УДК 536.19;539.24

ВЯЗКОУПРУГИЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНЫХ СРЕД

В. В. Новиков, К. В. Войцеховский*

Одесский государственный политехнический университет, 270044 Одесса (Украина)
* Институт молекулярной физики Польской академии наук, Познань (Польша)

Рассмотрены временные фрактальные множества для анализа вязкоупругих свойств неоднородных сред. Построена дробная производная, непосредственно связанная с фрактальной размерностью. Установлена зависимость между размытостью релаксационного спектра и фрактальной размерностью.

Введение. Целью данной работы является определение зависимости между фрактальной размерностью множества, дробной производной и размытостью релаксационного спектра неоднородной структуры. Установление данной зависимости позволит расширить физическое истолкование известных экспериментальных данных, полученных при исследовании релаксационных свойств неоднородных сред.

Различные системы, которые представляют собой суперансамбли, состоящие из иерархически соподчиненных статистических ансамблей, последовательно описаны в рамках фрактальных моделей [1–7].

Понятие фрактального множества, т. е. множества с дробной размерностью, введенное Б. Мандельбротом в начале 60-х гг. [1], получило широкое распространение в различных областях физики конденсированного состояния [2–7]. Важные результаты получены при описании систем с большими флуктуациями и стохастической структурой [5–7].

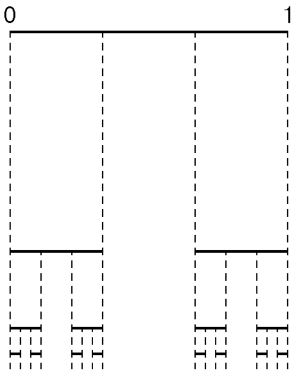

Рис. 1

При получении фрактального множества основной процедурой в схеме является следующая: из множества M целой размерности d по определенному закону удаляются его части. Процесс удаления (замены) частей множества является итерационным. Полученное множество является самоподобным с дробной размерностью d_f. Например, множество Кантора получают следующим образом: отрезок единичной длины делится на три равные части, средняя часть удаляется, каждый из оставшихся двух отрезков вновь делится на три равных отрезка и т. д. (рис. 1). Продолжая эту процедуру n раз ($n \to \infty$), получаем множество, которое называется «множество Кантора» или канторовская «пыль».

Важной характеристикой фрактального множества является его размерность d_f, которую можно определить из зависимости массы (меры) фрактального множества M_f от L^{d_f}, где L — линейный масштаб [1, 2].

Следует отметить, что основной чертой фрактальных структур является зависимость их свойств от L^α [1–7], где α — постоянное число. В реальных средах эта зависимость обычно справедлива в некоторой ограниченной области (области промежуточной асимптотики), которая определяется в виде $a \leqslant L \leqslant \xi$, где a — постоянная решетки (микроскопическая постоянная); ξ — длина корреляции. В области масштабов $L \gg \xi$ среда является

Работа выполнена при финансовой поддержке Польского комитета научных исследований (грант KBN 8T11F 012 14) и Министерства науки Украины (грант Ф4/1644–97).

структурно-однородной и ее можно характеризовать эффективными свойствами.

Кроме геометрических, т. е. пространственных фракталов, в последнее время все большее внимание привлекают временные фракталы — фрактальные множества времен событий, в которых следующее событие происходит через промежуток времени τ после предыдущего. Временные фракталы использовались для исследования динамики реакций в неупорядоченных средах, в которых учитывалось наличие пространственного и временного беспорядка [8–11].

Полимерные и композиционные материалы относятся к неоднородным материалам с «длинной памятью», в которых деформация (напряжения) в данной частице в данный момент времени зависит не только от текущих значений деформаций, температуры и других определяющих параметров, но и от значений этих параметров во все предшествующие моменты.

Согласно предположению Больцмана деформация (напряжения), вызванная приложенным напряжением (деформацией), задерживается благодаря присущему материалу свойству «запоминания» [12].

Если допустить, что деформация среды зависит от времени, то для определения зависимости между напряжением и деформацией, согласно принципу Больцмана, можно весь промежуток времени $(0,t)$ разбить на n частей ($\Delta\tau_k = t_{k+1} - t_k$). Далее предполагается, что деформация тела $\varepsilon(\tau_k)$ есть величина постоянная в каждый промежуток времени (t_k, t_{k+1}) и каждая компонента деформации $\varepsilon(\tau_k)$ влияет на значения тензора напряжений $\sigma(t)$. При этом на каждом промежутке $\Delta\tau_k$ напряжение равно $\sigma^k(t) = R(t,\tau_k)\varepsilon(\tau_k)\Delta\tau_k$. Здесь $R(t,\tau)$ — коэффициент влияния (ядро релаксации), который обычно имеет вид [13] $R(t-\tau) = C/(t-\tau)^\alpha$, где C — постоянная (не зависит от времени).

Принцип суперпозиции Больцмана заключается в том, что полное напряжение $\sigma(t)$ в момент времени t представляет собой сумму вкладов $\sigma^k(t)$ от значений тензора деформаций на отдельных интервалах (t_k, t_{k+1}), т. е.

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{n} \sigma^k(t) = \sum_{k=1}^{n} R(t,\tau_k)\varepsilon(\tau_k)\Delta\tau_k.$$

В этом случае при $\Delta\tau_k \to 0$ напряжение $\sigma(t)$ в момент времени t равно

$$\sigma(t) = \int\limits_0^t R(t,\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau.$$

Аналогично можно получить

$$\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \Pi(t,\tau)\sigma(\tau)\,d\tau,$$

где $\Pi(t,\tau)$ — коэффициенты влияния (ядро ползучести). Если коэффициенты влияния имеют вид

$$R(t,\tau) = C_0\delta(t-\tau), \qquad \Pi(t,\tau) = S_0\delta(t-\tau), \tag{1}$$

т. е. среда не обладает «памятью», то уравнения (1) принимают вид $\sigma = C_0\varepsilon$, $\varepsilon = S_0\sigma$. Иными словами, получаем линейный закон Гука, где σ и ε — тензоры напряжений и деформаций; C и S — тензоры модулей упругости и податливости соответственно.

Рассмотрим среды, в которых «память» является полной, но не идеальной, т. е. на интервале $(0,t)$ она сохраняется только на некоторых промежутках времени. При включении «памяти» δ-функция в (1) размывается в колоколообразную зависимость, ширина которой определяется интервалом времени τ, в течение которого деформация (напряжение) зависит от напряжения (деформации).

При эволюции таких систем можно выделить два предельных процесса. Первый, когда система проходит через все состояния непрерывно, без каких-либо потерь, и второй, когда из непрерывных состояний системы исключаются некоторые отрезки по заданному закону. Такой процесс можно характеризовать как процесс, порождаемый фрактальным состоянием с заданной фрактальной размерностью d_f.

Для описания процессов с «памятью» использован дробный интеграл [14]. Анализ проводился на основе множества Кантора. В работе [14] предполагалось, что в системе с заданной пространственной геометрией в процессе эволюции «выживает» только часть состояний, а другая необратимо теряется, т. е. становится недоступной для системы. Потери состояний происходили по итерационному закону получения множества Кантора. В [14] показано, что в этом случае (в пределе $N \to \infty$) описание процесса сходится к дробному интегралу

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^1 (1-y)^{q-1} f(yx)\, dy,$$

причем показатель q в нем указывает на долю сохранившихся состояний и совпадает с фрактальной размерностью множества.

В [15–17] показано, что при описании материалов с «памятью» интегральные операторы можно заменить дифференциальными.

При описании свойств хаотической среды может быть использована дробная производная [13–23]. Например, механическая модель деформируемого тела может быть представлена как некоторая система, состоящая из упругих и вязких элементов [13].

Для упругого элемента справедлив закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{2}$$

где E — модуль Юнга.

Для вязкого элемента скорость изменения линейных размеров определяется в виде $d\varepsilon/dt = (1/\eta)\sigma$ или

$$\sigma = \eta\, d\varepsilon/dt, \tag{3}$$

где η — вязкость материала.

Соотношение между σ и ε, содержащее закон упругости (2) и закон вязкости (3) как предельные случаи, можно записать в виде (см. [13, с. 125]) $\sigma(t) = K\, d^q\varepsilon(t)/dt^q$, откуда следует закон Гука при $q = 0$, $K = E$ и закон вязкости Ньютона при $q = 1$, $K = \eta$.

Таким образом, при описании вязкоупругих свойств сред с промежуточными состояниями можно сделать предположение о дробном значении q в зависимости напряжения от деформаций.

Существует несколько определений дробных производных [18, 19]. Одним из наиболее распространенных является определение дробной производной в смысле Римана — Лиувилля

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_a^x \frac{f(y)\, dy}{(x-y)^{q-n+1}} \quad \text{при} \quad n-1 \leqslant q \leqslant n,$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция.

Остановимся на определении дробной производной. Функции, для которых полное приращение

$$\Delta_h f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

представимо в виде

$$\Delta_h f = A(\Delta x)^h + \alpha(x)(\Delta x)^h \qquad (\lim \alpha(x) \to 0 \quad \text{при} \quad (\Delta x)^h \to 0), \tag{4}$$

можно разделить на два класса:

а) если $h = 1;\ 0$, то $f(x)$ принадлежит классическому множеству дифференцируемых функций;

б) если $h \neq 1$, $h \neq 0$ (показатель Гёльдера), то $f(x)$ принадлежит множеству функций, для которых производная в обычном смысле не существует, а существует дробная производная [19]

$$\frac{d^h f(x)}{dx^h} = \lim \frac{\Delta_h f}{\Delta x^h}, \qquad \Delta x^h \to 0. \tag{5}$$

Из (4) следует, что если ввести логарифмическую метрику, то приращение функции $\lg \Delta_h f$ будет линейным относительно приращения независимого переменного $\lg \Delta x$, и, следовательно, можно применить стандартное дифференциальное исчисление.

1. Дробная производная и фрактальная размерность множества. Иногда фракталы определяют как непрерывные функции, которые ни в одной точке не имеют производной (касательной) [24]. В связи с этим при анализе локальных свойств фрактального множества имеет смысл использовать дробную производную.

Для интерпретации связи дробной производной и фрактальной размерности рассмотрим определение локальной плотности однородного множества. Приращение массы множества Ω размерности d определяется в виде $\Delta M = (\Delta x)^d \rho$, где ρ — плотность множества; x — линейные размеры множества. Если объекты однородные, а d — целое число, то локальная плотность равна

$$\rho(x) = \frac{dM(x)}{d\mu} = \lim_{\Delta\mu \to 0} \frac{\Delta M(x)}{\Delta \mu} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho(\Delta x)^d}{(\Delta x)^d} = \rho,$$

где ρ — плотность однородного объекта; $\Delta M = \rho(x)\Delta x^d$ — приращение массы в окрестности точки x; $\Delta\mu = (\Delta x)^d$ — приращение меры множества Ω, на котором определяется плотность ρ.

Для фрактальных структур, полученных удалением некоторого подмножества из основного множества Ω, приращение массы фрактального множества M_f равно $\Delta M_f = \rho_f \Delta x^{d_f}$, локальная плотность —

$$\rho_f(x) = \frac{dM_f(x)}{d\mu} = \lim_{\Delta\mu \to 0} \frac{\Delta M_f(x)}{\Delta \mu} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho_f(\Delta x)^{d_f}}{(\Delta x)^d} = \rho_f \Delta x^{d_f - d}. \tag{6}$$

Из (6) следует

$$\rho_f(x) = \frac{dM_f(x)}{d\mu} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad d < d_f, \\ \rho_f & \text{при} \quad d = d_f, \\ \infty & \text{при} \quad d > d_f. \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, согласно (7) производная $dM_f(x)/d\mu$ имеет конечное значение, если приращение меры множества $\Delta\mu$ измеряется не в единицах $(\Delta x)^d$, а в единицах $(\Delta x)^{d_f}$.

Из (6) также следует, что d_f имеет смысл размерности меры Хаусдорфа — Безиковича [1, 2].

Полученный результат можно обобщить следующим образом. Пусть на фрактальном множестве Ω_f задана функция $f(x)$ и точка $x = x_0$ и ее окрестность принадлежат множеству Ω_f с размерностью d_f. Разобьем отрезок $[x, x_0]$ на N частей. Единицей измерения на n-м этапе выберем Δx^α:

$$(\Delta x_k^{(n)})^\alpha = (1/N_n)(x_0 - x),$$

где $N_n = j^n$, т. е. $N_n = j^n$ определяет число отрезков на n-м масштабном уровне; j — число блоков (ветвистость), участвующих в построении элементарной фигуры фрактала (для множества Кантора $j = 2$). Тогда на n-м масштабном уровне длина k-го участка разбиения равна

$$\Delta x_k^{(n)} = \xi^n (x_0 - x), \tag{8}$$

где ξ — масштабный фактор (коэффициент подобия множества Ω_f), $\xi < 1$. Число точек разбиения отрезка $[x, x_0]$ на n-м этапе $m_n = 1, 2, \ldots, j^{n+1}$. Такое разбиение отрезка $[x, x_0]$ позволяет каждой точке (элементу) фрактального множества сопоставить точку ультраметрического пространства, геометрический образ которого представляется деревом Кейли [24–26].

Согласно определению фрактальной размерности $d_f = \alpha$ выполняется $(1/\xi)^{n\alpha} = N_n$.

Из (8) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_k^{(n)} = 0$. Таким образом, $\Delta x_k^{(n)}$ — бесконечно малая величина, т. е., когда $n \to \infty$, ультраметрическое пространство становится континуальным.

В дальнейшем приращение аргумента функции на n-м масштабном уровне $\Delta x_k^{(n)}$ будем обозначать Δx, т. е. $\Delta x = \Delta x_k^{(n)}$. Координаты точек разбиения на n-м масштабном уровне определяются в виде $x_k = x_0 - k\Delta x_k^{(n)} = x_0 - k\Delta x$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, j^{n+1}$. При этом выполняются равенства

$$\Delta x = (x_0 - x)/(1/\xi)^n, \qquad \Delta x^\alpha = (x_0 - x)^\alpha/N_n, \qquad (1/\xi)^{n\alpha} = j^n = N_n.$$

Рассмотрим приращение функции

$$\Delta_\alpha f(x) = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x), \tag{9}$$

которое будем называть первой разностью.

Исходя из (9) можно определить вторую разность $\Delta_\alpha^2 f(x)$ как квадрат оператора Δ_α:

$$\Delta_\alpha^2 f(x) = \Delta_\alpha(\Delta_\alpha f(x)) = \Delta_\alpha f(x_0) - \Delta_\alpha f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - 2f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0 - 2\Delta x).$$

Третью разность можно получить аналогично:

$$\Delta_\alpha^3 f(x) = f(x_0) - 3f(x_0 - \Delta x) + 3f(x_0 - 2\Delta x) - 3f(x_0 + \Delta x).$$

Отсюда следует, что k-я разность $\Delta_\alpha^k f(x)$ определяется через знакочередующиеся биномиальные коэффициенты:

$$\Delta_\alpha^k f(x_0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k (f(x_0 - k\Delta x)), \qquad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \qquad m = j^{n+1}.$$

В то же время из определения Δ_α следует $f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta_\alpha f(x_0) = (1 - \Delta_\alpha) f(x_0)$, где 1 — тождественный оператор. Тогда можно записать $f(x - 2\Delta x) = (1 - \Delta_\alpha) f(x_0 - \Delta x) = (1 - \Delta_\alpha)^2 f(x_0)$. В общем случае $f(x_0 - k\Delta x) = (1 - \Delta_\alpha)^k f(x_0)$. Отсюда следует, что $f(x) = (1 - \Delta_\alpha)^m f(x_0)$, так как согласно (8) $x = x_0 - m\Delta x$, где $m = j^{n+1}$.

Разложив бином $(1-\Delta_\alpha)^k$ по формуле Ньютона, получим

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \Delta_\alpha^k f(x_0). \tag{10}$$

Общий член суммы в правой части (10) преобразуем к виду

$$C_m^k \Delta_\alpha^k f(x_0) = C_m^k \frac{\Delta_\alpha^k f(x_0)}{(\Delta x^\alpha)^k}(\Delta x^\alpha)^k = \\ = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\frac{\Delta_\alpha^k f(x_0)}{(\Delta x^\alpha)^k}\frac{(x_0-x)^{\alpha k}}{N_n} = P_{mk}\frac{\Delta_\alpha^k f(x_0)}{k!(\Delta x^\alpha)^k}(x_0-x)^{\alpha k},$$

где $P_{mk}=m(m-1)\cdots(m-k+1)/N_n$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,m$.

Таким образом, (10) можно записать в следующем виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{P_{mk}\Delta_\alpha^k f(x_0)}{(\Delta x^\alpha)^k}(x_0-x)^{\alpha k}.$$

При конечном k и бесконечно большом m $(m\to\infty)$ для функции $f(x)$ получаем аналог ряда Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{j^k f^{(\alpha k)}(x_0)}{k!}(x_0-x)^{\alpha k},$$

или

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x_0-x)^{\alpha k}, \tag{11}$$

где $a_k=(j^k/k!)f^{(\alpha k)}(x_0)$; $f^{(\alpha k)}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}(\Delta_\alpha^k f(x_0)/(\Delta x^\alpha)^k)$ — дробная производная k-го порядка функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ на фрактальном множестве Ω_f.

Коэффициенты ряда (11) зависят не только от дробной производной k-го порядка функции $f(x)$ в точке $x=x_0$, но и от ветвистости фрактального множества j, на котором задана функция $f(x)$. Из (11) следует, что первая производная $(k=1)$ определяется в виде

$$\frac{d^\alpha f(x_0)}{dx^\alpha}=f^{(\alpha)}(x_0)=\lim_{\Delta x^\alpha\to 0}\frac{\Delta^\alpha f(x_0)}{\Delta x^\alpha}=\lim_{\Delta x^\alpha\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x^\alpha},$$

что совпадает с определением (5).

Дробную производную можно определить через интеграл от функции $f(x)$ на фрактальном множестве Ω_f. Интеграл будет равен пределу от интегральной суммы

$$\int_a^b f(x)(dx)^\alpha=\lim_{\Delta x^\alpha\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}f(x_0-(k-1)\Delta x)(\Delta x)^\alpha. \tag{12}$$

Если рассмотреть функцию $\Phi(x)=\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt$, то можно показать, что $\dfrac{d^\alpha}{(dx)^\alpha}\Phi(x)=f(x)$, т. е. $\Phi(x)$ является аналогом первообразной для функции $f(x)$ и выполняется

$$\int_0^x f(t)(dt)^\alpha=\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt.$$

Таким образом, определены дробные дифференциально-интегральные представления, которые по построению связаны с процедурой создания фрактального множества, определяющего свойства функции $f(x)$.

2. Вязкоупругие свойства. Для установления зависимости напряжений σ от деформаций ε для сред, в которых состояния зависят от времени t и часть состояний по определенному закону вырезается (удаляется), используем принцип суперпозиции Больцмана и дробное интегродифференциальное представление.

Предположим, что процесс деформирования частицы (локальной области в однородном напряженном состоянии) начинается в момент времени $t = 0$. Разобьем отрезок $[0, t]$ точками согласно изложенному выше: $\tau_0 = 0$, $\tau_1 > \tau_0$, $\tau_2 > \tau_1$, $\ldots$, $\tau_n = t > \tau_{n-1}$, которые совпадают с концами невырезанных состояний. При этом $\Delta\tau_n^\alpha = \tau_{n+1} - \tau_n = t/N_n$, где $N_n = j^n$ — число отрезков; $\alpha = d_f = \ln j/\ln\zeta^{-1}$ — фрактальная размерность множества; ζ — масштабный фактор (показатель подобия), характеризующий уменьшение величины блока (области) на каждом масштабном уровне [2].

Если считать, что на каждом отрезке $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ компоненты тензора деформаций постоянны и равны $\varepsilon_{kl}(\tau_k)$, то можно предположить, что каждое значение компоненты $\varepsilon_{kl}(\tau_k)$ влияет на значения компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(\tau_k)$ в момент времени t по линейному закону $\sigma_{ij}^{(k)}(\tau_k) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\tau_k)$, где $C_{ijkl} = C_{ijkl}(t, \tau_k)$ — тензор влияния. Согласно принципу суперпозиции Больцмана

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{N_n} C_{ijkl}(t, \tau_n)\varepsilon_{kl}(\tau_n)(\Delta\tau_n)^\alpha,$$

переходя к пределу при $\Delta\tau_n^\alpha \to 0$, получим

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t C_{ijkl}(t, \tau)\varepsilon_{kl}(\tau)(d\tau)^\alpha.$$

Значение $\alpha = 1$ соответствует непрерывному процессу. Выражения для деформаций ε_{kl} через напряжения σ_{ij} получают аналогично:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t S_{ijkl}(t, \tau)\sigma_{kl}(\tau)(d\tau)^\alpha.$$

В экспериментах установлено, что материалы с «длинной памятью» при быстром нагружении мгновенно реагируют на текущие напряжения, после чего начинаются ползучесть и релаксация. Это означает, что коэффициенты влияния C_{ijkl} и S_{ijkl} (ядра) имеют аддитивную сингулярную составляющую (пропорциональную δ-функции) [21, 22], т. е.

$$C_{ijkl}(t, \tau) = C_{ijkl}^0\delta(t - \tau) + R_{ijkl}(t, \tau), \qquad S_{ijkl}(t, \tau) = S_{ijkl}^0\delta(t - \tau) + \Pi_{ijkl}(t, \tau),$$

где C_{ijkl}^0, S_{ijkl}^0 — модули мгновенных упругости и податливости; $R_{ijkl}(t, \tau)$, $\Pi_{ijkl}(t, \tau)$ — ядра релаксации и ползучести соответственно.

Таким образом,

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^0\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t R_{ijkl}(t, \tau)\varepsilon_{kl}(\tau)\,(d\tau)^\alpha, \quad \varepsilon_{ij}(t) = S_{ijkl}^0\sigma_{kl}(t) + \int_0^t \Pi_{ijkl}(t, \tau)\sigma_{kl}(\tau)\,(d\tau)^\alpha. \tag{13}$$

Соответствующие (13) дифференциальные уравнения с дробными производными имеют вид

$$\frac{d^\alpha\sigma}{d\tau^\alpha} = C\,\frac{d^\alpha\varepsilon}{d\tau^\alpha} + R\varepsilon, \qquad \frac{d^\alpha\varepsilon}{d\tau^\alpha} = S\,\frac{d^\alpha\sigma}{d\tau^\alpha} + n\sigma. \tag{13'}$$

Например, для непрерывных процессов ($\alpha = 1$) для сред Максвелла и Фохта уравнения ($13'$) принимают вид [22]

$$\frac{d\sigma}{dt} = \eta\,\frac{d\varepsilon}{dt} + \mu\varepsilon, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\mu}\,\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta}\,\sigma,$$

где η — коэффициент вязкости среды; μ — модуль сдвига.

Для среды Зинера [22], которая объединяет среды Максвелла и Фохта, уравнение примет вид

$$\sigma + \tau_\varepsilon\,\frac{d^\alpha\sigma}{dt^\alpha} = \mu\Big(\varepsilon + \tau_\sigma\,\frac{d^\alpha\varepsilon}{dt^\alpha}\Big), \tag{14}$$

где $\mu_0 = \mu(\omega)\big|_{\omega=0}$; $\mu_\infty = \lim\limits_{\omega\to\infty}\mu(\omega)$; $\tau_\varepsilon/\tau_\sigma = \mu_0/\mu_\infty$; ω — частота воздействия на образец.

Для решения уравнений с дробными производными (14) удобно использовать преобразование Фурье:

$$\bar f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-i\omega t\right)dt; \tag{15}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar f(\omega)\exp\left(i\omega t\right)d\omega. \tag{16}$$

С учетом правила нахождения дробной производной (см. (11) и [19]) из (15) получим

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^\alpha \bar f(\omega)\exp\left(i\omega t\right)d\omega. \tag{17}$$

Применяя преобразование Фурье (15) к (14) с учетом (17), получим $\bar\sigma + (i\omega\tau)^\alpha\bar\sigma = 2\mu_0(\bar\sigma + (i\omega\tau)^\alpha\bar\varepsilon)$, откуда $\mu(i\omega) = \mu_\infty - (\mu_\infty - \mu_0)/[1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha]$. Учитывая, что $\mu(i\omega) = \mu + i\mu'$ ($\mu = \operatorname{Re}\mu(i\omega)$, $\mu' = \operatorname{Im}\mu(i\omega)$), получим

$$\begin{aligned}\frac{\mu_\infty - \mu}{\mu_\infty - \mu_0} &= \frac{1 + (\omega\tau)^\alpha\cos\left(\pi\alpha/2\right)}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha[\cos\left(\pi\alpha/2\right) + (\omega\tau)^\alpha]},\\ \frac{\mu_\infty - \mu'}{\mu_\infty - \mu_0} &= \frac{(\omega\tau)^\alpha\sin\left(\pi\alpha/2\right)}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha[\cos\left(\pi\alpha/2\right) + (\omega\tau)^\alpha]}.\end{aligned} \tag{18}$$

Параметр α связан с дробной размерностью фрактального множества и является характеристикой локализации (размытости) релаксационного спектра.

На рис. 2,*а*,*б* представлены дисперсионные зависимости действительной μ и мнимой μ' частей относительного модуля сдвига вязкоупругой среды от $\lg t^*$ ($t^* = \omega\tau$) (кривая *1* — $\alpha = d_f = 0{,}63$ (множество Кантора); кривая *2* — $\alpha = 0{,}9$).

Для определения зависимости плотности распределения релаксационного спектра от параметра α рассмотрим следующую задачу.

Пусть деформации описываются ступенчатой функцией $\varepsilon = \varepsilon_0\eta(t)$, $d\varepsilon/dt = \varepsilon_0\delta(t)$, где $\eta(t)$ — функция Хевисайда; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Тогда для напряжения σ можно записать [22] $\sigma = 2\mu(t)\varepsilon_0$, $\mu(t) = \mu_0 + \Phi_\mu(t)$, где для среды Зинера функция $\Phi_\mu(t)$ имеет вид

$$\Phi_\mu(t) = (\mu_\infty - \mu_0)\exp\left(-t/\tau_\varepsilon\right). \tag{19}$$

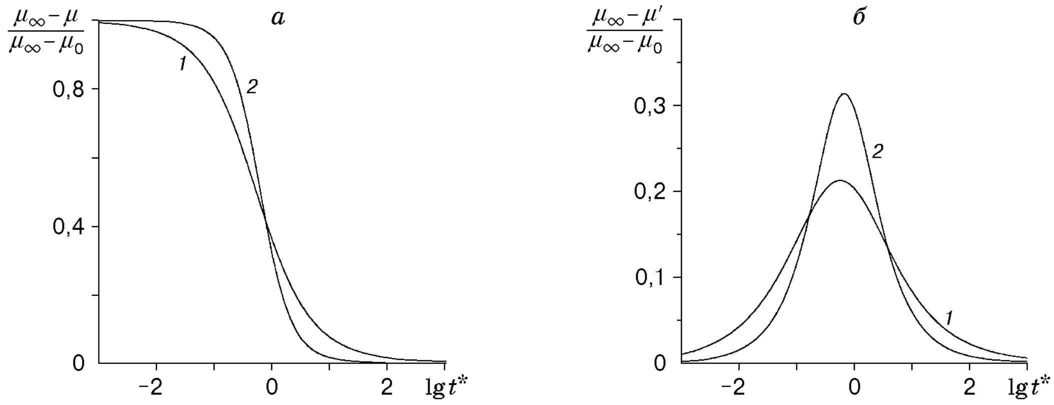

Рис. 2

Если среда описывается дискретным распределением времени релаксации τ_i, то по аналогии с (19) можно записать

$$\Phi_\mu(t) = (\mu_\infty - \mu_0)\sum_i N_i \exp(-t/\tau_\varepsilon^i), \qquad \sum_i n_i = 1. \tag{20}$$

С учетом перехода от интегральной суммы к интегралу (12) согласно (20) получим

$$\Phi_\mu(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\exp(-t/\tau_\varepsilon)(d\tau)^\alpha, \tag{21}$$

где $f_1(\tau)$ — плотность релаксационного спектра. Формулу (21) можно преобразовать к виду

$$\Phi_\mu(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-t/\tau_\varepsilon)(d\ln\tau)^\alpha.$$

Для функции распределения времени релаксации $f(\tau)$ условие нормировки имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(d\ln\tau)^\alpha = \mu_\infty - \mu_0.$$

Таким образом, зависимость между модулем сдвига $\mu(t)$ и функцией распределения $f(\tau)$ имеет вид

$$\mu(t) = \mu_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-t/\tau_\varepsilon)\,(d\ln\tau)^\alpha.$$

Если известно фурье-преобразование $\mu(t)$, то фурье-преобразование функции $f(\tau)$ имеет вид [21]

$$\bar f(1/\omega) = \pm(1/\pi)\operatorname{Im}\mu(\omega\exp(\pm i\pi)). \tag{22}$$

Подставляя в (22) значения $\mu'(t)$ из (18), можно определить $f(\tau)$ для среды Зинера:

$$f(\tau) = \frac{(\mu_\infty - \mu_0)\sin(\alpha\pi)}{2\pi\{\operatorname{ch}[\ln(\alpha(\tau/\tau_\varepsilon))] + \cos(\alpha\pi)\}}.$$

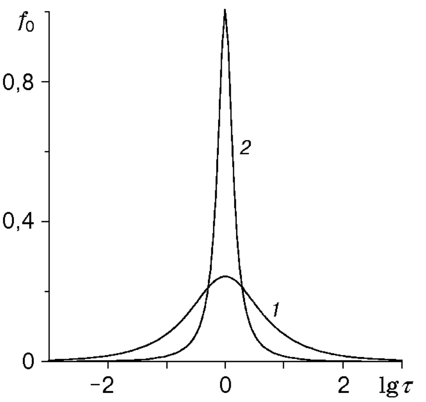

Рис. 3

Зависимость нормированной плотности распределения среды Зинера $f_0(\tau) = f(\tau)/(\mu_\infty - \mu_0)$, или

$$f_0(\tau) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi\{\mathrm{ch}\,[\alpha \ln(\tau/\tau_\varepsilon)] + \cos(\alpha\pi)\}}$$

для двух динамических состояний представлена на рис. 3. Для $\alpha = 0{,}9$ (кривая *2* на рис. 3), т. е. среды, близкой к динамике с непрерывными состояниями, функция f_0 в полулогарифмических координатах переходит в дельта-функцию Дирака при $\alpha = 1$. Для среды с хаотической динамикой, порождающей состояния с фрактальной размерностью $\alpha = d_f = 0{,}63$ (кривая *1* на рис. 3), равной размерности канторовской «пыли», функция f_0 имеет размытый спектр, т. е. порядок дробной производной α можно рассматривать как характеристику размытости релаксационного спектра.

Зависимость между дисперсией времени релаксации хаотической динамики γ^2 и параметром α имеет вид

$$\gamma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln^2(\tau/\tau_\varepsilon) f_0(\tau)\, d\ln\tau = \frac{\pi^2}{3}\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2},$$

т. е. $\gamma^2 = (\pi^2/3)(1-d_f^2)/d_f^2$.

Таким образом, на основе вязкоупругих свойств неупорядоченной фрактальной среды установлена связь между фрактальной размерностью, дробной производной и размытостью релаксационного спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mandelbrot B. B.** Fractals, from chance and dimension. San Francisco: Freeman, 1977.
2. **Федер Е.** Фракталы. М.: Мир, 1991.
3. **Pietronero L., Tossati E.** Fractals in physics. Amsterdam: Norton-Holland, 1986.
4. **Schuster H. G.** Deterministic chaos. An introduction physic. Weinheim, 1984.
5. **Stanley H. E.** Introduction in phase transition and critical phenomena. L.: Oxford Univ. Press, 1971.
6. **Privalko V. P., Novikov V. V.** The science of heterogeneous polymers. Structure and thermophysical properties. Chichester; New York; Brisbane; Toronto; Singapore: J. Wiley, 1995.
7. **Новиков В. В., Белов В. П.** Обратное ренормгрупповое преобразование в задаче о протекании по связям // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1994. Т. 106, вып. 3. С. 780–789.

8. **Блюмен А., Клафтер Дж., Цумофен Г.** Реакция в фрактальных моделях в неупорядоченных системах // Фракталы в физике: Тр. VI Междунар. симп., Триест (Италия), 9–12 июля, 1985 г. М.: Мир, 1988. С. 561–574.
9. **Шлезингер М., Клафтер Дж.** Природа временных иерархий, определяющих релаксацию в неупорядоченных системах // Там же. С. 553–560.
10. **Blumen A., Klafter J., White S., Zumofen G.** Continuous-time random walks on fractals // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53, N 4. P. 1301–1304.
11. **Blumen A., Klafter J.** Fractal behavior in trapping and reaction: A random walk study // J. Statist. Phys. 1984. V. 36. P. 561–565.
12. **Boltzman L.** Zur theorie der elastischen nachwirkung // Ann. Phys. Chem. 1876. V. 7. P. 614–621.
13. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов и конструкций. М.: Наука, 1966.
14. **Нигматуллин Р. Р.** Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теорет. и мат. физика. 1992. Т. 90, № 3. С. 354–367.
15. **Riewe F.** Mechanics with fractional derivatives // Phys. Rev. E. 1997. V. 55, N 3. P. 3581–3592.
16. **Compte A.** Stochastic foundations of fractional dynamics // Phys. Rev. E. 1996. V. 53, N 4. P. 4191–4193.
17. **Douglas J. F.** Integral equation approach to condensed matter relaxation // J. Phys. Conden Matter. 1999. V. 11. P. A329–A340.
18. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
19. **Oldham K. B., Spanier J.** The fractional calculus. N. Y.; L.: Acad. Press, 1974.
20. **Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д.** Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физ. наук. 1985. Т. 146, вып. 3. С. 493–501.
21. **Ферри Дж.** Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
22. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
23. **Jonsher A. K.** Dielectric relaxation in solids. L.: Chelsea Dielectric Press, 1983.
24. **Rammal R., Toulouse G., Virasoro M. A.** Ultrametricity for physicists // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 58. P. 765–768.
25. **Binder K., Joung A. P.** Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts and open questions // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 801–805.
26. **Гинзбург С. Л.** Необратимые явления в спиновых стеклах. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 13/I 1998 г.,
в окончательном варианте — 15/XII 1998 г.