внутренняя точка отрезка Σ_3, а $\varepsilon_1 = 0{,}5 \min(1,\ l + \xi,\ \operatorname{tg}(\gamma/2 - \pi/4) - \xi)$. Так как $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Pi)$, то можно преобразовать выражение $a(\mathbf{u},\ \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) - L(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi})$ с помощью формулы Грина. Используя (2.1) и (3.9), из (3.10) находим, что

$$\int\limits_{\xi-\varepsilon_1}^{\xi+\varepsilon_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, 0)\,[u_1(x_1, 0) - \varphi_1(x_1, 0)]\, dx_1 \geqslant 0.$$

Заметим, что принадлежность $\boldsymbol{\varphi}$ множеству K не накладывает никаких ограничений на значения функции φ_1 в точках отрезка Σ_3. Но тогда из последнего неравенства следует выполнение второго условия (2.7).

Тем самым это условие — естественное для функционала (3.5). Аналогичным рассуждением доказывается, что в точках кривой Γ для функции $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ выполнено (2.6).

Опираясь на доказанные свойства (2.5)—(2.7) функции $\mathbf{v}$, снова можем использовать формулу Грина для преобразования (3.10). Это дает

$$\int\limits_{-l}^{0} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, 1)\,[u_1(x_1, 1) - \varphi_1(x_1, 1)]\, dx_1 \leqslant 0. \tag{3.12}$$

Пусть Σ' — произвольный замкнутый подынтервал отрезка Σ_1 и μ — функция класса $C_0^\infty(\Sigma')$, удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, а в остальном произвольная. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Pi)$, след первой компоненты которой на Σ_1 дается формулой $\varphi_1|_{\Sigma_1} = (1 - \mu)u_1|_{\Sigma_1} + \mu(\eta - 1)$. (Существование таких $\boldsymbol{\varphi}$ не вызывает сомнений.) Для $\mathbf{u} \in K$ выполнено неравенство $\varphi_1(x_1, 1) \leqslant \eta(x_1) - 1$ при всех $x_1 \in [-l, 0]$. Таким образом, $\boldsymbol{\varphi} \in K$. Подставляя указанное выражение для $\varphi_1(x_1, 1)$ в (3.12), получаем

$$\int_{\Sigma'} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(u_1 - \eta + 1)\,\mu\, d\Sigma' \leqslant 0.$$

Повторяя подобное рассуждение, в котором $\varphi_1|_{\Sigma_1} = (1 + \mu)u_1|_{\Sigma_1} - \mu(\eta - 1)$, выводим из (3.12)

$$\int_{\Sigma'} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(u_1 - \eta + 1)\,\mu\, d\Sigma' \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\Sigma'} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(u_1 - \eta + 1)\,\mu\, d\Sigma' = 0.$$

Учитывая произвольность $\Sigma' \subset \Sigma_1$, произвольность неотрицательной функции μ из $C_0^\infty(\Sigma')$ и вспоминая, что вследствие (3.3), (3.4) $u_1 - \eta = v_1$ на Σ_1, мы можем заключить, что

$$(v_1 + 1)\partial v_1/\partial x_2 = 0 \quad \text{на } \Sigma_1. \tag{3.13}$$

Теперь рассмотрим функцию $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Pi)$, для которой выполнено $\varphi_1|_{\Sigma_1} = u_1|_{\Sigma_1} - \chi$. Здесь χ — произвольная функция на отрезке Σ_1, удовлетворяющая условиям $\chi \in H^{1/2}(\Sigma_1) \cap C^0(\Sigma_1)$, $\chi \geqslant 0$. Если $\mathbf{u} \in K$, то, очевидно, и $\boldsymbol{\varphi} \in K$. Еще раз обращаясь к (3.12), получаем

$$\int_{\Sigma'} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\chi\, d\Sigma_1 \leqslant 0.$$

Вследствие произвольности $\chi \geqslant 0$ отсюда вытекает неравенство

$$\partial v_1/\partial x_2 \leqslant 0 \quad \text{на } \Sigma_1, \tag{3.14}$$

понимаемое в смысле $H^{-1/2}(\Sigma_1)$.

Неравенства (3.2), (3.14) вместе с равенствами (3.1), (3.13) и представляют совокупность условий, которым удовлетворяет решение рассматриваемой задачи минимизации на части Σ_1 границы области Π. Из непрерывности v_1 в $\overline{\Pi}$ следует, что имеет смысл рассматривать множество $\Sigma_1^- = \{(x_1, x_2) \in \Sigma_1 : v_1(x_1, x_2) + 1 < 0\}$. Исходя из (3.2), (3.12)—(3.14) и действуя так же, как при исследовании задачи Синьорини [15], можно показать, что

$$\partial v_1/\partial x_2 = 0 \quad \text{на } \Sigma_1^- \tag{3.15}$$

в смысле меры на Σ_1^-. Равенство (3.15) означает, что на множестве Σ_1^-, где не выполняется условие прилипания (так как на этом множестве $v_1 < -1$), удовлетворяется условие идеального проскальзывания. С другой стороны, как показывает (3.13), в тех точках множества $\Sigma_1 \setminus \Sigma_1^-$, где $\partial v_1/\partial x_2 < 0$, обязательно выполняется условие прилипания.

К сожалению, в настоящее время мы не располагаем информацией о структуре множества Σ_1^-. Соображения, базирующиеся на результатах [1, 2] и коротко изложенные в п. **2**, приводят к выводу, что при $0 < \gamma < \pi$

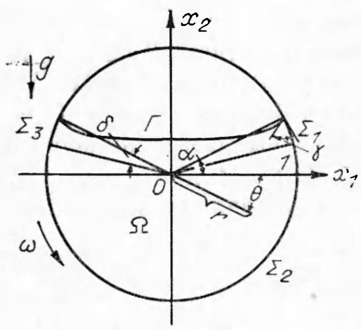

Рис. 2

множество Σ_1^- непусто и содержит некоторый интервал $(-\varepsilon_2, 0)$, аналогичный промежутку высачивания в задаче о фильтрации жидкости через плотину [15].

В заключение п. 3 отметим, что условия (2.7), которым удовлетворяет построенное решение ($\mathbf{v}$, p) задачи с односторонним ограничением для системы (2.1), позволяют продолжить это решение в область $\tilde{\Pi}$, симметричную Π относительно оси x_1.

Именно, функции v_1 и p продолжаются в $\tilde{\Pi}$ четным образом, а v_2 — нечетным по переменной x_2. Продолженное решение определено в области $(x_1, x_2) \in \Omega$, $x_1 \geqslant -l$. Оно может быть названо приближенным (асимптотическим при $\mathrm{Re} \to 0$, $\mathrm{Ca} \to 0$) решением модифицированной задачи о заполнении плоского капилляра. В этом решении скорость диссипации энергии конечна, динамический краевой угол принимает любое фиксированное значение из промежутка $(0, \pi)$. Важное свойство построенного решения — знакоопределенность касательного напряжения на стенке, выраженная неравенством (3.14). «Правильный» знак в этом неравенстве — дополнительное подтверждение физической разумности исходного предположения (3.2).

4. Задача о вращающемся контейнере. Рассмотрим плоскую задачу о стационарном движении жидкости, частично заполняющей круговую область радиуса R. Граница области — твердая непроницаемая стенка, вращающаяся с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$ вокруг центра круга. На жидкость действует сила тяжести с ускорением g, направленная вдоль отрицательной оси x_2. Выберем начало координат в центре круга и обозначим (как и в п. 1) область, занятую жидкостью, через Ω. Часть границы Ω свободная, обозначим ее через Γ (рис. 2). Другая часть границы, Σ,— дуга окружности $r \equiv (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = 1$. На ней потребуем выполнения условия непротекания и неравенства, которое напоминает (3.2). Введем масштабы: длины R, скорости ωR и давления $\rho\omega\nu$.

Задача о вращающемся контейнере характеризуется, помимо динамического краевого угла γ $(0 < \gamma < \pi)$ и параметра α $(|\alpha| < \pi/2)$, выражающего степень заполнения контейнера (рис. 2), еще тремя безразмерными положительными параметрами: числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = \omega^2 R/\nu$, числом Бонда $\mathrm{Bo} = \rho g R^2/\sigma$ и капиллярным числом $\mathrm{Ca} = \rho\nu\omega R/\sigma$.

Как и прежде, считаем Ca малым, в то время как на Re и Bo ограничения малости не накладываются. Это дает возможность, действуя в духе п. 2, приближенно свести исходную задачу с неизвестной границей к задаче в фиксированной области. Считая, что линия Γ однозначно проектируется на ось x_1, зададим ее уравнение в виде $x_2 = f(x_1)$. В первом приближении по малому параметру Ca для определения функции f получается краевая задача

$$\left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)' - \mathrm{Bo}\, f = C \quad \text{при } |x_1| < \cos\alpha; \tag{4.1}$$

$$C = \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha} - \frac{\mathrm{Bo}}{2\cos\alpha}\int\limits_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} f(x_1)\,dx_1; \tag{4.2}$$

$$f' = \pm\mathrm{ctg}\,(\gamma-\alpha) \quad \text{при } x_1 = \pm\cos\alpha \tag{4.3}$$

(штрих означает дифференцирование по x_1). Ее решения описывают формы равновесия тяжелой капиллярной жидкости в круговой области, обладающие свойством однозначного проектирования. (В [16] рассмотрены равновесные формы, которые неоднозначно проектируются на ось x_1.) Задача (4.1)—(4.3) разрешима при некоторых ограничениях типа неравенств на α, γ и Bo (помимо наложенных выше). Условия ее разрешимости в неявной форме содержатся в [16]. Предполагаем эти условия выполненными. Отметим, что указанная задача имеет решение в виде четной функции $f(x_1)$ при любом $\mathrm{Bo} > 0$ и α, близком к $\gamma - \pi/2$. Если $\alpha = \gamma - \pi/2$, то единственным решением является $f = \sin\alpha$.

Теперь определим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ соотношениями $r < 1$, $x_2 < f(x_1)$. Ее граница $\partial\Omega = \bar{\Gamma} \cup \bar{\Sigma}$, где $\Gamma = \{x_1, x_2\colon\ x_2 = f(x_1),\ |x_1| < \cos\alpha\}$, $\Sigma = \{x_1, x_2\colon\ r = 1,\ x_2 < \sin\alpha\}$. Точки $x_1 = -\cos\alpha$, $x_2 = \sin\alpha$ и $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \sin\alpha$ — точки динамического контакта трех фаз.

Предлагаемая постановка модельной задачи о вращающемся контейнере состоит в определении пары функций $\mathbf{v}$, p, удовлетворяющих системе уравнений Навье — Стокса

$$\Delta\mathbf{v} - \nabla p = \mathrm{Re}\,\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v},\quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega \tag{4.4}$$

и условиям на границе области

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma; \tag{4.5}$$

$$\mathbf{s}\cdot D(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma; \tag{4.6}$$

$$v_r = 0,\ v_\theta = 1 \quad \text{на } \Sigma_2; \tag{4.7}$$

$$v_r = 0 \quad \text{на } \Sigma_1 \cup \Sigma_3; \tag{4.8}$$

$$v_\theta \leqslant 1 \quad \text{на } \Sigma_1 \cup \Sigma_3. \tag{4.9}$$

Здесь p — разность между давлением жидкости и гидростатическим давлением $gRx_2/\nu\omega$; $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ — единичные векторы внешней нормали и касательной к кривой Γ; v_r и v_θ — проекции вектора $\mathbf{v}$ на оси полярной системы координат r; $\theta = \mathrm{arctg}\,(x_2/x_1)$. Через Σ_i ($i = 1, 2, 3$) обозначены компоненты множества Σ, определяемые неравенствами $\Sigma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Sigma,\ -\pi - \alpha < \theta < -\pi - \alpha + \delta\}$, $\Sigma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Sigma,\ -\pi - \alpha + \delta < \theta < \alpha - \delta\}$, $\Sigma_3 = \{(x_1, x_2) \in \Sigma,\ \alpha - \delta < \theta < \alpha\}$ (см. рис. 2); $\delta \in (0, \pi/2 + \alpha)$ — постоянная.

Неравенство (4.9) означает, что абсолютная величина касательной скорости жидкости на участках твердой стенки, примыкающих к свободной границе, не превосходит скорости самой стенки. Оно отражает умозрительное представление о тормозящей роли свободной границы и силы тяжести в изучаемом течении, которое порождено вращением контейнера. (В противоположность сказанному в задаче о заполнении капилляра торможение жидкости происходит именно на его стенках. Поэтому соответствующее неравенство (3.2), переписанное в терминах $|v_1|$, будет иметь иной по сравнению с (4.9) знак.)

Для замыкания постановки задачи присоединим к (4.4)—(4.9) еще два соотношения:

$$\partial v_\theta/\partial r - v_\theta \leqslant 0 \quad \text{на } \Sigma_1 \cup \Sigma_3; \tag{4.10}$$

$$(v_\theta - 1)(\partial v_\theta/\partial r - v_\theta) = 0 \quad \text{на } \Sigma_1 \cup \Sigma_3. \tag{4.11}$$

Вследствие (4.8) величина, стоящая в левой части (4.10), равна безразмерному касательному напряжению $2D_{r\theta}$ на стенке $r = 1$. Если жидкость заполняет горизонтальный контейнер целиком (т. е. если Γ пусто) и на стенке выполнено условие прилипания, то единственным режимом стационарного течения жидкости является ее вращение как твердого тела: $v_r = 0$, $v_\theta = r$, так что $D(\mathbf{v}) = 0$. При наличии свободной границы происходит замедление вращения жидкости относительно контейнера, что приводит к ненулевому (более того, неположительному) напряжению трения на стенке. Это обстоятельство и выражается неравенством (4.10). Равенство (4.11) можно записать как $(v_\theta - 1)D_{r\theta} = 0$ при $-\pi - \alpha < \theta < -\pi - \alpha + \delta$ и $\alpha - \delta < \theta < \alpha$. Тем самым оно означает, что на частях Σ_1 и Σ_3 границы полости выполняется либо условие прилипания, либо условие идеального проскальзывания.

Вторым из равенств (4.7) предписываем выполнение условия прилипания на части Σ_2 границы области Ω. Нетрудно видеть, что если Σ_2

пусто (это соответствует значению $\delta = \pi/2 + \alpha$), то задача (4.4)—(4.11) имеет тривиальное решение $\mathbf{v} = 0$, $p = \text{const}$. Напротив, если пусты множества Σ_1 и Σ_2 (т. е. если $\delta = 0$), то указанная задача не имеет решения в классе с конечным интегралом Дирихле. Эти соображения делают оправданным введение в задачу о вращающемся контейнере параметра δ. Вопрос о его определении (δ интуитивно представляется весьма малым) лежит за пределами феноменологического описания рассматриваемого течения (обсуждение вопроса см. в [3, 14, 17]).

5. Разрешимость задачи (4.4)—(4.11). В отличие от рассмотренной в п. 3 задача (4.4)—(4.11) при $\mathrm{Re} > 0$ уже не может быть сведена к задаче минимизации какого-либо функционала. Оказывается, однако, что она допускает обобщенную постановку в виде вариационного неравенства. Предварительно введем ряд определений.

Для гладких в $\bar{\Omega}$ вектор-функций φ, ψ и χ определим выражения

$$a(\varphi, \psi) = \int_\Omega D\varphi : D\psi \, dx; \tag{5.1}$$

$$b(\varphi, \chi, \psi) = \int_\Omega \varphi \cdot \nabla\chi \cdot \psi \, dx. \tag{5.2}$$

Билинейная $a(\varphi, \psi)$ и трилинейная $b(\varphi, \chi, \psi)$ формы определены и в том случае, если элементы векторов φ, ψ, χ принадлежат пространству Соболева $H^1(\Omega)$ (для формы (5.2) это следует из вложения $H^1(\Omega)$ в $L^4(\Omega)$). Определим пространство $\mathbf{H}^1(\Omega)$ как замыкание по норме $\|\varphi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = [a(\varphi, \varphi)]^{1/2}$ множества соленоидальных гладких в $\bar{\Omega}$ вектор-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ на } \Gamma, \quad \varphi_r = 0 \ \text{ на } \Sigma_1 \cup \Sigma_3; \tag{5.3}$$

$$\varphi = 0 \ \text{ на } \Sigma_2. \tag{5.4}$$

Пространство $\mathbf{H}^1(\Omega)$ является гильбертовым; форма (5.1) задает в нем скалярное произведение элементов φ и ψ.

Функции из класса $\mathbf{H}^1(\Omega)$ подчиняются неравенству Корна

$$\int_\Omega \nabla\varphi : \nabla\psi \, dx \leqslant C_3 \|\varphi\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

и неравенству Пуанкаре — Фридрихса

$$\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx \leqslant C_4 \|\varphi\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

(C_3 и C_4 — положительные постоянные). Форма $b(\varphi, \chi, \psi)$ обладает важными свойствами:

$$b(\varphi, \psi, \psi) = 0; \tag{5.5}$$

$$b(\varphi, \chi, \psi) = -b(\varphi, \psi, \chi) \tag{5.6}$$

для любых φ, ψ и χ из $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Равенство (5.5) вытекает из представления $b(\varphi, \psi, \psi) = \int_\Omega \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\psi|^2 \varphi\right) dx$ и условий (5.3), (5.4). Для доказательства (5.6) достаточно вычесть из $b(\varphi, \psi + \chi, \psi + \chi) = 0$ равенство (5.5).

Для дальнейшего построим соленоидальное векторное поле $\mathbf{w}(x)$ такое, что $w_r = 0$, $w_\theta = 1$ на Σ_2. Конструкция поля содержит произвол, которым и воспользуемся. Именно, положим

$$w_r = -\frac{r^2 - 1}{2r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}, \quad w_\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [(r^2 - 1)\zeta], \tag{5.7}$$

где ζ — срезающая функция Хопфа, удовлетворяющая условиям $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$; $\zeta = 0$ вблизи компоненты Γ границы области Ω; $\zeta = 1$ на Σ_2; для любого $\mathrm{Re} > 0$ выполнено неравенство

$$(5.8)\qquad |b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w})| \leqslant \frac{1}{2\mathrm{Re}} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

независимо от $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Способ построения функции ζ с указанными свойствами изложен в [9].

Обозначим через $\eta(\theta)$ след функции ζ на дуге Σ окружности $r = 1$. Ясно, что $\eta \in C_0^\infty[-\pi - \alpha, \alpha]$ и $\eta = 1$ для $\theta \in [-\pi - \alpha + \delta, \alpha - \delta]$. Через K обозначим множество $K = \{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)\colon \varphi_\theta \leqslant 1 - \eta(\theta)$ на $\Sigma_1 \cup \Sigma_3\}$, оно замкнуто и выпукло в $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Введем новую искомую вектор-функцию $\mathbf{u}$ с помощью равенства

$$(5.9)\qquad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

($\mathbf{w}$ — вектор с компонентами, определенными (5.7)). Функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ будем разыскивать как решение вариационного неравенства

$$(5.10)\qquad a(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) - \mathrm{Re}[b(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w})] \leqslant L(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi})\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in K,$$

где L — линейный функционал над пространством $\mathbf{H}^1(\Omega)$, определенный соотношением

$$(5.11)\qquad L(\mathbf{u}) = -\int_\Omega (D(\mathbf{w}) : D(\mathbf{u}) - \mathrm{Re}\,\mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\,dx.$$

Вопрос о разрешимости задачи (5.10) уже не может быть решен ссылкой на известные результаты теории вариационных неравенств. Для его решения рассмотрим вспомогательную задачу

$$(5.12)\qquad a(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) - \mathrm{Re}[b(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w})] \leqslant L(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi})\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in K$$

($\boldsymbol{\psi}$ — фиксированный элемент множества K). Обозначим через $a_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})$ билинейную относительно $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$ форму:

$$a_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) - \mathrm{Re}[b(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w})].$$

Тогда задача (5.12) перепишется в виде

$$(5.13)\qquad a_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) \leqslant L(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi})\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in K.$$

Форма $a_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})$ коэрцитивна над $K - K$ при любом $\boldsymbol{\psi} \in K$. Действительно,

$$a_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) \geqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\quad \forall \mathbf{u},\ \boldsymbol{\varphi} \in K.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно воспользоваться определением (5.1) формы a, тождеством (5.5) и неравенством (5.8). По теореме Лионса — Стампаккьи [15] задача (5.13) (а вместе с ней и задача (5.12)) имеет решение, и притом единственное, $\mathbf{u} \in K$ для любого $\boldsymbol{\psi} \in K$. Тем самым определен нелинейный оператор $A\colon K \to K$, ставящий в соответствие элементу $\boldsymbol{\psi}$ решение $\mathbf{u} = A(\boldsymbol{\psi})$ задачи (5.12).

Докажем, что оператор A непрерывен. Пусть $\boldsymbol{\psi}_1$ и $\boldsymbol{\psi}_2$ — произвольные элементы K. Положим сначала в (5.12) $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \equiv A(\boldsymbol{\psi}_1)$, $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}_2 \equiv A(\boldsymbol{\psi}_2)$, а затем $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_2$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$, $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}_1$, и сложим возникающие неравенства. Учитывая (5.1), (5.5), (5.6) и тождество $b(\boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) + b(\boldsymbol{\psi}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = b(\boldsymbol{\psi}_1 - \boldsymbol{\psi}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$, получим

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} - \mathrm{Re}[b(\boldsymbol{\psi}_1 - \boldsymbol{\psi}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) + b(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{w})] \leqslant 0.$$

Отсюда с помощью (5.8) и неравенства Коши — Буняковского выводим оценку

$$\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\leqslant 2\mathrm{Re}\,\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\boldsymbol{\psi}_1-\boldsymbol{\psi}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}. \tag{5.14}$$

Так как пространство $\mathbf{H}^1(\Omega)$ вложено в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, то из (5.14) следует непрерывность оператора A.

Обозначим через K_N множество $K_N=\{\boldsymbol{\varphi}\in K:\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\leqslant N\}$ и покажем, что для достаточно большого $N>0$ справедливо включение $\mathbf{u}=A\boldsymbol{\psi}\in K_N$, если $\boldsymbol{\psi}\in K$. Положим в (5.12) $\boldsymbol{\varphi}=0$ (что возможно в силу определения множества K). Вследствие (5.5) это дает

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}-\mathrm{Re}\,b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{w})\leqslant L(\mathbf{u}).$$

Привлекая оценку (5.8) и пользуясь определением (5.11), из последнего неравенства заключаем:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\leqslant 2\left(\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}+\|\mathbf{w}\|^2_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\right)\equiv N, \tag{5.15}$$

что и требуется.

Множество K_N замкнуто и выпукло в $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Пусть $\{\boldsymbol{\psi}_m\}$, $m=1,2,\ldots$,— произвольная последовательность элементов K_N, слабо сходящаяся в $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Последовательность $\{\mathbf{u}_m\}$ соответствующих решений задачи (5.12) сходится в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ сильно. Доказательство этого факта основано на компактности оператора вложения пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, неравенстве (5.14) и априорной оценке (5.15). Из сказанного следует, что оператор A является вполне непрерывным и переводит множество K_N в себя (N определено в (5.15)). По теореме Шаудера, этот оператор имеет неподвижную точку в K_N, которой отвечает решение $\mathbf{u}$ задачи (5.10).

По функции $\mathbf{u}$ с помощью (5.9) находится $\mathbf{v}$. В силу равенств (5.3), (5.4), которым удовлетворяет $\mathbf{u}$ как элемент пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$, и определения $\mathbf{w}$ (5.7) для функции $\mathbf{v}$ выполнены условия (4.5), (4.7), (4.8). Условие (4.9) выполняется вследствие (5.7), (5.9) и определения множества K. Исходя из вариационного неравенства (5.10) и действуя по аналогии с п. **3**, нетрудно показать, что функция $\mathbf{v}$ является обобщенным решением системы (4.4) и удовлетворяет условию (4.6). Предположим теперь дополнительно, что $\mathbf{v}\in\mathbf{C}^0(\Omega)$. Тогда, в соответствии с рассуждениями п. **3**, для функции v_θ устанавливается справедливость соотношений (4.10), (4.11).

Резюмируем сказанное выше. Задача (5.10) имеет решение $\mathbf{u}$ при любом значении $\mathrm{Re}\geqslant 0$. Функция $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$ удовлетворяет соотношениям (4.4)—(4.9) и, при дополнительном предположении о ее непрерывности в области $\bar{\Omega}$, условиям (4.10), (4.11).

6. Заключительные замечания. А. По схеме, изложенной в п. **3**, исследуется осесимметричная модельная задача о заполнении капилляра. Она сводится к вариационному неравенству типа (3.10) для осесимметричных векторных полей.

Б. Задача о вращающемся контейнере допускает обобщение на случай, когда динамический краевой угол имеет различные значения в точках, где жидкость натекает на стенку и оттекает от нее. Такое явление, называемое гистерезисом краевого угла, отмечено в ряде экспериментов, обсуждаемых в [17]. Изменения в постановке задачи (4.4)—(4.11) связаны лишь с новым определением области Ω и компонент ее границы Σ_1, Σ_2, Σ_3 и Γ.

В. В п. 5 было доказано существование решения вариационного неравенства (5.10). Можно показать, что при достаточно малых Re это решение единственно.

Г. Мы не рассматривали здесь вопрос о разрешимости задач с движущимися точками контакта в точной постановке — как задач с неизвестной свободной границей. Можно надеяться на эффективность применения вариационных неравенств к таким задачам, по крайней мере при малых Ca. Однако для этого сначала необходимо исследовать вопрос о гладкости решения задач (3.10) и (5.10). Отметим, что в [18] доказана разрешимость задачи с неизвестной границей типа (1.1)—(1.7), в которой на стенках капилляра условие прилипания заменено условием пропорциональности касательного напряжения разности касательных скоростей жидкости и стенки.

Д. Вопрос о структуре множества соприкосновения в решениях задач (3.10) и (5.10) также остается открытым. Тем не менее определенную информацию о поведении решения в окрестности точек смены условий прилипания и проскальзывания можно получить на основе локального анализа. Рассмотрим для определенности задачу о заполнении капилляра. Пусть одна из упомянутых точек имеет координаты $x_1 = -\delta < 0$, $x_2 = 1$, причем для достаточно малых $|x_1 + \delta|$, $x_1 > -\delta$ выполнены условия идеального проскальзывания (2.8), (2.9), а для $x_1 < -\delta$ — условия прилипания (2.10). (Случай противоположного знака неравенств исследуется аналогично.) Введем полярные координаты $r = [(x_1 + \delta)^2 + (x_2 - 1)^2]^{1/2}$, $\theta = \operatorname{arctg}[(x_2 - 1)/(x_1 + \delta)]$ и обозначим v_r, v_θ соответствующие проекции вектора скорости $\mathbf{v}$. Определим функцию тока $\psi(r, \theta)$ соотношениями $v_r = r^{-1}\partial\psi/\partial\theta$, $v_\theta = -\partial\psi/\partial r$. На основании (2.1), (2.8)—(2.10) функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\psi = 0 \text{ при } r < \varepsilon, \ -\pi < \theta < 0 \tag{6.1}$$

($\varepsilon \in (0, \delta)$ — некоторая постоянная) и краевым условиям

$$\psi = 0, \ \Delta\psi = 0 \text{ при } \theta = 0, \ 0 < r < \varepsilon; \tag{6.2}$$

$$\psi = 0, \ \partial\psi/\partial\theta = r \text{ при } \theta = -\pi, \ 0 < r \leqslant \varepsilon. \tag{6.3}$$

Дополнительно потребуем принадлежности функции ψ пространству Соболева H^2 в полукруге $S_\varepsilon = \{r, \theta\colon r < \varepsilon, -\pi < \theta < 0\}$, что гарантирует конечность интеграла Дирихле для вектора $\mathbf{v}$ в области S_ε.

Асимптотика при $r \to 0$ решения $\psi \in H^2(S_\varepsilon)$ уравнения (6.1), удовлетворяющего условиям (6.2), (6.3), исследуется с помощью методики, развитой в [19, 20]. Опуская детали, приведем результат исследования:

$$\psi = -r \sin\theta + kr^{3/2}(\sin\theta/2 + \sin 3\theta/2) + O(r^2 \ln r) \tag{6.4}$$

при $r \to 0$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant 0$ (k — некоторая постоянная). Асимптотические представления для $\partial\psi/\partial r$, $\partial\psi/\partial\theta$, $\Delta\psi$ получаются из (6.4) путем формального дифференцирования. В частности, для $\Delta\psi$ имеем

$$\Delta\psi = 2kr^{-1/2}\sin\theta/2 + O(\ln r). \tag{6.5}$$

Теперь заметим, что в силу условия $\psi = 0$ на отрезке $0 < r \leqslant \varepsilon$, $\theta = -\pi$ выполнено равенство $\partial v_1/\partial x_2 = \Delta\psi$ (v_1 — проекция вектора $\mathbf{v}$ на ось x_1). Данное равенство вместе с (6.5) и (3.14) приводит к выводу, что $k \geqslant 0$. С другой стороны, ввиду (6.4), при $r \to 0$ и $\theta = 0$ будет $v_1 = -1 + 2kr^{1/2} + O(r \ln r)$. Это представление согласуется с неравенством (3.2) лишь при $k \leqslant 0$. Следовательно, $k = 0$. Сказанное позволяет предположить, что решение вариационного неравенства (3.10) обладает большей регулярностью вблизи точек смены условий прилипания и проскальзывания, чем решение задачи (2.1)—(2.10), в которой положение этих точек предписано заранее.

Примечание при корректуре. Как сообщил одному из авторов В. А. Кондратьев, остаточные члены в формулах (6.4), (6.5) могут быть заменены на $O(r^2)$ и $O(1)$ соответственно. Отсюда следует, что касательное напряжение ограничено вблизи точек смены условий прилипания и проскальзывания. Выражаем признательность В. А. Кондратьеву за предоставленную информацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dussan V. E. B., Davis S. H.** On the motion fluid—fluid interface along a solid surface // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 65, pt 1.
2. **Пухначев В. В., Солонников В. А.** К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 6.
3. **Dussan V.E. B.** On the spreading of liquids an solid surfaces: Static and dynamics contact lines // Annual Rev. Fluid Mech.— Palo Alto, Calif., 1979.— V. 11.
4. **Dussan V. E. B.** The moving contact line: the slip boundary condition // J. Fluid Mech.— 1976.— V. 77, pt 4.
5. **Hocking L. M.** A moving fluid interface. Pt 2. The removal of the singularity by a slip flow // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 79, pt 2.
6. **Богоряд И. Б.** Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью.— Томск: Изд-во ТГУ, 1980.
7. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1976.— № 5.
8. **Солонников В. А.** Разрешимость задачи о плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей некоторый сосуд // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1979.— Т. 43, № 1.
9. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.
10. **Pukhnachov V. V.** Thermocapillary convection under low gravity // Fluid Dynam. Trans.— Warszawa, 1989.— V. 14.
11. **Horgan C. O.** Plane entry flows and energy estimates for the Navier—Stokes equations // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1978.— V. 68, N 4.
12. **Пухначев В. В.** Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье—Стокса // ПМТФ.— 1972.— № 3.
13. **Солонников В. А., Щадилов В. Е.** Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье—Стокса // Краевые задачи математической физики.— Л.: Наука, 1973.
14. **Huh C., Mason S. G.** Effects of surface roughness on wetting (theoretical) // J. Colloid Interface Sci.— 1977.— V. 60, N 1.
15. **Байокки К., Капело А.** Вариационные и квазивариационные неравенства.— М.: Наука, 1988.
16. **Гидромеханика** невесомости/Под ред. А. Д. Мышкиса.— М.: Наука, 1976.
17. **Де Женн П. Ж.** Смачивание: статика и динамика // Успехи физ. наук.— 1987.— Т. 151, вып. 4.
18. **Kröner D.** Asymptotische Entwicklungen für Strömungen von Flüssigkeiten mit freiem Rand und dynamischem Kontaktwinkel.— Bonn, 1986.— (Prepr./Univ. Bonn; N 809).
19. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. о-ва.— М.: Изд-во МГУ, 1967.— Т. 16.
20. **Кондратьев В. А.** Асимптотика решения уравнений Навье—Стокса в окрестности угловой точки границы // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 1.

г. Павия, Италия,
г. Новосибирск, СССР

Поступила 8/VI 1989 г.

УДК 532.59

А. А. Коробкин

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ — ПУАССОНА ДЛЯ БАССЕЙНА С НЕРОВНЫМ ДНОМ

1. Рассматривается плоская линейная начально-краевая задача

$$\Delta U = 0 \ (H(x) < y < 0), \ U_{tt} + U_y = 0 \ (y = 0), \tag{1.1}$$
$$U_y = H_x U_x \ (y = H(x)), \ U = 0, \ U_t = -\delta(x - x_0) \ (t = 0, \ y = 0),$$

которая описывает движение жидкости, вызванное начальным возмущением свободной границы. В момент времени $t = 0$ поверхность жидкости имеет концентрированное возвышение площади, равной единице, в окрестности точки x_0, при $t > 0$ это возвышение распадается под действием сил тяжести. Соотношения (1.1) записаны в безразмерных переменных, причем масштабы длины и скорости выбираются такими, что число Фруда