

Функции  $f(\zeta)$ ,  $g(\zeta)$  и  $h(\zeta)$ , определенные формулами (5.1), удовлетворяют уравнениям (1.15)–(1.17) и условиям на свободной границе  $\zeta = d$  при любом значении  $d$ , которое растет почти линейно с увеличением  $\omega$ . Расчеты проводились до  $\omega = 50$ .

Построенные решения описывают течения, для которых толщина слоя  $D$  изменяется по закону  $D = d\sqrt{1 - \tau}$ . За конечное время  $D(\tau)$  обращается в нуль, т. е. поверхность «высыхает». Эти решения, по-видимому, не исчерпывают весь класс решений задачи (1.15)–(1.19). Например, возможно существование решений, имеющих при больших значениях  $\omega$  асимптотику не (5.1), а  $f(\zeta) = 0$ ,  $g(\zeta) = 0$ ,  $h(\zeta) = (\zeta - d)/2$ .

Заметим, что из решений, построенных в пп. 3–5 с помощью преобразования растяжения переменных  $F, G, H, \xi, \tau$ , можно получить автомодельные решения задачи (1.5)–(1.13) общего вида

$$F = (a + b\tau)^{-1}f(\zeta), G = (a + b\tau)^{-1}g(\zeta), H = (a + b\tau)^{-1/2}a(\zeta), \\ \zeta = \xi/\sqrt{a + b\tau}.$$

Автор благодарит В. В. Пухначева за обсуждение работы и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Higgins B. G. Film flow on a rotating disk // Phys. Fluids.— 1986.— V. 29, N 11.
2. Emslie A. G., Bonner F. T., Peck L. G. Flow of a viscous liquid on a rotating disk // J. Appl. Phys.— 1958.— V. 29, N 5.
3. Thomas I. M. High laser damage threshold porous silica antireflective coating // Appl. Phys.— 1956.— V. 25, N 9.
4. Matsumoto S., Saito K., Takashima Y. Flow of a viscous liquid on a rotating disk // Bull. Tokyo Inst. Technol.— 1972.— N 409.
5. Matsumoto S., Saito K., Takashima Y. Thickness of liquid film on a rotating disk // Bull. Tokyo Inst. Technol.— 1973.— N 416.
6. Matsumoto S., Saito K., Takashima Y. Thickness of liquid film on a rotating disk // J. Chem. Engng Jap.— 1973.— V. 6, N 6.
7. Karman Th. von. Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM.— 1921.— Bd 1, N 4.
8. Пухначев В. В. Неуставившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично-инвариантными решениями уравнений Навье — Стокса // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.— Вып. 10.

г. Новосибирск

Поступила 6/XI 1987 г.,  
в окончательном варианте — 10/V 1988 г.

УДК 533.6.011.8

В. Д. Акиншин, А. М. Макаров, В. Д. Селезнев, Ф. М. Шарипов

### ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КОРОТКОМ КАНАЛЕ ВО ВСЕМ ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ КНУДСЕНА

В [1] показано, что в литературе течение разреженного газа в конечном канале рассматривалось в узком диапазоне чисел Кнудсена или в грубых предположениях, справедливых только для достаточно длинных каналов. Там эта задача решена в широком диапазоне, но в предположении, что молекулы, входящие в канал через его торцы, имеют абсолютную максвелловскую функцию распределения, что также ограничивает применение ее результатов конечными, но достаточно длинными каналами. В связи с этим возникает необходимость в точном решении данной задачи во всем диапазоне чисел Кнудсена с учетом формирования течения в предвходных областях сосудов.

1. Рассмотрим плоский капал длиной  $l$ , высотой  $2a$ , бесконечный в направлении  $z$ , соединяющий два полубесконечных сосуда с одним и тем же газом (рис. 1). В сосудах на достаточно большом удалении от канала газ поддерживается в равновесных условиях при давлениях  $p_1$  и  $p_2$  и одинаковых температурах  $T$ . Под действием перепада давления газ движется в направлении  $x$ .

Введем масштабы:  $a$ ,  $n_1$ ,  $\beta^{1/2} = (2RT)^{1/2}$ ,  $n_1\beta^{-3/2}$ ,  $\eta_1 = n_1 m v \lambda_1 / 2$  для длины, плотности  $n$ , скоростей  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{u}$ , функции распределения  $f$  и коэффициента вязкости  $\eta$ . Здесь  $R$  — газовая постоянная,  $m$  — масса молекулы,  $v = (8RT/\pi)^{1/2}$  — тепловая скорость молекул,  $\lambda_1$  — длина свободного пробега молекулы в первом сосуде. Далее все выражения записаны в этих масштабах.

Предположим, что относительный перепад давления много меньше единицы ( $|p_2 - p_1|/p_1 \ll 1$ ), все молекулы газа отражаются от стенок канала и сосудов диффузно. За исходное уравнение для функции распределения примем БГК-модель уравнения Больцмана [2]

$$\mathbf{c} \partial f / \partial \mathbf{r} = \delta (f^0 - f),$$

где  $\delta = \sqrt{\pi} a / 2 \lambda_1$  — обратное число Кнудсена;  $f^0(\mathbf{r}, \mathbf{c}) = (n(\mathbf{r}) / \pi^{3/2}) \cdot \exp[-(\mathbf{c} - \mathbf{u}(\mathbf{r}))^2]$ ;  $n(\mathbf{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{c}) d\mathbf{c}$ ;  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{c}) \mathbf{c} d\mathbf{c}$ ;  $\mathbf{c}$  — скорость молекулы;  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ .

В [1] приведены процедура линеаризации БГК-уравнения и вывод интегральных уравнений для моментов функции распределения. Поэтому выпишем лишь окончательный результат:

$$q_i(\mathbf{r}) = \int \int \sum_{j=1}^3 K_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int K_{i4}(\mathbf{r}, x') q_4(x') dx' + \Phi_i(\mathbf{r})$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

$$q_1 = (n - 1)p_1/\Delta p, q_2 = u_x p_1/\Delta p, q_3 = u_y p_1/\Delta p, q_4(x) = (n_w(x) - 1)p_1/\Delta p$$

( $n_w$  — приведенное число молекул, падающих в единицу времени на единицу площади). Громоздкие выражения для  $K_{ij}$  и  $\Phi_i$  также опустим, так как они приведены в [1]. Отличие данных интегральных уравнений от уравнений из [1] в том, что здесь ведется интегрирование по «видимой» из точки  $(x, y)$  части области, включающей в себя как полость канала, так и сосуды. Полученные интегральные уравнения решались методом Крылова — Боголюбова [1]. Но наличие бесконечных предвходных областей существенно усложнило численные трудности. Во-первых, это связано с увеличением числа ячеек, на которые разбивается поле течения. Во-вторых, при численном расчете нужно было ограничиться конечной предвходной областью, причем такой, которая бы обеспечила требуемую точность расчетов поля течения по крайней мере внутри канала и в областях, прилегающих к входным сечениям канала. Как показывает анализ полученных результатов, для погрешности 2% обязательно, чтобы граница, проводимая в предвходной области, была удалена от входного сечения канала не менее чем на 40 длин свободного пробега молекулы газа и не менее чем на расстояние  $4a$ .

С увеличением длины канала  $L = l/a$  и параметра разреженности  $\delta$  численные трудности резко возрастают, поэтому необходимы специальные исследования соответствующих предельных случаев.

2. Когда длина канала много больше длины свободного пробега молекулы ( $\delta L \gg 1$ ), поля течения вблизи торцов и в предвходных областях становятся подобными при фиксированном  $\delta$  и разных  $L$ . Как показано в [1], на основе этого можно получить связь между полями течения и расходами газа в каналах различной длины и избавиться от просчетов на ЭВМ большого количества вариантов, требующих существенных затрат

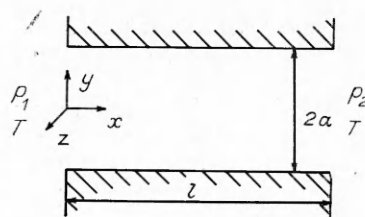


Рис. 1

Т а б л и ц а 1

$\delta$	$L_{\min}$	$\Delta L$	$G_{\infty}$	$G_{\infty}$ [3]
0,1	200	7,04	1,79	1,8079
0,2	100	5,34	1,63	1,6408
0,5	40	4,04	1,53	1,5389
1,0	20	3,26	1,58	1,5942
2,0	10	2,86	1,84	1,8440
4,0	5	2,88	2,43	2,4472

машинного времени. Приведенный расход газа представим в виде

$$(2.1) \quad G = \frac{p_1 L}{\Delta \bar{p}} \int_{-1}^1 u_x(x, y) dy = \frac{L}{L + \Delta \bar{L}} G_{\infty}$$

( $G_{\infty}$  — приведенный расход газа в бесконечном канале,  $\Delta L$  — величина, не зависящая от длины канала, определяемая из анализа поля течения [1]). Из анализа численных расчетов видно, что для погрешности 2 % необходимое условие применения (2.1) — неравенства  $\delta L \geq 20$ ,  $L \geq 4$ . В табл. 1 представлены значения  $G_{\infty}$  и  $\Delta L$  для некоторых  $\delta$ . Заметим, что минимальная длина канала, для которой справедливы вышеприведенные рассуждения, может быть сравнимой с  $\Delta L$ . Из табл. 1 видно, что расхождение с результатами расчетов расхода, проведенных непосредственно для бесконечного канала [3], не превышает погрешности вычислений.

3. В предельном случае сплошной среды ( $\delta \rightarrow \infty$ ) течение газа описывается системой уравнений Навье — Стокса [4], к которой присоединяется уравнение непрерывности. При решении кинетического уравнения мы ограничились линейным приближением по перепаду давления. Поэтому и в уравнениях механики сплошной среды сохраним члены только первого порядка малости по  $\Delta p/p_1$ . Используя безразмерные величины, получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (1/\delta)(\partial^2 u_x / \partial x^2 + \partial^2 u_x / \partial y^2) &= (1/p_1) \partial p / \partial x, \\ (1/\delta)(\partial^2 u_y / \partial x^2 + \partial^2 u_y / \partial y^2) &= (1/p_1) \partial p / \partial y, \quad \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y = 0. \end{aligned}$$

На стенках канала и сосудов примем условия прилипания  $u = 0$ . На бесконечном удалении от канала в обоих сосудах газ имеет различные давления  $p_1$  и  $p_2$ .

Для решения системы уравнений (3.1) удобно перейти к переменным вихря  $\omega$  и функции тока  $\psi$  [5]:

$$\omega = (1/\delta)(\partial u_x / \partial y - \partial u_y / \partial x), \quad (1/\delta)u_x = \partial \psi / \partial y, \quad (1/\delta)u_y = -\partial \psi / \partial x.$$

Несложно показать, что система уравнений (3.1) соответствует системе [5]

$$(3.2) \quad \Delta \omega = 0, \quad \Delta \psi = \omega.$$

Так как поле течения обладает симметрией [1], система (3.2) решалась в верхней правой четверти канала и сосуда. Граничные условия в этом случае примут вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x = L/2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \partial \psi / \partial x = 0, \quad \partial \omega / \partial x = 0; \\ L/2 \leq x \leq \infty, \quad y = 0, \quad \psi = 1/2, \quad \omega = 0; \\ L/2 \leq x \leq L, \quad y = 1, \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0; \\ x = L, \quad 1 \leq y \leq 0, \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial x = 0; \\ \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad \partial \psi / \partial x = 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0. \end{aligned}$$

Функция  $\psi(x, y)$  определена с точностью до произвольной постоянной, поэтому вдоль границы поля течения она приравнивается нулю. В силу условия прилипания должна равняться нулю и нормальная производная от  $\psi$  на всей границе течения газа. На оси симметрии  $y = 0$   $\psi = 1/2$ .

Это означает, что расход газа через поперечное сечение канала всегда равен единице. Искомая величина — перепад давления

$$(3.4) \quad \frac{\Delta p}{\rho_1} = \frac{2}{\delta} \int_{L/2}^{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} dx.$$

Зная перепад давления, находим  $G$ , пропорциональный  $\delta$ .

При численном решении (3.2), как и в случае кинетического уравнения, необходимо ограничиться конечной областью течения. Размеры рассматриваемой области можно уменьшить, если вместо последнего условия (3.3) на ее границе использовать асимптотику поля течения, которую можно получить, принимая входное сечение за точечный источник массы. При этом для  $\omega$  и  $\psi$  имеем

$$\omega = \frac{4y(x-L)}{\pi[(x-L)^2 + y^2]}, \quad \psi = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(x-L)y}{(x-L)^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x-L} \right\} + \frac{1}{2}.$$

Как показывают расчеты, для погрешности 2% размеры рассматриваемой области течения должны в 5 раз превышать высоту канала.

Система (3.2) с граничными условиями (3.3) решалась на регулярной сетке по разностной схеме

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \frac{1}{4} (\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1}), \\ \psi_{ij} &= \frac{1}{4} (\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} - \omega_{ij} \Delta x^2) \\ (\omega_{ij} &= \omega(x_i, y_j), \psi_{ij} = \psi(x_i, y_j), \Delta x = x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Найдя зависимость  $\omega$  от координат, используя (3.4), имеем  $G = L\rho_1/\Delta p = A\delta$ .

В табл. 2 приведены значения коэффициента пропорциональности  $A$ . Для  $L = \infty$  его можно получить аналитически, решая непосредственно уравнения (3.1).

Для сшивания результатов решения кинетического уравнения и уравнения Навье — Стокса расход газа представим как

$$(3.5) \quad G = \delta(A + \sigma\lambda/a).$$

Величина  $\sigma$  характеризует вклад скольжения в расход. Ее значение найдем из условия, что расход, полученный из решения кинетического уравнения при максимальном  $\delta = 4$ , имеет вид (3.5). Из табл. 2 видно, что с увеличением длины канала вклад скольжения в расход растет. Как показывают оценки, погрешность формулы (3.5) не превышает 2,5% в диапазоне  $\delta \geq 4$ .

4. Результаты расчетов расхода как непосредственно из решения кинетического уравнения, так и по формулам (2.1) и (3.5) приведены на рис. 2. В свободномолекулярном режиме расход в пределах погрешности вычислений совпадает с [6]. Для сравнения на графике штриховой линией даны результаты [1], где не учитывалось изменение функции распределения в предвходной области. В табл. 3 для разных  $L$  и  $\delta$  представлены точные значения расхода (в левых столбцах для каждой  $L$ ) и относительное отличие точного и приближенного значений из [1] (в правых столбцах). Из рис. 2 и табл. 3 видно, что для коротких каналов и больших  $\delta$  предвходная область оказывает существенное влияние на формирование газового потока.

Заметим, что для больших длин канала ( $L > 10$ ) зависимость  $G$  от  $\delta$  носит немонотонный характер. При  $\delta \sim 0,5$  наблюдается минимум, который получил название кнудсеновского; при  $L \leq 10$  он исчезает. Немаловажный интерес представляет расход газа через

Т а б л и ц а 2

$L$	$A$	$\sigma$
2	0,1816	0,3088
10	0,2854	0,8444
20	0,3076	1,016
60	0,3244	1,155
$\infty$	0,3334	1,257

Таблица 3

$\delta$	$G$							
	$L$							
	2		10		20		60	
0,01	0,391	1 %	1,00	0 %	1,35	1 %	1,88	0 %
0,1	0,421	9 %	1,02	5 %	1,28	3 %	1,57	1 %
1	0,601	36 %	1,19	19 %	1,36	12 %	1,50	5 %
4	1,00	60 %	1,89	37 %	2,13	25 %	2,32	11 %

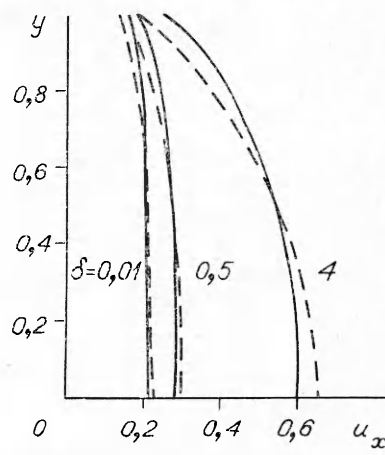
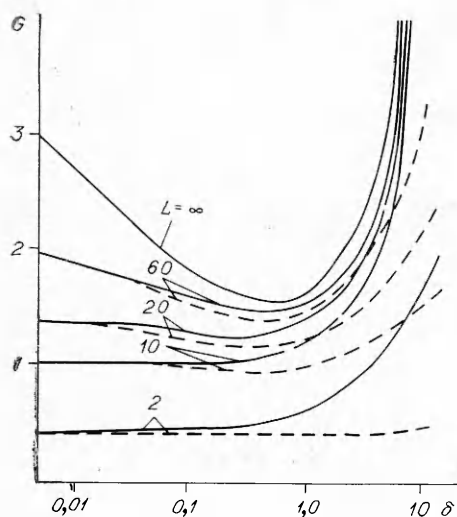


Рис. 2

Рис. 3

тонкую щель ( $L = 0$ ). Подробно этот случай рассмотрен в [7]. Здесь ограничимся приведением формулы, интерполирующей численные и аналитические результаты во всем диапазоне чисел Кнудсена:

$$M/M_0 = 1 - 0,15\delta \ln \delta / (1 + 0,004\delta \ln \delta) + (\pi^{3/2}/8)\delta$$

( $M$ ,  $M_0$  — массовый расход газа при произвольном числе  $\delta$  и в свободно-молекулярном режиме).

5. Рассмотрим поле течения. На рис. 3 показано изменение профиля скорости при различных  $\delta$  в канале длиной  $L = 2$ . В режиме, близком к свободномолекулярному, вплоть до промежуточного профили близки к однородным. С ростом  $\delta$  после промежуточного режима степень неоднородности резко увеличивается. Относительное отличие профилей скорости в разных сечениях канала слабо зависит от  $\delta$ . При  $\delta = 0,01$  на оси канала скорость изменяется на 5 %, при  $\delta = 4$  — на 7 %. Аналогичное поведение профилей скорости наблюдается и при других длинах канала.

Функция давления от продольной координаты на оси канала для

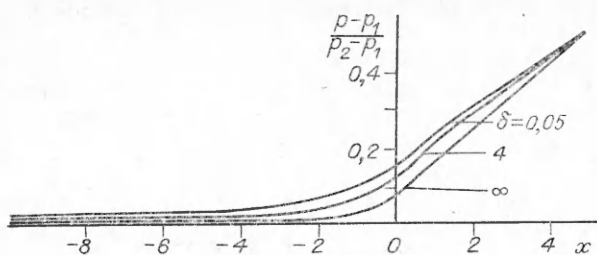


Рис. 4

$L = 10$  приведена на рис. 4, при всех  $\delta$  в канале она имеет линейный характер, причем наклон прямой слабо зависит от  $\delta$ . В предвходной области на достаточно больших расстояниях от канала давление стремится к своему значению на бесконечности по закону  $1/x^2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акинъшин В. Д., Макаров А. М., Селезнев В. Д., Шарипов Ф. М. Течение разреженного газа в плоском канале конечной длины в широком диапазоне чисел Кнудсена // ПМТФ.— 1988.— № 1.
2. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A. A model for collision process in gases // Phys. Rev.— 1954.— V. 94, N 3.
3. Cercignani C., Pagani C. D. Variational approach to boundary-value problems in kinetic theory // Phys. Fluids.— 1966.— V. 9, N 10.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1978.
5. Посконов В. М., Полетаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.— М.: Наука, 1984.
6. De Marcus W. C. The problem of Knudsen flow.— Tennessee, 1957.— (Rept/Oak Ridge Lab.; K — 1302).
7. Шарипов Ф. М., Акинъшин В. Д., Селезнев В. Д. Течение разреженного газа через тонкую щель.— Минск, 1987.— Деп. в ВИНТИ 17.06.87, № 4392—В87.

г. Свердловск,  
г. Москва

Поступила 21/III 1988 г.

УДК 533.6

В. М. Ковеня, А. С. Лебедев

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОГО ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ В БЛИЖНЕМ СЛЕДЕ

Исследование течения в следе за телом — важная задача аэродинамики. Это обусловлено, например, тем, что донное сопротивление тел вращения может составлять до 30 % их полного сопротивления, т. е. в значительной мере определять аэродинамику летательного аппарата. Большой интерес к изучению отрывного течения в следе отразился в появлении целого ряда теоретических и экспериментальных работ, достаточно полные обзоры которых даны в [1—5]. Картина течения в донной области сложна, многие ее фрагменты еще не поддаются теоретическому анализу. Упрощенные модели, разрабатываемые для исследования донных течений, а также интегральные и полуэмпирические методы расчета донного давления не достаточно универсальны, область применения этих методов ограничена лежащими в основе их построения упрощениями и допущениями.

По существующим представлениям в наиболее полной постановке отрывные течения описываются уравнениями Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа. В рамках этих уравнений может быть описано возникновение и развитие зон отрыва и других особенностей течения без привлечения дополнительной априорной информации. Однако численное интегрирование уравнений Навье — Стокса сопряжено со значительными трудностями, поэтому число работ, использующих такой подход при моделировании донных течений, сравнительно невелико (наиболее систематические исследования проведены в [5—7]); эти работы не охватывают все вопросы, связанные с изучением течения в следе, ввиду его сложности и зависимости от многих факторов.

В данной работе изучается ламинарное течение в ближнем следе за затупленным телом небольшого удлинения. Получены зависимости от чисел Маха и Рейнольдса набегающего потока ряда геометрических характеристик следа, относительного донного давления и его вклада в полное сопротивление тела. Приведены примеры влияния на донное давление формы тела и теплового режима на его поверхности. Обнаружено, что при некоторых параметрах набегающего потока в окрестности точки отрыва происходит формирование мелкомасштабных вихрей (аналогичное явление предсказывалось ранее в отдельных экспериментальных работах), а на оси симметрии в возвратном течении возможно возникновение локальной сверхзвуковой зоны.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Рассматривается течение около осесимметричного тела с вертикальным донным срезом. На тело под нулевым углом атаки со сверхзвуковой скоростью набегающий поток вязкого сжимаемого теплопроводного газа. В соответствии с теоретическими представлениями и на основании имеющихся опытных данных (см., например, [1, 3]) можно дать следующую схему отрывного течения в ближнем следе. Под действием инерционных сил, превосходящих силы вязкости, пограничный слой, сходящий с тела, отрывается от угла тела в точке  $G$  (рис. 1), расположенной несколько ниже угловой точки  $F$ . Оторвавшийся вязкий слой увлекает за собой часть газа, заключенного в донной области, понижает тем самым в ней давление и вместе с внешним потоком отклоняется к оси, где на некотором расстоянии от