

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ГИДРОДИНАМИКИ РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕД

И. П. Стаханов, Е. В. Ступоченко

(Москва)

Рассматриваются некоторые общие свойства уравнений движения термодинамически неравновесных сред и переход к «равновесной» гидродинамике в предельном случае малых времен релаксации. В линейном приближении рассмотрены также некоторые вопросы распространения малых возмущений в релаксирующих средах.

При любом движении жидкости или газа, исключая некоторые специальные случаи вроде равномерного поступательного движения системы в целом, возникают нарушения статистически равновесного состояния среды. Если градиенты гидродинамических величин не слишком велики, равновесная функция распределения возмущается ничтожно мало, однако, с молекулярно-кинетической точки зрения эти малые возмущения являются основой всех диссипативных процессов в движущихся газах. Введение в обычные уравнения гидродинамики членов с коэффициентами вязкости, теплопроводности, диффузии и т. п. является способом учета указанных небольших нарушений статистического равновесия; при этом термодинамические параметры среды принимаются равными их значениям в состоянии полного термодинамического равновесия (локального).

Однако, в ряде случаев такой учет статистической неравновесности оказывается недостаточным. Время τ установления локального статистического равновесия в зависимости от природы процесса меняется в широких пределах. Оно порядка времени свободного пробега для установления максвелловского распределения скоростей в газе и несколько больше для вращательных движений молекул. Столь быстрые процессы находятся вне рамок применимости гидродинамических уравнений. Пространственные области с существенным нарушением статистического равновесия этого рода описываются в гидродинамике математическими поверхностями разрыва. Однако для молекулярных колебаний время релаксации τ имеет порядок тысяч и десятков тысяч времен свободного пробега. Сильно затруднен обмен кинетической энергией поступательного движения между частицами с очень различной массой — электронами и ионами. Наконец, значительное время требуется для установления химического или ионизационного равновесия.

Если характерное макроскопическое время сравнимо по порядку величины с временем релаксации τ для какого-либо из протекающих в среде процессов, то термодинамические параметры могут существенно отличаться от их равновесных значений и система уравнений гидродинамики должна быть дополнена кинетическим уравнением, описывающим процесс релаксации. Такие условия встречаются в сверхзвуковых потоках, например, в зоне непосредственно за фронтом ударной волны, резко нарушающей состояние термодинамического равновесия [1]. Другим хорошо известным примером движения, в котором необходим явный учет релаксационных процессов, является распространение звука достаточно большой частоты.

Получению замкнутой системы уравнений гидродинамики и кинетики для различных процессов посвящены, например, работы [2,3].

Ниже рассматриваются некоторые общие свойства системы уравнений «релаксационной гидродинамики», а также возможность предельного перехода к обычной «равновесной» — гидродинамике при малых τ .

Последнее представляет интерес в связи с тем, что некоторые важные свойства уравнений релаксационной гидродинамики при стремлении τ к нулю не переходят в свойства уравнений равновесной гидродинамики. Например характеристики уравнений нестационарного одномерного движения без вязкости и теплопроводности [3] не зависят от величины времени τ и не совпадают с характеристиками равновесной гидродинамики.

Как будет показано ниже, трудность устраняется, если принять, что уравнения равновесной гидродинамики по существу являются приближенным описанием лишь специального класса решений уравнений релаксационной гидродинамики. Эти решения характеризуются тем, что локальная неравновесность в каждый данный момент вполне определяется полями гидродинамических величин независимо от предыстории

среды. При этом из релаксационной гидродинамики выпадают кинетические уравнения, описывающие изменение со временем параметров, характеризующих термодинамическую неравновесность среды.

Исследовано также распространение малых возмущений в релаксирующих средах. Показано, что в области порядка «релаксационной длины» l они распространяются вдоль характеристик уравнений релаксационной гидродинамики; поэтому вблизи препятствий возникают слабые разрывы, направление которых не совпадает с обычно наблюдаемыми линиями Маха и которые экспоненциально исчезают на расстояниях больших по сравнению с l . На больших расстояниях распространение возмущений определяется равновесной скоростью звука. Однако в отличие от равновесной гидродинамики это возмущение складывается из возмущений, приходящих из разных точек; при этом по мере распространения форма возмущения меняется так, что «мелкие детали» постепенно исчезают.

§ 1. Уравнения релаксационной гидродинамики. Принимаем, что возникающие неравновесные состояния являются состояниями неполного статистического равновесия, допускающими термодинамическое описание. В качестве характеристической функции, определяющей термодинамические свойства среды, выбираем внутреннюю энергию единицы массы $\varepsilon(\rho, s, \xi)$, рассматриваемую как функцию плотности ρ , удельной энтропии s и дополнительного параметра ξ (или нескольких таких параметров) [4, 5], характеризующего отклонение от полного термодинамического равновесия. Физический смысл параметров ξ может быть весьма различным. Это может быть например, температура внутренних степеней свободы или концентрация реагирующей компоненты. При описании химической реакции особенно удобно ввести параметр ξ при помощи уравнения [2]

$$dm_i = \sum_k \nu_{ik} d\xi_k$$

Здесь dm_i — изменение массы компоненты i в результате реакции k , при этом ν_{ik} — соответствующий стехиометрический коэффициент. Реальные системы, как правило, характеризуются несколькими параметрами ξ , так как в системе могут одновременно протекать несколько реакций, и, кроме того, могут отличаться как температуры различных компонент, так и температуры их внутренних (например колебательных) степеней свободы. Ограничимся рассмотрением простейшего однопараметрического процесса релаксации, на примере которого, однако, можно исследовать характерные особенности релаксационной гидродинамики.

В состоянии равновесия ξ принимает значение $\xi_0(\rho, s)$, определяемое уравнением

$$\varepsilon_\xi(\rho, s, \xi_0) = 0, \quad \varepsilon_\xi \equiv \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right]_{\rho, s} \quad (1.1)$$

Уравнения непрерывности, импульса и энергии имеют обычный вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= - \operatorname{grad} p + \nabla \cdot \Pi \quad \left(p = \rho^2 \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right]_{s, \xi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) &= - \operatorname{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \omega \right) - (\Pi \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{q} \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость среды, p — давление, ω — удельная энтальпия, \mathbf{q} — вектор плотности теплового потока, Π — тензор с компонентами π_{ik} , определяемый из соотношения

$$P_{ik} = - p \delta_{ik} + \pi_{ik} \quad (1.3)$$

где P_{ik} — тензор напряжений. Из дальнейшего вытекает, что Π , вообще, может и не совпадать с тензором вязких напряжений. Из (1.2) вытекает также следующая форма уравнения энергии:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\pi_{ik}}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \left(\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \quad (1.4)$$

Отсюда и из общего термодинамического выражения

$$d\varepsilon = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + Tds + \varepsilon_\xi d\xi \quad \left(T = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_{\xi, \rho} \right) \quad (1.5)$$

где T — температура среды, получаем

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\rho T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho T} \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\varepsilon_\xi}{T} \frac{d\xi}{dt} \quad (1.6)$$

В общем случае параметр ξ в данной точке среды может меняться как за счет скалярного потока r , так и за счет векторного потока \mathbf{j} . В дальнейшем физический смысл параметра ξ не конкретизируется, поэтому физический смысл потоков r и \mathbf{j} можно не затрагивать.

В частном случае, когда ξ определяет состав газа, диссоциирующего по уравнению $2A \rightleftharpoons A_2$, поток r будет скоростью диссоциации, а \mathbf{j} — диффузионным потоком.

Определяя подходящим образом r и \mathbf{j} , всегда можно уравнение для скорости изменения ξ записать в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} = r - \operatorname{div} \mathbf{j} \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.6), получаем уравнение баланса энтропии

$$\rho \frac{ds}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} - \frac{\varepsilon_\xi j_i}{T} \right) = \sigma \quad (1.8)$$

$$T\sigma = -q_i \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - r\varepsilon_\xi - j_i T \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varepsilon_\xi}{T} \quad (1.9)$$

Легко видеть, что

$$\frac{d(\rho s)}{dt} = -\operatorname{div} (\mathbf{j}_s + \rho s \mathbf{v}) + \sigma, \quad \mathbf{j}_s = \frac{\mathbf{q} - \varepsilon_\xi \mathbf{j}}{T} \quad (1.10)$$

Вектор \mathbf{j}_s есть вектор плотности потока энтропии, точнее та часть плотности потока энтропии, которая не связана с макроскопическим движением среды; полная плотность потока энтропии равна $\mathbf{j}_s + \rho s \mathbf{v}$.

Правая часть (1.8) представляет собой возникновение энтропии σ , т. е. скорость изменения энтропии единицы объема вследствие протекающих в нем необратимых процессов: теплопроводности, внутреннего трения и процессов, описываемых потоками r и \mathbf{j} (в частном случае ими могут быть химическая реакция и диффузия).

Потоками I и силами X в смысле термодинамики необратимых процессов здесь будут q_i , π_{ik} , r , j_i и соответственно

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad -\varepsilon_\xi, \quad -T \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varepsilon_\xi}{T}$$

удовлетворяющие соотношению

$$\sigma = \frac{1}{T} \sum IX \quad (1.11)$$

Предполагая линейную зависимость потоков от сил, для изотропной среды можем написать

$$\begin{aligned} q_i &= -A \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} - BT \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varepsilon_\xi}{T} \\ \pi_{ik} &= \eta \left\{ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right\} + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} - M \delta_{ik} \varepsilon_\xi \\ r &= -K' \varepsilon_\xi + L \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad j_i = -C \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} - DT \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varepsilon_\xi}{T} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь A, B, C, D, K', L, M — кинетические коэффициенты, являющиеся, вообще говоря, функциями состояния; η и ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости.

При составлении уравнений (1.12) учтены требования теоремы Кюри. Например, в выражениях для \mathbf{q} и \mathbf{j} не могут входить линейно тензорная $\partial v_i / \partial x_k$ и скалярная ε_ξ силы, так как в обоих этих случаях потребовался бы векторный кинетический коэффициент, что исключается для изотропной среды. По тем же основаниям в выражения для π_{ik} и r не входят векторные силы.

В силу принципа симметрии кинетических коэффициентов

$$B = C, \quad L = -M \quad (1.13)$$

Как видим, в выражении для π_{ik} появляется член, пропорциональный ε_ξ и несвязанный непосредственно с деформацией поля скоростей. Таким образом, полный тензор напряжений в релаксирующей среде составляется из трех частей: 1) «термодинамического» давления (со знаком минус) $p \delta_{ik} = -\rho^2 \varepsilon_\rho \delta_{ik}$, 2) вязких напряжений и 3) члена $M \delta_{ik} \varepsilon_\xi$. Согласно (1.13) в выражении для скалярного потока r появляется член $L \partial v_l / \partial x_l$.

Отметим, что в литературе нет должной ясности в вопросе об указанных членах. Например, в работе [6] утверждается, что скорость химической реакции не зависит от скалярной комбинации сил вязкости $\partial v_i / \partial x_i$, так как гидростатическое давление не зависит от протекания химической реакции. Как видно из приведенного вывода уравнений (1.12), (1.13), в рамках общих феноменологических соображений эти утверждения не будут обоснованными. В феноменологической теории остается открытым вопрос о величине указанных эффектов. Их оценка возможна в молекулярно-кинетической теории.

Первые два уравнения (1.2), уравнения (1.7), (1.8) вместе с (1.12), (1.13) образуют замкнутую систему уравнений релаксационной гидродинамики. Здесь в качестве независимых переменных, определяющих термодинамическое состояние среды, приняты ρ, s и ξ . Остальные термодинамические величины определяются из характеристической функции $\varepsilon(\rho, s, \xi)$, например $T = (\partial \varepsilon / \partial s)_{\rho, \xi}$.

В том случае, когда можно пренебречь вязкостью, теплопроводностью и потоком \mathbf{j} , система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{grad} p &= 0 \\ \rho \frac{ds}{dt} &= K' \frac{\varepsilon_\xi^2}{T}, & \rho \frac{d\xi}{dt} &= -K' \varepsilon_\xi \end{aligned} \quad (1.14)$$

В этих условиях $L = M = 0$, что вытекает, как легко убедиться, из условия

$$\sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k \geq 0 \quad (1.15)$$

Из уравнений (1.14) устанавливается связь коэффициента K' со временем релаксации τ малых отклонений от локального термодинамического равновесия. Ограничиваясь в разложении правой части последнего из уравнений (1.14) по степеням $(\xi - \xi_0)$ линейными членами и учитывая, что изменения энтропии на основании (1.14) будут величиной второго порядка малости, получаем

$$\tau = \frac{1}{K \varepsilon_{\xi\xi}}, \quad K = \frac{K'}{\rho} \quad (1.16)$$

§ 2. Некоторые свойства уравнений релаксационной гидродинамики. Вычисляя ротор правой и левой части второго из уравнений (1.2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{R} \times \mathbf{v}) &= \frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho + \frac{1}{\rho} \text{rot} \mathbf{P} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \mathbf{P} \\ \mathbf{R} &= \text{rot} \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \nabla \cdot \Pi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если пренебречь силами вязкости и считать, что гидростатическое давление зависит только от плотности, то (2.1) переходит в известное уравнение для идеальной жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{R} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (2.2)$$

из которого следует сохранение циркуляции. При наличии релаксационных процессов: $p = p(\rho, s, \xi)$ и таким образом циркуляция не сохраняется даже в отсутствие вязких напряжений ($\mathbf{P} = 0$).

Рассмотрим малые отклонения от состояния равновесия. Удерживая в (2.1) только члены первого порядка малости, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{R}'}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \mathbf{R}' \quad (\mathbf{R}' = \text{rot} \mathbf{v}')$$

где \mathbf{v}' — возмущения скорости, ρ_0 и η — невозмущенные значения плотности и сдвиговой вязкости.

Это уравнение не содержит источников и так как возмущения малы всюду, течение в этом приближении оказывается безвихревым. Сохраняя в (2.1) члены второго порядка малости, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{R}''}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \text{rot} \mathbf{P}'' + \frac{p_{\xi}}{\rho_0} \nabla \rho' \times \nabla \xi' - \frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho' \times \mathbf{P}' \quad (2.3)$$

В последнем уравнении штрихом обозначены величины первого порядка малости, а двумя штрихами — второго порядка малости. Так как изменения энтропии второго порядка малости, можно принять, что

$$\nabla p' = p_{\rho} \nabla \rho' + p_{\xi} \nabla \xi', \quad p_{\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, \xi}, \quad p_{\xi} = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{s, \rho} \quad (2.4)$$

Вследствие безвихревого характера течения в первом приближении

$$\Delta \mathbf{v}' = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}') \quad (2.5)$$

Поэтому, полагая в (1.12) $M = 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \eta \Delta \mathbf{v}' + \frac{1}{3} \eta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}') + \zeta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}') = \\ &= \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}') = - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{1}{\rho_0} \nabla \frac{\partial \rho'}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

При вычислении \mathbf{P}'' будем считать для простоты коэффициенты вязкости η и ζ постоянными и равными их значениям в невозмущенной среде.

Тогда

$$\mathbf{P}'' = \eta \Delta \mathbf{v}'' + \left(\frac{4\eta}{3} + \zeta \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}'') \quad (2.7)$$

Таким образом,

$$\operatorname{rot} \mathbf{P}'' = \eta \Delta \mathbf{R}'' \quad (2.8)$$

Используя (2.8) и (2.7), запишем (2.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{R}''}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \mathbf{R}'' = \frac{p_\xi}{\rho_0^2} \nabla \rho' \times \nabla \xi' + \frac{4/3\eta + \xi}{\rho_0^3} \nabla \rho' \times \nabla \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (2.9)$$

Известно, что в идеальной жидкости возмущения ротора скорости не перемещаются относительно жидкости (отсутствие поперечных волн).

Это легко видеть, если переписать (2.2) в следующем виде

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Для чисто вихревого поля скорости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $d\mathbf{R}'/dt = -(\mathbf{R}\nabla) \mathbf{v}$. Отсюда следует, что возмущения ротора скорости \mathbf{R} «вморожены» в жидкость. Наличие сдвиговой вязкости приводит к перемещению возмущений ротора относительно жидкости, но этот процесс аналогичен диффузии, а не распространению волн. Правая часть (2.9) определяет скорость возникновения вихря в данной точке вследствие релаксационных процессов и вязкости. Таким образом, релаксационные процессы, как и объемная вязкость, приводят к возникновению вихря, но не могут вызвать диффузию возникающего вихря через жидкость.

Рассмотрим уравнения, определяющие распространение продольных волн в релаксирующей среде. Как уже отмечалось, в отсутствие вязкости и теплопроводности уравнения релаксационной гидродинамики могут быть записаны в виде (1.14).

Рассматривая малые отклонения от состояния равновесия и ограничиваясь членами первого порядка малости, получим

$$K \varepsilon_\xi = K \varepsilon_{\xi\xi} \xi' + K \varepsilon_{\xi\rho} \rho', \quad \varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2}, \quad \varepsilon_{\xi\rho} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi \partial \rho} \quad (2.10)$$

Принимая во внимание (2.4) и (2.10), запишем уравнения (1.14) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0, & \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + c_\infty^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + p_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} \left(-\frac{\varepsilon_{\xi\rho}}{\varepsilon_{\xi\xi}} \rho - \xi \right) & \left(\frac{1}{\tau} = K \varepsilon_{\xi\xi}, \quad c_\infty^2 = p_\rho \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь c_∞ — скорость распространения звуковых колебаний с частотой $\omega \gg 1/\tau$. Штрихи у величин первого порядка малости (v , ξ , ρ) опущены.

Формальное решение последнего уравнения (2.11) представим в виде

$$\xi = -\frac{\varepsilon_{\xi\rho}}{\varepsilon_{\xi\xi}} \Lambda^{-1} \rho \quad \left(\Lambda = 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.12)$$

Здесь Λ^{-1} — оператор, обратный оператору Λ . Исключая ξ при помощи (2.12) из второго уравнения (2.11) и принимая во внимание, что операторы Λ и Λ^{-1} коммутируют с $\partial/\partial x_i$, получим

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + c_\infty^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - p_\xi \frac{\varepsilon_{\xi\rho}}{\varepsilon_{\xi\xi}} \Lambda^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

Дифференцируя первое из (2.11) по x и (2.13) по t , можно исключить из (2.13) ρ

$$\Lambda \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + c_\infty^2 \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} \right\} + p_\xi \frac{\varepsilon_{\xi\rho}}{\varepsilon_{\xi\xi}} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (2.14)$$

Как уже отмечалось, в рассматриваемом приближении движение можно считать безвихревым, поэтому

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = \Delta v_i \quad (2.15)$$

Равновесная скорость звука c_0 связана с c_∞ соотношением [4]:

$$c_0^2 = c_\infty^2 - p_\xi \frac{\varepsilon_\xi \rho}{\varepsilon_{\xi\xi}} \quad (2.16)$$

Используя (2.15) и (2.16), перепишем (2.14) следующим образом:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - c_\infty^2 \Delta v_i \right\} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta v_i = 0 \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) описывает распространение продольных возмущений в релаксирующей среде. При $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$ оно переходит в обычные волновые уравнения акустики, в которых роль скорости звука играют соответственно c_0 и c_∞ . Это уравнение было получено и проанализировано в работах [5,7].

Представляет интерес рассмотреть характеристики и характеристическую форму уравнений (1.14). Если возмущения не предполагаются малыми, то

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = c_\infty^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + p_s \frac{\partial s}{\partial x_i} + p_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \quad \rho_s = \frac{\partial \rho}{\partial s} = \rho^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s \partial \rho} \quad (2.18)$$

Применяя обычные методы [8], находим, что уравнения характеристик для одномерного течения имеют следующий вид

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c_\infty, \quad \frac{dx}{dt} = v \quad (2.19)$$

Таким образом, через каждую точку в плоскости x, t проходят три характеристики, одна из которых совпадает с траекторией частицы, а две другие — с «траекториями» высокочастотных возмущений ($\omega \gg 1/l, \tau$), распространяющихся в движущейся среде. Вводя оператор

$$\frac{D_\pm}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (v \pm c_\infty) \frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{d}{dt} \pm c_\infty \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.20)$$

запишем уравнения релаксационной гидродинамики (1.14) в характеристической форме

$$c_\infty^2 \frac{D_{\pm\rho}}{Dt} \pm \rho c_\infty \frac{D_{\pm v}}{Dt} + p_s \frac{D_{\pm s}}{Dt} + p_\xi \frac{D_{\pm \xi}}{Dt} = \pm K \varepsilon_\xi \left(\frac{\varepsilon_\xi p_s}{T} - p_\xi \right) \\ \frac{d\rho}{dt} = \frac{K}{T} \varepsilon_\xi^2, \quad \frac{d\xi}{dt} = -K \varepsilon_\xi \quad (2.21)$$

§ 3. Переход к равновесной гидродинамике. В уравнения (2.19) не входит τ . Поэтому характеристики релаксационной гидродинамики не меняются при стремлении τ к нулю и не переходят в характеристики равновесной гидродинамики, определяемые скоростью c_0 . В связи с этим переход к равновесной гидродинамике, достаточно хорошо описывающей движения среды при малых τ , требует специального рассмотрения.

Введем параметр $\mu = c\tau/L$, где c — скорость звука (c_0 или c_∞), L — характерная макроскопическая длина (расстояние, на котором гидродинамические величины существенно меняются), и полагая $\mu \ll 1$, будем рассматривать решения системы (1.14) вида $y(\mu r, t; \mu)$, где y — какая-либо из величин ρ, v и т. д. Таким образом, рассматриваем течения, в которых пространственные градиенты n -го порядка являются величинами n -го порядка малости.

Разлагая y в степенной ряд по μ

$$y = y(\mu r, t; \mu) = y^{\circ}(\mu r, t) + \mu y'(\mu r, t) + \dots \quad (3.1)$$

получаем из (1.14), что

$$\frac{d\rho^{\circ}}{dt} = 0, \quad \frac{dv^{\circ}}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi^{\circ}}{dt} = -K\xi^{\circ} \quad (3.2)$$

Последнее уравнение описывает процесс релаксации с характерным временем τ . Изменения поля плотности, скорости и т. д. получаются во втором приближении, которое оказывается расходящимся со временем. Поэтому разложение (3.1) пригодно для описания движения лишь в течение достаточно малых промежутков времени. Характеристики получаемых таким путем уравнений определяются скоростью c_{∞} . Следовательно, при помощи разложения (3.1) нельзя прийти к уравнениям равновесной гидродинамики. Возникающие здесь трудности можно связать с тем обстоятельством, что малый параметр (τ) является множителем при высших производных (см., например, уравнение (2.17)).

Для того чтобы перейти к уравнениям равновесной гидродинамики, будем рассматривать течение, начиная с того момента, когда процесс релаксации в нулевом приближении, описываемый уравнением (3.2), практически завершен и в каждый позднейший момент времени отклонения параметра ξ от равновесного значения определяются полями ρ , s , v . В этих условиях можно написать следующее разложение для ξ :

$$\xi = \xi_0(\rho, s) + \mu \xi^{(1)}(\mu r; s, \rho, v) + \mu^2 \xi^{(2)}(\mu r; \rho, s, v) + \dots \quad (3.3)$$

где $\xi^{(n)}$ — функционалы полей $\rho(\mathbf{r})$, $s(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$. Таким образом, коэффициенты разложения (3.3) зависят от времени неявно через поля ρ , s , v .

При таком предположении о характере изменения ξ со временем, очевидно, справедливы также следующие разложения для $\partial s / \partial t$ и т. д.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu N^{(1)}(\mathbf{r}; \rho, s, v) + \mu^2 N^{(2)}(\mathbf{r}; \rho, s, v) + \dots \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu V^{(1)}(\mathbf{r}; \rho, s, v) + \mu^2 V^{(2)}(\mathbf{r}; \rho, s, v) + \dots \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \mu S^{(1)}(\mathbf{r}; \rho, s, v) + \mu^2 S^{(2)}(\mathbf{r}; \rho, s, v) + \dots \quad (3.6)$$

где коэффициенты при степенях μ также являются функционалами полей $\rho(\mathbf{r})$, $s(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$. Явный вид этих коэффициентов можно получить, сравнивая (3.4) — (3.6) с выражениями для $\partial \rho / \partial t$ и т. д., получаемыми из (1.14). Например, учитывая, что для $\text{grad } \rho$ и $\text{div } v$ являются величинами порядка μ , находим из (3.4) и (1.14)

$$\mu N^{(1)} = -(\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho) - \rho \text{ div } v, \quad N^{(2)} = N^{(3)} = \dots = 0 \quad (3.7)$$

Принимая во внимание разложение для p

$$p = p_0(\rho, s) + \mu \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\xi_0} \xi^{(1)} + \dots \quad (3.8)$$

где p_0 — равновесное давление, из (3.4) и (1.14) находим

$$\mu V^{(1)} = -(\mathbf{v}, \nabla) v - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_0, \quad \mu V^{(2)} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } (p_{\xi} \xi^{(1)}) \quad \text{и т. д.} \quad (3.9)$$

Из (3.4) и (1.14) находим

$$\mu S^{(1)} = -(\mathbf{v}, \text{grad } s) \quad \text{и т. д.} \quad (3.10)$$

Оставляя в разложениях (3.4) — (3.6) члены первого порядка по μ и принимая во внимание (3.7), (3.10), получаем уравнения движения идеальной жидкости с равновесным значением давления.

Заметим, что переход к уравнениям равновесной гидродинамики при помощи разложений типа (3.3), (3.4) — (3.6) совершенно аналогичен методам, разработанным в нелинейной механике и статистической физике в связи с появлением секулярных членов в разложениях типа (3.4).

Чтобы получить уравнения движения в следующем приближении, необходимо найти $\xi^{(1)}$, входящее в (3.9).

Из (3.3) — (3.6) находим, что с точностью до μ^2

$$\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} N^{(1)} + \mu \frac{\partial \xi_0}{\partial s} S^{(1)} \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) выражения (3.7) и (3.10), получаем

$$\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \text{grad } \xi_0 - \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} \rho \text{ div } \mathbf{v} \quad (3.12)$$

С другой стороны, с тем же приближением

$$-K \varepsilon_\xi = -\mu \frac{1}{\tau} \xi^{(1)} \quad (3.13)$$

Подставляя (3.12) и (3.13) в последнее из уравнений (2.24), определяем $\xi^{(1)}$

$$\frac{\mu}{\tau} \xi^{(1)} = \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} \rho \text{ div } \mathbf{v}$$

Подставляя это значение $\xi^{(1)}$ в (3.9), получаем уравнение движения в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p_0 + \text{grad } (\zeta \text{ div } \mathbf{v}) \quad (3.14)$$

где

$$\zeta = -\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0} \tau \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} \rho \quad \text{или} \quad \zeta = \tau \rho (c_\infty^2 - c_0^2) \quad (3.15)$$

играет роль второго коэффициента вязкости.

Приведенный вывод предполагает $\mu \ll 1$. Однако он не ограничен условиями малости изменения гидродинамических величин и справедлив поэтому и вне рамок акустического приближения (сравним [1,4]).

Распространение малых возмущений в релаксирующих средах обладает рядом существенных особенностей. Вследствие дисперсии релаксирующая среда не имеет определенной скорости звука, однако ее свойства можно охарактеризовать двумя величинами с размерностью скорости: c_∞ и c_0 . Совокупность этих двух величин, как будет видно ниже, полностью определяет закон распространения малых возмущений и таким образом до некоторой степени заменяет в релаксационной гидродинамике скорость звука.

В равновесной гидродинамике малые возмущения распространяются вдоль характеристик. В релаксирующих средах это утверждение теряет силу вследствие дисперсии и таким образом характеристические направления приобретают другой смысл. Это видно уже из того, что характеристические направления уравнений релаксационной гидродинамики при всех значениях времени релаксации τ определяются скоростью c_∞ , в то время как распространение малых возмущений при достаточно малых τ , когда применима равновесная гидродинамика, должно определяться скоростью c_0 .

Для выяснения законов распространения малых возмущений в релаксирующих средах и роли характеристических направлений рассмотрим следующую задачу [7].

§ 4. Слабая ударная волна в релаксирующей среде. Пусть цилиндрическая труба закрыта с одной стороны поршнем, который при $t < 0$ покоится в точке $x = 0$, а в момент $t = 0$ приходит в движение и в дальнейшем движется с постоянной скоростью u_0 в положительном направлении оси x . Скорость движения поршня мала по сравнению с равновесной скоростью звука ($u_0 \ll c_0 < c_\infty$). Рассмотрим распространение возмущения, возникающего от движения поршня.

Уравнение, описывающее распространение малого возмущения скорости v в одном измерении, имеет следующий вид (см. (2.17))

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1)$$

Граничные и начальные условия в данной задаче можно поставить следующим образом:

$$v(x, t) = 0 \quad \text{при } t \leq 0, \quad v(0, t) = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ u_0 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Решение ищется только для области $x > 0$. Разрывную функцию $f(t)$ из (4.2) можно представить в виде контурного интеграла

$$f(t) = -\frac{u_0}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega \quad (4.3)$$

Тогда решение задачи также представляется контурным интегралом

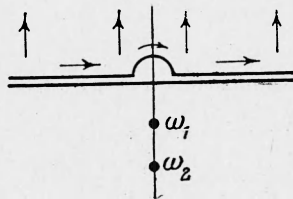
$$v(x, t) = -\frac{u_0}{2\pi i} \int_C \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{\omega} d\omega, \quad k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_0^2 - ic_\infty^2\omega\tau}} \quad (4.4)$$

Интегрирование в (4.3) и (4.4) производится вдоль действительной оси с обходом начала координат по верхней полуплоскости.

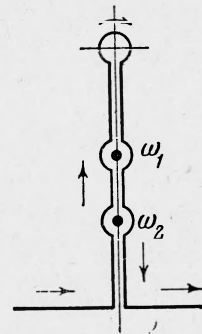
Функция $k(\omega)$ содержит в нижней полуплоскости две точки ветвления

$$\omega_1 = -i \frac{c_0^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\tau}, \quad \omega_2 = -\frac{i}{\tau}$$

Разрез для перехода на другой лист римановой поверхности проводится вдоль мнимой оси между этими точками. Так как путь интегрирования не проходит через разрез, то можно выбрать для всего пути одну определенную ветвь функции $k(\omega)$, именно ту, для которой $k = +\omega/c_\infty$ при $\omega \rightarrow \infty$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Легко видеть, что (4.4) удовлетворяет как дифференциальному уравнению (4.1), так и граничному условию (4.2), если представить $f(t)$ в форме (4.3). Для того чтобы проверить выполнение начального условия (4.2), заметим, что, так как в верхней полуплоскости подынтегральное выражение не содержит особенностей, то контур интегрирования можно перенести в бесконечность вдоль положительного направления мнимой оси (фиг. 1).

В этом случае

$$kx - \omega t = \omega \left(\frac{k}{\omega} x - t \right) \approx \omega \left(\frac{x}{c_\infty} - t \right)$$

Таким образом, если $t < x/c_\infty$, то подынтегральное выражение при удалении пути интегрирования в бесконечность содержит экспоненциально затухающий множитель и, следовательно, $v(x, t) = 0$ при $t < x/c_\infty$. Отсюда, в частности, следует для $x \geq 0$ начальное условие (4.2).

Рассмотрим поведение решения вдоль прямой $x - c_\infty t = 0$, которая совпадает с одной из характеристик уравнений (4.1). Как было показано выше, с одной стороны от этой прямой, именно при $t < x/c_\infty$, возмущение отсутствует.

Рассмотрим характер возмущения, когда $t - x/c_\infty = t' > 0$. Деформируем контур интегрирования в полуокружность большого радиуса, расположенную в верхней полуплоскости, и примыкающие к ней участки действительной оси. Такой же интеграл, взятый по зеркальному отражению этого пути в нижней полуплоскости, равен нулю, так как при удалении контура интегрирования в $-\infty$ вдоль мнимой оси подынтегральное выражение при $t' < 0$ экспоненциально убывает. Складывая интегралы по этим путям, представляем $v(x, t)$ в виде интеграла по окружности большого радиуса с центром в начале координат. На этой окружности функцию $k(\omega)$ можно разложить в ряд по степеням $(\omega \tau)^{-1}$

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{i\omega\tau} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \alpha^2 \right) \frac{\alpha^2}{\omega^2 \tau^2} + \dots \right. \\ \left. \left(\alpha^2 = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_\infty^2} > 0 \right) \right. \quad (4.5)$$

Таким образом, если ограничиться первыми тремя членами разложения (4.5), то

$$v(x, t) \approx -\frac{u_0}{2\pi i} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{c_\infty^2 \tau} x\right) \oint \frac{d\omega}{\omega} \exp\left\{i\left(\frac{\lambda}{\omega} - \omega t'\right)\right\} \quad (4.6)$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \alpha^2\right) \frac{x}{c_\infty^2 \tau^2}, \quad t' = t - \frac{x}{c_\infty} \quad (4.7)$$

Производя замену переменных $\omega \sqrt{t'/\lambda} = \lambda'$, находим

$$v(x, t) = -\frac{u_0}{2\pi i} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{c_\infty^2 \tau} x\right) \oint \frac{d\lambda'}{\lambda'} \exp\left\{-i\sqrt{\lambda t'}\left(\lambda' - \frac{1}{\lambda'}\right)\right\} \quad (4.8)$$

Вспользуемся известным выражением для функции Бесселя с целым индексом

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} \exp\left\{\frac{1}{2} z \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right\} \quad (4.9)$$

где интегрирование производится по любому замкнутому контуру вокруг точки $\lambda = 0$, и перепишем (4.8) в виде

$$v(x, t) = u_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{c_\infty^2 \tau} x\right) J_0(-2i\sqrt{\lambda t'}) \quad (4.10)$$

Для выяснения критерия применимости полученного выражения необходимо сохранить в разложении (4.5) члены более высокого порядка.

В результате получим

$$v(x, t) = u_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{c_\infty^2 \tau} x\right) \left\{ J_0(-2i\sqrt{\lambda t'}) + \frac{A}{\lambda} t' J_2(-2i\sqrt{\lambda t'}) \right\} \quad (4.11)$$

где

$$A = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{5}{8} \alpha^4\right) \frac{x}{c_\infty^2 \tau}$$

Вторым членом в (4.11) можно пренебречь, если $t' \ll \lambda / A \approx \tau$. Поэтому (4.10) действительно представляет решение в узкой области (шириной меньше τ) вдоль рассматриваемой характеристики. Так как

$J_0(2i\sqrt{\lambda t'}) \approx 1$ при $t' \ll \tau$, то полученные результаты можно записать в следующем виде:

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t' = t - x/c_\infty < 0 \\ u_0 e^{-\gamma x} & \text{при } t' > 0, t'/t \ll 1 \end{cases} \quad \left(\bar{i} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{c_\infty \tau} \right) \quad (4.12)$$

Таким образом, вдоль рассматриваемой характеристики возникает разрыв, интенсивность которого экспоненциально убывает с расстоянием от поршня. На расстояниях $x \gg c_\infty \tau$ разрыв на характеристике практически исчезает и вместе с ним исчезает и возмущение, распространяющееся вдоль характеристики.

Чтобы получить полное представление о течении при $x \gg c_\infty \tau$, необходимо исследовать область вдали от характеристики (т. е. при $t' \gg \tau$). Сместим путь интегрирования в сторону отрицательных значений мнимой оси (фиг. 2). При $t' > 0$ интеграл по смещенному в $-\infty$ пути исчезает и решение определяется только интегралами вокруг особых точек. Подынтегральное выражение содержит множитель $e^{-i\omega t'}$, который для $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$ экспоненциально убывает. Таким образом, при $i\omega_1 t' \gg 1$ и $i\omega_2 t' \gg 1$, т. е. при $t' \gg \tau$, интеграл фактически сводится к вычету около полюса $\omega = 0$, поэтому

$$v(x, t) = u_0 \quad \text{при } t' \gg \tau \quad (4.13)$$

Это означает также, что при $t' \gg \tau$ возмущение определяется низкими частотами $\omega \ll 1/\tau$, что и следовало ожидать из физических соображений. Для того чтобы получить зависимость v от координат и времени, рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{u_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx - \omega t)} d\omega \quad (4.14)$$

Так как подынтегральное выражение в (4.14) не содержит особенностей при $\omega = 0$, то интегрирование можно производить вдоль действительной оси. Разлагая $k(\omega)$ в ряд при $\omega\tau \ll 1$, получим

$$k \approx \frac{\bar{\omega}}{c_0} \left(1 + \frac{i}{2} \mu_0^2 \omega \tau \right), \quad \mu_0^2 = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_0^2} > 0 \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в (4.14) и выполняя интегрирование, находим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u_0 \sqrt{\frac{c_0}{2\pi\mu_0^2\tau x}} \exp \left\{ -\frac{(c_0 t - x)^2}{1/2\mu_0^2 c_0 \tau x} \right\}$$

Отсюда следует, что

$$v = \frac{1}{2} u_0 \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{\mu_0^2 c_0 \tau x}} (c_0 t - x) \right) + \text{const} \quad (4.16)$$

где

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-1/2\eta^2} d\eta \quad (4.17)$$

Вследствие (4.13) постоянную в (4.16) необходимо выбрать таким образом, чтобы $v \rightarrow u_0$ при $t - x'/c_0 \rightarrow \infty$, тогда

$$v(x, t) = \frac{1}{2} u_0 \left\{ \Phi \left(\frac{c_0 t - x}{\sqrt{\mu_0^2 c_0^2 \tau x}} \right) + 1 \right\} \quad (4.18)$$

Таким образом, при $x \gg c_\infty \tau / \alpha^2$ разрыв по характеристике уступает место непрерывному возмущению, возникающему вдоль прямой $x - c_0 t = 0$, которая не совпадает с характеристикой. Ширина области, в которой

появляется возмущение, порядка

$$\delta = \sqrt{\mu_0^2 c_0 \tau x} \quad (4.19)$$

и поэтому относительные размеры ее убывают с расстоянием от поршня

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{\mu_0^2 c_0 \tau}{x}} \quad (4.20)$$

Таким образом, малое возмущение, возникшее в некоторой точке, распространяется вблизи нее ($x < c_\infty \tau / \alpha^2$) вдоль характеристики, проходящей через эту точку; однако, по мере удаления все большая часть возмущения смещается с характеристики, на которой оно возникло, и, наконец, при $x \gg c_\infty \tau / \alpha^2$ распространение возмущений определяется скоростью c_0 . Так как не существует возмущений, распространяющихся со скоростью, превышающей c_∞ , то характеристика $x = c_\infty t$ отделяет невозмущенную область. Однако вследствие быстрого затухания высокочастотных составляющих, практически на больших по сравнению с $c_\infty \tau$ расстояниях, граница между возмущенным и невозмущенным потоком не проходит вдоль характеристики.

Согласно результату, полученному на основе анализа стационарных решений в работе [9] (см. также [1]), слабая ударная волна в релаксирующей среде не должна содержать разрывы. Ширина ее определяется в работе [10]. Полученные в данной работе результаты иллюстрируют закон, согласно которому исчезает слабый разрыв в релаксирующей среде. Заметим, однако, что, как будет показано ниже, этот вывод не распространяется в полной мере на плоские течения. Вблизи препятствия в области, ширина которой сравнима с релаксационной длиной l , даже при наличии релаксационных процессов может возникнуть стационарный разрыв произвольно малой интенсивности, который, однако, экспоненциально исчезает с увеличением расстояния от стенки.

Неограниченное расширение области, в которой нарастает возмущение (см. (4.19)), связано с пренебрежением нелинейными эффектами. Известно, что малые нелинейные эффекты накапливаются и приводят на достаточно больших расстояниях к заметным отклонениям от линейного решения. Так, при распространении возмущения, возникающего под влиянием гармонических колебаний, передний фронт волны постепенно становится круче. В рассматриваемом случае те же эффекты в конечном счете ограничивают рост ширины фронта возмущения.

Однако, если возмущение достаточно слабое и ограничено во времени, оно может исчезнуть вследствие поглощения раньше, чем наступит стационарное состояние. Действительно, если в момент $t = T$ остановить поршень, то возникает возмущение, которое распространяется по тем же законам, что и описанное выше, но на расстоянии $\Delta x \approx c_0 T$ от него (считая, что $c_0 \approx c_\infty$). Вследствие этого, когда

$$\delta \approx \sqrt{\mu_0^2 c_0 \tau x} \approx c_0 T$$

оба возмущения накладываются и ослабляют одно другое. Поэтому возмущение длительности T исчезает на расстояниях, значительно превышающих $c_0 T^2 / \mu_0 \tau$.

§ 5. Обтекание тонкого клина. Рассмотрим структуру плоского установившегося сверхзвукового потока в релаксирующей среде и, в частности, задачу об обтекании тонкого клина (угол при вершине 2φ) сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки [11, 12]. Пусть ось x совпадает с направлением движения невозмущенного потока, скорость которого обозначим U и положим, что $U_\infty > c > c_0$. Уравнения релаксационной гидродинамики для плоского установившегося течения запишутся в следующем виде (см. (1.14)):

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 & (5.1) \\ \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{K \varepsilon_x^2}{T} \\ \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, & v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -K \varepsilon_x \end{aligned}$$

где v_x, v_y — компоненты скорости вдоль осей x и y . В этих уравнениях пренебрегается неизотропной частью тензора напряжений и изменением энтропии вследствие теплопроводности и диффузии. Влияние этих эффектов оценивается ниже.

Так как возмущения, вносимые клином, незначительны, можно линеаризовать уравнения (5.1), полагая $v_x = U + u, v_y = v$ и т. д. В результате получаем для v

$$l \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} + (M_0^2 - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \left(l = \frac{c_\infty^2}{c_0^2} U \tau \right) \quad (5.2)$$

Здесь $M_\infty = U / c_\infty, M_0 = U / c_0$ — числа Маха. Аналогичные уравнения можно получить для возмущения плотности и скорости вдоль оси x .

Уравнение (5.2) гиперболического типа при $M_\infty > 1$ и эллиптического при $M_\infty < 1$. В первом случае через каждую точку проходят три характеристики, две из которых имеют вид

$$x = \pm \sqrt{M_\infty^2 - 1} y + \text{const} \quad (5.3)$$

а третья параллельна оси x . Направление этих характеристик не зависит от τ и не совпадает с направлением линий Маха равновесной гидродинамики $x = \pm \sqrt{M_0^2 - 1} y + \text{const}$. Для того чтобы функция $\exp(Bx - Dy)$ представляла частное решение (5.2), необходимо, чтобы

$$\frac{B}{D} = \frac{i l (M_\infty^2 - 1) B + (M_0^2 - 1)}{i l B + 1} \quad (5.4)$$

Будем считать, что начало координат совпадает с вершиной клина и запишем граничные условия задачи

$$v(x, 0) \equiv f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \varphi U & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Представляя $f(x)$ в виде контурного интеграла, запишем решение задачи в следующем виде:

$$v(x, y) = \frac{\varphi U}{2\pi i} \int \frac{1}{\eta} \exp\{i\eta(x' - a(\eta)y')\} d\eta \quad (5.6)$$

где

$$a(\eta) = \sqrt{\frac{i(M_\infty^2 - 1)\eta + (M_0^2 - 1)}{i\eta + 1}}, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l} \quad (5.7)$$

В (5.6) интегрирование производится вдоль действительной оси с обходом начала координат в нижней полуплоскости.

Функция $a(\eta)$ в плоскости комплексного переменного аналогична по своим свойствам функции $k(\omega)$, введенной в § 4; особые точки этой функции расположены в верхней полуплоскости $\eta_1 = i, \eta_2 = i(M_0^2 - 1) / (M_\infty^2 - 1)$. Путь интегрирования и в этом случае не проходит через разрез. При $\eta \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow 0$, $a(\eta)$ принимает действительные значения

$$a(\infty) = \pm \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad a(0) = \pm \sqrt{M_0^2 - 1} \quad (5.8)$$

Если выбрать ту ветвь (5.7), которая при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к $+\sqrt{M_\infty^2 - 1}$, то, перенося контур интегрирования в $-\infty$ вдоль мнимой оси, можно показать, что решение обращается в нуль при

$$x - \sqrt{M_\infty^2 - 1} y \leq 0 \quad (5.9)$$

в противном случае обращение в нуль имеет место при

$$x + \sqrt{M_\infty^2 - 1}y \leq 0 \quad (5.10)$$

Вследствие этого в решении для $y > 0$ необходимо воспользоваться той ветвью радикала (5.7), которая соответствует положительному знаку в (5.8). Вторая ветвь давала бы возмущения, распространяющиеся вверх по течению и должна быть отброшена по физическим соображениям. При $y < 0$ по тем же самым соображениям необходимо выбрать ветвь, соответствующую отрицательному знаку в (5.8).

Уравнение (5.9) представляет одну из характеристик, проходящих через вершину клина. Рассмотрим поведение решения вдоль этой характеристики в слое шириной $\ll l$. Деформируя контур интегрирования так же, как и в задаче о движении поршня, находим

$$v(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x - \sqrt{M_\infty^2 - 1}y < 0 \\ \varphi U \exp[-\frac{1}{2}\beta^2(y/l)] J_0(z') & \text{при } x - \sqrt{M_\infty^2 - 1}y > 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Здесь $J_0(z')$ — функция Бесселя

$$\beta^2 = \frac{M_0^2 - M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} > 0, \quad z' = i \left(2\beta^2 \left[1 + \frac{\beta^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{y}{l} \frac{x - \sqrt{M_\infty^2 - 1}y}{l} \right] \right)^{1/2}$$

Вблизи характеристики (5.9) функция $J_0(z') \approx 1$.

Таким образом, вблизи вершины клина вдоль характеристики, проходящей через нее, возникает разрыв, который, однако, экспоненциально убывает с расстоянием. При $x \gg l$, $y \gg l$ возмущение вдоль характеристики практически исчезает. В этом случае основной вклад определяется длинноволновыми составляющими возмущения. Если положить в (5.6) приближенно $a(\eta) \approx \sqrt{M_0^2 - 1}$, то после интегрирования получаем результат, следующий из равновесной гидродинамики:

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x - \sqrt{M_0^2 - 1}y < 0 \\ \varphi U & \text{при } x - \sqrt{M_0^2 - 1}y > 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Однако, если учесть в $a(\eta)$ члены более высокого порядка по η , оказывается, что в действительности разрыва вдоль линии $x - \sqrt{M_0^2 - 1}y = 0$ не будет. Поступая таким же образом, как и в задаче о движении поршня, находим

$$v(x, y) = \frac{\varphi U}{2} \left\{ \Phi \left(\frac{x - \sqrt{M_0^2 - 1}y}{\sqrt{v^2 l y}} \right) + 1 \right\} \quad \left(\begin{matrix} x \gg l \\ y \gg l \end{matrix} \right) \quad (5.13)$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности (4.17)

$$v^2 = \frac{M_0^2 - M_\infty^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} > 0 \quad (5.14)$$

Уравнения (5.13) и (5.14) дают структуру линии Маха, обусловленную влиянием релаксационных процессов. Характерная ширина линии порядка $\sqrt{v^2 l y}$.

Рассматриваемое течение можно интерпретировать как слабую ударную волну, возникающую около клина, обтекаемого сверхзвуковым потоком. Как уже отмечалось [9.1], в релаксирующей среде не могут существовать разрывы малой интенсивности, распространяющиеся со скоростью, меньшей c_∞ относительно невозмущенной среды. В рассматриваемой задаче имеем дело с более сложным случаем, когда величина возмущения (φU)

мала, но скорость движения обтекаемого клина превышает c_∞ . В этом случае, как видно из приведенного решения (5.11), вблизи стенки, в области шириной порядка $l \approx U\tau$ может возникнуть стационарный разрыв произвольно малой интенсивности. В рамках релаксационной гидродинамики приходится рассматривать этот разрыв как геометрическую поверхность. Его ширина определяется временем свободного пробега.

Другая особенность этих разрывов, возникающих вблизи препятствия, состоит в том, что они направлены (при малых интенсивностях) вдоль характеристик уравнений релаксационной гидродинамики и таким образом не совпадают с обычными линиями Маха. Они исчезают, когда скорость движения клина U становится меньше c_∞ , а не c_0 . Это следует из того, что уравнение (5.2) при $U < c_\infty$ становится эллиптическим.

Для выяснения возможности экспериментального обнаружения рассматриваемых разрывов необходимо оценить сделанные допущения. Они сводятся в основном к пренебрежению эффектами вязкости и теплопроводности. Когда решение содержит частоты, близкие к релаксационным, диссипативными эффектами, связанными с вязкостью и теплопроводностью, можно пренебречь. Действительно, влияние последних порядка $l_0/L = \tau_0 c/L$ (l_0 — длина свободного пробега, τ_0 — время свободного пробега, c — средняя тепловая скорость молекул, L — характерный размер рассматриваемой области), с другой стороны влияние релаксационных эффектов порядка $l/L = U\tau/L \gg l_0/L$, так как $\tau \gg \tau_0$.

С удалением от стенки интенсивность рассматриваемых разрывов экспоненциально убывает и таким образом экспериментальное обнаружение их возможно только в том случае, если «релаксационная длина» $l = (c_\infty^2/c_0^2) U\tau$ окажется значительной. В частности, необходимо, чтобы l значительно превосходила толщину пограничного слоя. Легко убедиться, что при нормальном давлении толщина пограничного слоя, как правило, превосходит размеры релаксационной области. Известно, однако, что отношение толщины пограничного слоя Δ к характерным размерам обтекаемого тела L равно

$$\frac{\Delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \quad \left(R = \frac{UL}{\eta} \right)$$

где R — число Рейнольдса. Так как $\eta \approx \frac{1}{3} cl_0$, то $\Delta \approx \sqrt{l_0 L / 3M}$. Так как отношение $l/l_0 = N \gg 1$ практически не зависит от плотности, то отношение

$$\frac{\Delta}{l} = \sqrt{\frac{1}{3M^3 N}} \sqrt{\frac{L}{l_0}}$$

убывает с увеличением длины свободного пробега, т. е. размеры релаксационной зоны по мере разрежения растут быстрее, чем толщина пограничного слоя. При этом конечно необходимо, чтобы длина свободного пробега оставалась малой по сравнению с L . Вследствие того, что l обычно на несколько порядков превосходит l_0 , $l_0/l = 1/N$ — величина малая, и таким образом возможны условия, когда

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{1}{\sqrt{3M^{3/2} N}} \sqrt{\frac{L}{l_0}} \ll 1$$

несмотря на то, что $L/l_0 \gg 1$.

В случае сильных ударных волн поведение ударной волны в релаксационной зоне вблизи стенки должно быть исследовано специально. Из соображений подобия можно ожидать, что вблизи вершины клина на расстояниях $x \ll l$ течение должно быть аналогично течению газа с замороженным релаксационным процессом. Таким образом, должен возникнуть разрыв, направление которого определяется числом Маха $M_\infty = U/c_\infty$. В то же время на расстояниях $x \gg l$ от вершины должна возникнуть обычная

ударная волна (расширенная вследствие влияния релаксационных процессов), угол наклона которой определяется равновесной скоростью звука c_0 . Так как передний фронт такой волны содержит разрыв, ширина которого порядка длины свободного пробега [9.1], то можно ожидать, что в случае сильной ударной волны передний фронт ее искривляется по мере приближения к вершине клина, постепенно принимая направление, характерное для ударной волны в среде без внутренних степеней свободы. Характерный размер, в пределах которого заметно искривление, должен быть порядка l .

В релаксационной зоне возмущения распространяются вдоль направлений, отличных от тех, которые следуют из равновесной гидродинамики. На расстояниях, значительно превышающих размер релаксационной зоны, возмущение локализуется в относительно узкой области вдоль характеристик равновесной гидродинамики. Ширина этой области возрастает пропорционально квадратному корню из расстояния, пока не начнет сказываться влияние нелинейных эффектов. Таким образом, возмущение, исходящее от двух препятствий, расположенных на расстоянии L одно от другого, сливаются при $y > L^2/v^2 l$ в одну линию Маха. Точно так же препятствие с линейными размерами L дает линию Маха конечной длины, исчезающую на расстояниях порядка $L^2/v^2 l$ от оси x вследствие наложения возмущений, исходящих от крайних точек. Рассмотрим более детально изменение характера возмущения по мере удаления от места его возникновения.

§ 6. Распространение малых возмущений в релаксационной зоне.

Пусть на линии тока $y = 0$ возникает произвольное возмущение какой-либо гидродинамической величины (скорости, плотности, температуры)

$$F(x, 0) = \psi(x) \quad (6.1)$$

Если возмущение стационарно, то оно описывается следующим уравнением:

$$l \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right\} + (M_0^2 - 1) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (6.2)$$

которое необходимо проинтегрировать с граничным условием (6.1). В случае равновесной гидродинамики возмущение подчиняется волновому уравнению

$$(M_0^2 - 1) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (6.3)$$

которое можно получить из (6.2), положив релаксационную длину равной нулю. Если отбросить возмущения, распространяющиеся вверх по течению, то решение (6.3) для $y > 0$ записывается в виде

$$F(x, y) = \psi(x - \sqrt{M_0^2 - 1} y) \quad (6.4)$$

Решение (6.2) можно записать следующим образом:

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(\eta) \exp \left\{ i\eta \left(\frac{x}{l} - a(\eta) \frac{y}{l} \right) \right\} d\eta \quad (6.5)$$

где

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\psi(x)}{l} e^{-i\eta \frac{x}{l}} dx \quad (6.6)$$

и функция $a(\eta)$ взята из (5.7). При $y \gg l$ вклад в (6.5) дают только низкочастотные составляющие начального возмущения $\psi(x)$.

Разлагая $a(\eta)$ в ряд по η

$$a(\eta) = \sqrt{M_0^2 - 1} - i\eta \frac{v^2}{2} + \dots$$

и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, находим

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &\approx \frac{1}{2\pi} \iint \exp \left\{ i\eta \left(\frac{x}{l} - \sqrt{M_0^2 - 1} \frac{y}{l} - \frac{\zeta}{l} \right) \right\} \times \\
 &\quad \times \exp \left(-\eta^2 \frac{y}{l} \frac{v^2}{2} \right) \psi(\zeta) \frac{1}{l} d\eta d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \iint \exp \left\{ i\eta \left(\frac{x}{l} - \sqrt{M_0^2 - 1} \frac{y}{l} - \zeta \right) \right\} \frac{\psi(x - \sqrt{M_0^2 - 1}y - \zeta)}{l} d\eta d\zeta
 \end{aligned}$$

где v^2 определяется так же, как в (5.14).

Выполняя интегрирование по η , получаем

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{v^2 l y}} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{2lyv^2} \right) \psi(x - \sqrt{M_0^2 - 1}y - \zeta) d\zeta \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) более точно описывает законы распространения малых возмущений при $y \gg l$, чем (6.4). Так, в равновесной гидродинамике возмущение в любой точке $P(x, y)$ полностью определяется значением возмущения в определенной точке $P_0(x_0, 0)$ оси x , координата которой $x_0 = x - \sqrt{M^2 - 1}y$. Если учесть релаксационные процессы, то, как это видно из (6.7), возмущение в каждой точке представляется в виде суммы возмущений, посылаемых различными точками оси x , однако вес, с которым входят вклады различных точек, экспоненциально убывает с расстоянием от точки $P_0(x_0, 0)$; ширина Δx , области оси x , влияющей на возмущение в точке P , порядка

$$\Delta x = \sqrt{2lyv^2}$$

Из (6.7) следует также, что начальное возмущение $\psi(x)$ передается с искажением: интегрирование приводит к постепенному сглаживанию начального возмущения и исчезновению мелких деталей по мере удаления от оси x .

Поступила 19 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1953.
2. Kirkwood I. G., Wood W. W. Hydrodynamics of a Reacting and Relaxing Fluid. J. Appl. Phys., 1957, vol 28, No 4, 395.
3. Groer L. I. F. Characteristics of the equations of motion of a reacting gas. J. Fl. Mech., 1958, 4, 276.
4. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А. К теории поглощения звука в жидкостях, ЖЭТФ, 1937, т. 7, стр. 438.
5. Ступоченко Е. В., Стаханов И. П. Об уравнениях релаксационной гидродинамики, ДАН СССР, 1960, т. 134, № 4, стр. 782.
6. Де Гроот С. Р. Термодинамика необратимых процессов. М., ГТТИ, 1956.
7. Ступоченко Е. В., Стаханов И. П. К теории нестационарных разрывов в релаксирующих средах. ДАН СССР, 1957, т. 117, № 1, стр. 65.
8. Курант Г., Фридрикс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны М., ИЛ, 1950.
9. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. АН СССР, 1946.
10. Дьяков С. П. Ударные волны в релаксирующей среде. ЖЭТФ, 1954, т. 27, № 6, стр. 728.
11. Стаханов И. П., Ступоченко Е. В. О структуре линий Маха в релаксирующих средах. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5, стр. 1044.
12. Clarke J. F. The linearized flow of a dissociating gas. I. Fl. Mech. 1960, vol 7, No 4, 577.