УДК 539.2

С. В. Мелешко

О РЕШЕНИЯХ С ВЫРОЖДЕННЫМ ГОДОГРАФОМ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С УСЛОВИЕМ ТЕКУЧЕСТИ МИЗЕСА

Из решений с вырожденным годографом в теории пластичности широко используются простые волны, когда система уравнений, описывающая пластическое течение, гиперболическая и имеет две независимые переменные. Если число независимых переменных больше двух, то существуют лишь отдельные примеры построения таких решений в пластическом теле. В настоящей работе дана полная классификация двойных волн с функциональным произволом квазистационарных уравнений жесткопластического тела

$$\partial\sigma/\partial x_i + \partial S_{i\alpha}/\partial x_\alpha = 0; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \tag{2}$$

$$\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i = 2\Psi S_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3) \tag{3}$$

с условием текучести Мизеса

$$S_{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} = 2k^2. \tag{4}$$

Здесь (S_{ij})— девиатор тензора напряжений $(S_{\alpha\alpha} = 0)$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)'$— вектор скорости перемещений; σ — нормальное напряжение; k — предел текучести при сдвиге; Ψ — коэффициент пропорциональности в ассоциированном законе течения; по повторяющимся греческим индексам осуществляется суммирование от 1 до 3. Без ограничения общности считается $S_1 \neq 0$ $(S_i \equiv S_{ii},\ i = 1, 2, 3,\ S_3 = -S_1 - S_2)$.

Уравнения (3) неоднородны. Так как $S_1 \neq 0$, то из (3) при $i = j = 1$ находится $\Psi = \frac{1}{S_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$. И после исключения Ψ из остальных уравнений (3) получается замкнутая однородная система девяти квазилинейных дифференциальных уравнений относительно девяти неизвестных: (1), (2), (4) и

$$S_1(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i) - 2S_{ij}\partial v_1/\partial x_1 = 0\ \ (i, j = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Для решений системы (1), (2), (4), (5) типа двойных волн, имеющих функциональный произвол в общем решении задачи Коши, существуют только две возможности: либо функции v_1, v_2 такие, что якобиан $\partial(v_1, v_2)/\partial(x_1, x_2) \neq 0$, либо $v_i = v_i(v_1)$ $(i = 2, 3)$.

1. Пусть якобиан $\partial(v_1, v_2)/\partial(x_1, x_2) \neq 0$. В этом случае в качестве параметров двойной волны выбираются функции v_1, v_2, а все остальные (σ, S_{ij}, v_3) выражаются через них:

$$v_3 = v_3(v_1, v_2),\ \sigma = \sigma(v_1, v_2),\ S_{ij} = S_{ij}(v_1, v_2)\ \ (i, j = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Подстановка этих выражений в (1), (5) дает однородную систему квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка $G\mathbf{f} = 0$ с матрицей G, вектором-столбцом $\mathbf{f} = (v_{1,3}, v_{2,3}, v_{1,1}, v_{2,1}, v_{1,2}, v_{2,2})'$ и обозначениями $v_{i,j} = \partial v_i/\partial x_j$, $v_{3,i} = \partial v_3/\partial v_i$, $\sigma_i = \partial\sigma/\partial v_i$, $S_{kj,i} = \partial S_{kj}/\partial v_i$, $v_{3,in} = \partial^2 v_3/(\partial v_i \partial v_n)$ $(i, n = 1, 2;\ k, j = 1, 2, 3)$.

Для того чтобы не было редукции к инвариантным решениям [1], необходимо требовать удовлетворения неравенства $\operatorname{rank} G \leqslant 4$. Поскольку $S_1 \neq 0$, из вида матрицы G следует $\operatorname{rank} G \geqslant 4$. Поэтому для двойных волн, нередуцируемых к инвариантным решениям, выполняется $\operatorname{rank} G = 4$.

Если обозначить через a_{ij} определитель матрицы пятого порядка, составленной из элементов матрицы G, стоящих па пересечении первых четырех строк и i-й строки с четырьмя столбцами и j-м, то

(7) $$a_{ij} = 0,\ 5 \leqslant i \leqslant 8,$$

а четыре независимых уравнения системы $G\mathbf{f} = 0$ имеют вид

(8) $$\partial \mathbf{u}/\partial x_2 = G_2 \partial \mathbf{u}/\partial x_1;$$

(9) $$\partial \mathbf{u}/\partial x_3 = G_1 \partial \mathbf{u}/\partial x_1,$$

где

$$\mathbf{u} = (v_1, v_2)';\ \xi = (2S_{23} - 2S_{12}v_{3,1} - S_2 v_{3,2})/S_1;$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2S_{12}/S_1 & -1 \\ S_2/S_1 & 0 \end{pmatrix},\quad G_1 = \begin{pmatrix} 2S_{13}/S_1 - v_{3,1} & -1 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}.$$

Некоторые уравнения $a_{ij} = 0$ дают соотношения для нахождения функции $\sigma = \sigma(v_1, v_2)$:

(10) $$\sigma_1 = -S_{23,1}v_{3,2} + S_{23,2}v_{3,1} + S_{12,2} - S_{2,1},$$
$$\sigma_2 = S_{13,1}v_{3,2} - S_{13,2}v_{3,1} + S_{12,1} - S_{1,2}.$$

После исключения вторых производных $\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j}(i, j = 1,\ 2,\ 3$, кроме $i = j = 1)$ в продолженной системе (8), (9) остается $(G_1G_2 - G_2G_1)\,\partial^2\mathbf{u}/\partial x_1^2 = \Phi(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}/\partial x_1)$, значит, максимально возможный произвол в решении системы (8), (9) при заданных функциях (6) определяется числом $2 - r$ $(r \equiv \operatorname{rank}(G_1G_2 - G_2G_1))$. Поэтому для существования двойных волн в идеальном жесткопластическом теле, имеющих функциональный произвол в общем решении задачи Коши и нередуцируемых к инвариантным решениям, необходимо, чтобы $r \leqslant 1$.

Для дальнейшего выписывается выражение матрицы

$$G_1G_2 - G_2G_1 = \frac{2}{S_1}\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ (S_2Z_2 + S_{12}Z_1)/S_1 & -Z_1 \end{pmatrix},$$

где $Z_1 = S_{23} - S_{12}v_{3,1} - S_2v_{3,2}$; $Z_2 = -S_{13} + S_1v_{3,1} + S_{12}v_{3,2}$.

Рассматриваются последовательно случаи $r = 0$ и $r = 1$.

1.1. Пусть $r = 0$, тогда $G_1G_2 - G_2G_1 = 0$ и, следовательно, $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$ или

(11) $$S_{23} = S_{12}v_{3,1} + S_2v_{3,2},\ S_{13} = S_1v_{3,1} + S_{12}v_{3,2}.$$

Если дифференцировать полным образом D_3 уравнения (8) по x_3, вычесть из них продифференцированные полным образом D_2 по x_2 уравнения (9), подставить производные $\partial\mathbf{u}/\partial x_2$, $\partial\mathbf{u}/\partial x_3$ из (8), (9), то с учетом (11) получаются две однородные квадратичные формы относительно первых производных $\partial\mathbf{u}/\partial x_1$:

(12) $$g(S_{12}v_{3,22} + S_1v_{3,12}) = 0,\ g(S_1v_{3,11} - S_2v_{3,22}) = 0.$$

Здесь $g \equiv S_2\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 - 2S_{12}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + S_1\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2.$

Из запрета на редукцию к инвариантному решению следует $g \neq 0$, но тогда из (12) находятся

(13) $$v_{3,12} = -S_{12}v_{3,22}/S_1,\ v_{3,11} = S_2v_{3,22}/S_1.$$

Если $v_{3,22} = 0$, то $v_3 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3$ $(c_i = \text{const})$. Поворотом осей координат и сдвигом такое решение редуцируется к плоской деформации, поэтому $v_{3,22} \neq 0$.

Удовлетворение (13) обеспечивает тождественное выполнение (12), являющихся необходимыми и достаточными условиями инволютивности переопределенной системы (8), (9). Кроме того, отметим, что двойная волна в этом случае будет решением с прямолинейными образующими.

Осталось провести анализ совместности уравнений (4), (7), (11), (13). Ввиду громоздкости выкладок этот анализ проводился на ЭВМ [5]. Все компоненты тензора напряжений определяются через функцию $v_3(v_1, v_2)$ и ее производные до второго порядка; из уравнений (7) независимыми будут только (10), все остальные удовлетворяются тождественно ($a_{kl} = 0$, $5 \leqslant k \leqslant 8$); на функцию $v_3(v_1, v_2)$ получается переопределенная система двух дифференциальных уравнений: одно уравнение второго порядка и одно — четвертого. Из них выводятся явные выражения для всех производных пятого порядка от $v_3(v_1, v_2)$ по переменным v_1 и v_2, поэтому $v_3(v_1, v_2)$ находится с константным произволом. Из-за громоздкости выкладок и ограниченности памяти ЭВМ дальнейшего анализа совместности данной системы провести не удалось. Она совместна и одно из ее решений с произволом в две постоянные приведено в [2]. По-видимому, других решений кроме [2] у этой системы нет.

1.2. Пусть $r = 1$, тогда $\operatorname{rank} G = 1$, что соответствует выполнению соотношений ($a \equiv hv_{3,2} - v_{3,1}$)

(14) $$Z_1^2 + Z_2^2 \neq 0;$$

(15) $$S_{23} + hS_{13} = -(S_1 h + S_{12})a,$$

где

$$S_{12}^2 - S_1 S_2 \geqslant 0; \; h = (-S_{12} \pm (S_{12}^2 - S_1 S_2)^{1/2})/S_1.$$

Так как $\partial(v_1, v_2)/\partial(x_1, x_2) \neq 0$, то делается переход к новым независимым переменным (v_1, v_2, x_3):

(16) $$x_1 = P(v_1, v_2, x_3), \; x_2 = Q(v_1, v_2, x_3).$$

При этом система (8), (9) на функции $v_i(x_1, x_2, x_3)$ ($i = 1, 2$) переходит в систему дифференциальных уравнений на функции $P(v_1, v_2, x_3)$, $Q(v_1, v_2, x_3)$, которая после алгебраических преобразований приводится к

(17) $$S_1 P_1 - S_2 Q_2 = 0, \; S_1 P_2 + S_1 Q_1 + 2S_{12} Q_2 = 0,$$
$$S_1(Q_3 + v_{3,2})Q_1 + (2S_{12}(Q_3 + v_{3,2}) + S_1(P_3 + v_{3,1}) - 2Z_2)Q_2 = 0,$$
$$S_1(P_3 + v_{3,1})Q_1 - (S_2(Q_3 + v_{3,2}) + 2Z_1)Q_2 = 0.$$

Здесь $P_i = \partial P/\partial v_i$, $Q_i = \partial Q/\partial v_i$ ($i = 1, 2$); $P_3 = \partial P/\partial x_3$; $Q_3 = \partial Q/\partial x_3$;

(18) $$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 \neq 0.$$

Система (17) линейна и однородна относительно P_i, Q_i ($i = 1, 2$). В силу неравенства (18) ее определитель необходимо должен обращаться в нуль, т. е. ($\gamma = \pm 1$)

(19) $$S_1(P_3 + v_{3,1}) = Z_2 - S_{12}(Q_3 + v_{3,2}) + \gamma((S_1 h + S_{12})(Q_3 + v_{3,2}) - Z_2).$$

Далее рассмотрим два варианта $\gamma = -1$ и $\gamma = +1$.

При $\gamma = -1$ возникает противоречие условию (14).

Пусть $\gamma = +1$. Тогда после интегрирования (19) по x_3

(20) $$P = hQ + x_3 a + \chi,$$

где $\chi = \chi(v_1, v_2)$— произвольная функция; $a_i \equiv \partial a/\partial v_i$; $\chi_i = \partial\chi/\partial v_i$; $h_i \equiv \partial h/\partial v_i$; $i = 1, 2$.

Подстановка (20) в (17) с учетом (15) дает

(21) $$Q(h_1 - hh_2) + x_3(a_1 - ha_2) + \chi_1 - h\chi_2 = 0;$$

(22) $$S_1 Q_1 + (hS_1 + S_{12})Q_2 = -\psi;$$

(23) $$Q_2(2S_{13} - S_1 v_{3,1} - v_{3,2}(hS_1 + S_{12})) - \psi Q_3 = \psi v_{3,2};$$

(24) $$(2Q_2(hS_1 + S_{12}) + \psi)a = 0 \; (\psi \equiv S_1(h_2 Q + x_3 a_2 + \chi_2)).$$

При дальнейшем исследовании системы (21)—(24) последовательно изучаются два случая $a \neq 0$ и $a = 0$.

Если $a \neq 0$ и $hS_1 + S_{12} \neq 0$, то из (22) и (24) $Q_1 = hQ_2$, но тогда из (21) и (20) следует противоречие условию (18). Поэтому если $a \neq 0$, то $hS_1 + S_{12} = 0$, значит, $\psi = 0$ и, следовательно, как и в предыдущем случае, получается противоречие условию (18).

Таким образом, $a = 0$. Согласно (15),

(25) $$S_{23} = -hS_{13},$$

а из (7) и определения h вытекает

(26) $$S_2 = -S_1;$$

(27) $$S_{12} = S_1(1 - h^2)/(2h),\ h \neq 0.$$

Подставив (25)—(27) в условие Мизеса (3), запишем

(28) $$S_1^2(1 + h^2)^2 + 4h^2(1 + h^2)S_{13}^2 = 4h^2k^2.$$

Уравнения (7) с учетом (25)—(28) сводятся только к

(29) $$h^2S_{1,1} + hS_{1,2} + S_1h_2(h^2 - 1) = 0.$$

Поскольку $Q_3 \neq 0$, то из (21) выводится

(30) $$h_1 = hh_2,\ \chi_1 = h\chi_2.$$

Если $h_2 = 0$, то $h = \text{const}$. Анализ оставшихся двух уравнений (10) приводит либо к случаю, когда $v_3 = c_1(v_2 + hv_1) + c_2$ (c_1, $c_2 = \text{const}$) (а это означает редукцию к плоской деформации), либо к случаю, когда $S_{ij} = \text{const}$. Поэтому необходимо, чтобы $h_2 \neq 0$. Тогда из условия $a = 0$ и из (30) установим $v_3 = v_3(h)$ и $\chi = \chi(h)$.

Так как $h_2 \neq 0$, то можно сделать замену переменных (v_1, v_2) на (h, λ), где функция $\lambda(v_1, v_2)$ такая, что

(31) $$\lambda_1 = -1/(1 + h^2)^{1/2},\ \lambda_2 = h/(1 + h^2)^{1/2}.$$

В новых переменных (22), (29) принимают вид

(32) $$h(1 + h^2)\partial S_1/\partial h + S_1(h^2 - 1) = 0;$$

(33) $$(1 + h^2)\partial Q/\partial h + hQ = -h\chi'.$$

Интегрируя уравнения (32) по h, находим

(34) $$S_1 = hc(\lambda)/(1 + h^2),$$

а из (27) и условия Мизеса следуют соотношения

(35) $$S_{12} = (1 - h^2)c(\lambda)/(2(1 + h^2)),\ S_{13} = c_1(\lambda)/(1 + h^2)^{1/2},$$

где $c(\lambda)$— произвольная пока функция, а $c_1 = \pm(k^2 - c^2/4)^{1/2}$.

После подстановки полученных выражений для компонент девиатора тензора напряжений (S_{ij}) в (10) имеется $\sigma = \sigma(h)$ и

(36) $$\sigma'h_2 = -h_2v_3'c_1' - ch_2/(1 + h^2) - c'/(2(1 + h^2)^{1/2}).$$

Уравнение (33) также интегрируется:

(37) $$Q = (g(h) + B(\lambda, x_3))/(1 + h^2)^{1/2}.$$

Здесь $B(\lambda, x_3)$— произвольная функция; функция $g = g(h)$ такая, что $g' = -h\chi'/(1 + h^2)^{1/2}$. При этом $P_1Q_2 - P_2Q_1 = h_2(Q + \chi')\partial B/\partial\lambda \neq 0$, а так как $Q_3 \neq 0$, то $B + g + \chi'(1 + h^2)^{1/2} \neq 0$, в результате (23) преобразуется к виду

(38) $$\partial B/\partial\lambda\,(f(\lambda, h)/(B + g + \chi'(1 + h^2)^{1/2})) + c\partial B/\partial x_3 + 2c_1 = 0$$
$$\left(f \equiv cv_3'(1 + h^2) - 2c_1(1 + h^2)^{1/2}/h_2\right).$$

После дифференцирования (38) по h и использования условия $\partial B/\partial\lambda \neq 0$ находится $(\partial/\partial h)(f/(B + g + \chi'(1 + h^2)^{1/2})) = 0$. Так как $\partial B/\partial x_3 \neq 0$, то $\partial f/\partial h = 0$ и $f(\partial/\partial h)(g + \chi'(1 + h^2)^{1/2}) = 0$.

Условие $f = 0$ приводит к противоречивым соотношениям, поэтому из последних уравнений получаются

(39) $$\chi = c_3 h + c_4, \quad g = -c_3(1 + h^2)^{1/2} \quad (c_3, c_4 = \text{const}).$$

Произвольные постоянные c_3, c_4 несущественны, например, $c_3 = c_4 = 0$.

Для нахождения $\partial h_2/\partial h$ в $\partial f/\partial h$ воспользуемся $\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{h_2(1+h^2)}\left(\frac{\partial}{\partial v_2} + h\frac{\partial}{\partial v_1}\right)$. Тогда

(40) $$\partial f/\partial h = 2c_1 h_{22}(1 + h^2)^{1/2}/h_2^3 + c\left(v_3''(1 + h^2) + 2hv_3'\right) = 0.$$

Рассмотрим три случая: $c_1 = 0$; $c_1 \neq 0$, $c' = 0$; $c_1 \neq 0$, $c' \neq 0$.

А. Предполагается, что $c_1 = 0$. Тогда из (36) определяем

(41) $$\sigma' = -c/(1 + h^2), \quad v_3' = b/(1 + h^2), \quad c_1 = \pm 2k \ (b = \text{const}).$$

При этом $f = cb$ и легко выписывается общее решение (38)

(42) $$\lambda B = bx_3 + \Phi(B)$$

с произвольной функцией $\Phi(B)$. Таким образом, общее решение нередуцируемой двойной волны в данном случае имеет две произвольные функции одного аргумента: одна при определении $h = h(v_1, v_2)$, другая — $\Phi = \Phi(B)$. Проанализируем это решение в исходном пространстве независимых переменных (x_1, x_2, x_3).

Из (16), (20) и (39) вытекает соотношение $h(v_1, v_2) = x_1/x_2$. Использование (15), (37), (39) и (42) дает $\lambda(v_1, v_2) = \beta(bx_3 + \Phi(R))/R$, где $\beta = \operatorname{sgn}(x_2)$, $R = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$. Выражения $h = h(v_1, v_2)$, $\lambda = \lambda(v_1, v_2)$ служат для неявного нахождения компонент скорости (v_1, v_2) как функций от независимых переменных (x_1, x_2, x_3).

Продифференцировав $h = h(v_1, v_2)$ и $\lambda = \lambda(v_1, v_2)$ по x_3 и использовав (30), (31), имеем $h\partial v_1/\partial x_3 + \partial v_2/\partial x_3 = 0$, $-\partial v_1/\partial x_3 + h\partial v_2/\partial x_3 = b/x_2$, откуда

(43) $$v_1 = -bx_2x_3/R^2 + g_1(x_1, x_2), \quad v_2 = bx_1x_3/R^2 + g_2(x_1, x_2).$$

Прежде чем найти функции $g_i(x_1, x_2)$ $(i = 1, 2)$, нужно выписать выражения для напряжений s_{ij}, σ и v_3. Для этого по аналогии с плоской деформацией вводится угол θ такой, что $h = (\cos 2\theta - \gamma)/\sin 2\theta$ $(\gamma = \pm 1)$.

Из (34), (35), (41) имеется

(44) $$S_{13} = S_{23} = 0, \ S_1 = -S_2 = -k\sin 2\theta, \ S_{12} = k\cos 2\theta, \ v_3 = b\theta + c_s.$$

Подстановка (43)—(44) в (8), (9) показывает, что (9) удовлетворяются тождественно, а (8) приводятся к

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} + 2\operatorname{ctg} 2\theta \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0.$$

Общим решением последних уравнений будут [3, 4]

$$g_1 = \left(\varphi_1 + \varphi_2 + h(1 + h^2)\varphi_1'\right)/(1 + h^2)^{1/2},$$
$$g_2 = \left((1 + h^2)\varphi_1' - h(\varphi_1 + \varphi_2)\right)/(1 + h^2)^{1/2}$$

с произвольными функциями $\varphi_1 = \varphi_1(h)$, $\varphi_2 = \varphi_2(R)$.

Б. Пусть $c_1 \neq 0$, $c' = 0$, тогда из (36) $\sigma' = -c/(1 + h^2)$, а после интегрирования (40) по v_2

(45) $$1/h_2 = (c/2c_1)\left(v_3'(1 + h^2)^{1/2} + \int \left(hv_3'/(1 + h^2)^{1/2}\right)dh + \mu(v_1)\right)$$

с произвольной функцией $\mu = \mu(v_1)$. Вид этой функции выводится из исследования условия совместности системы двух дифференциальных уравнений на функцию $h = h(v_1, v_2)$: первого уравнения (30) и (45). Эта система оказывается совместной, только если $\mu = -2c_1v_1/c + c_5$(c_5 — произвольная постоянная). Поскольку функция $\lambda(v_1, v_2)$ определяется с точностью до произвольной постоянной, то $f = -2c_1\lambda$. При этом общее решение уравнения (38) $\lambda = B\Phi(B + 2c_1x_3/c)$, с произвольной функцией $\Phi = \Phi(\zeta)$ аргумента $\zeta = B + 2c_1x_3/c$.

Таким образом, и в случае Б нередуцируемая двойная волна имеет общий произвол — две функции одного аргумента: $v_3 = v_3(h)$ и $\Phi = \Phi(\zeta)$. Построение решения в исходном пространстве независимых переменных (x_1, x_2, x_3) осуществляется так: сначала задаются произвольные функции $v_3(h)$ и $\Phi(\zeta)$, затем находится функция $h = h(v_1, v_2)$ из уравнения

$$\int \left(v_3'(1+h^2)^{1/2} + \int \left(hv_3'/(1+h^2)^{1/2}\right) dh + \mu(v_1)\right) dh - \\ - (2c_1/c)(hv_1 + v_2) = \text{const},$$

после этого — функция $\lambda(v_1, v_2) = -(c/2c_1)\, v_3'(1+h^2) + (1+h^2)^{1/2}/h_2$ и, наконец, восстанавливаются компоненты скорости $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$ из уравнений ($\alpha = \operatorname{sgn}(x_2)$)

$$h(v_1, v_2) = x_1/x_2, \quad \lambda(v_1, v_2) = \alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} \Phi\left(\alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} + 2c_1x_3/c\right).$$

Напряженное состояние представляется соотношениями ($c_2 = \text{const}$)

$$S_1 = -S_2 = hc/(1 + h^2), \quad S_{12} = (1 - h^2)c/(2(1 + h^2)),$$
$$S_{13} = c_1/(1 + h^2)^{1/2}, \quad S_{23} = -hS_{13}, \ \sigma = -c \operatorname{artg}(h) + c_2.$$

В. Пусть $c_1 \neq 0$, $c' \neq 0$, тогда, продифференцировав (36) по $\partial/\partial h$ и подставив в него выражение для h_{22} из (40), получаем $\sigma'' + 2h\sigma'/(1 + h^2) = 0$, откуда $\sigma' = b/(1 + h^2)$ ($b = \text{const}$). После подстановки σ' в (36) и дифференцирования его по $\partial/\partial\lambda$ (учитывая, что $\partial/\partial\lambda = (h\partial/\partial v_2 - \partial/\partial v_1)/(1 + h^2)^{1/2}$ и $h_1 = hh_2$) имеем $c''/h_2 + 3c'(1 + h^2)^{-1/2} + v_3'c_1''(1 + h^2)^{1/2} = 0$. Или если из последнего уравнения исключим h_2 с помощью (36), то запишем $c''(b + c) - (3/2)(c')^2 + k^2(c'/c_1')^3(v_3'(1 + h^2)) = 0$. Так как $c(\lambda)$ и $c_1(\lambda)$, то $v_3'(1 + h^2) = b_1 = \text{const}$. Тогда из (40) находим, что $h_{22} = 0$. Отсюда следуют соотношения $h = (c_4 - v_2)/(v_1 + c_3)$ и $\lambda = -(v_1 + c_3)(1 + h^2)^{1/2}$, $f = cb_1 - 2c_1\lambda$. Таким образом, осталось удовлетворить уравнениям (36) и (38). Подставив h и λ в (36), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $c(\lambda)$ ($c_1 = \alpha(k^2 - c^2/4)^{1/2}$, $\alpha = \pm 1$):

$$c'(\lambda - \alpha b_1 c/(4k^2 - c^2)^{1/2}) + 2(b + c) = 0.$$

После нахождения $c = c(\lambda)$ в квадратурах имеется общее решение (38)

$$\Phi((x_3 - B\exp(\textstyle\int 2c_1/fd\lambda)\int((c/f)\exp(-\int 2c_1/fd\lambda))d\lambda), B\exp(\int 2c_1/fd\lambda)) = 0$$

с произвольной функцией $\Phi(\xi, \zeta)$.

2. Опишем второй случай, когда $v_i = v_i(v_1)$ ($i = 2, 3$) при $S_1 \neq 0$. После подстановки $v_i = v_i(v_1)$ ($i = 2, 3$) в (5) имеем

$$-S_2w_1 + S_1w_2 = 0, \quad -2S_{12}w_1 + S_1(w_2 + v_2'w_1) = 0, \tag{46}$$
$$(S_1 + S_2)w_1 + S_1v_3'w_3 = 0, \quad -2S_{13}w_1 + S_1(w_3 + v_3'w_1) = 0,$$

где для краткости записи введено обозначение $w_i = \partial v_1/\partial x_i$ ($i = 1, 2, 3$). Поскольку система (46) линейна и однородна относительно w_i ($i = 1, 2, 3$) и $\sum_i w_i^2 \neq 0$, то

$$S_1(v_2')^2 - 2S_{12}v_2' + S_2 = 0, \quad S_1(v_3')^2 - 2S_{13}v_3' - S_1 - S_2 = 0,$$
$$S_{13}v_2' + S_{12}v_3' - S_1v_2'v_3' - S_{23} = 0.$$

Так как для $v_2' = 0$ решение редуцируется к плоской деформации, то необходимо считать $v_2' \neq 0$. Тогда из последних уравнений находятся выражения для S_{12}, S_2, S_{23}. Подставляя их в условие Мизеса, получаем квадратичное уравнение на S_{13}, из которого следует $|S_1(h+1)h^{-1/2}/(2k)| \leqslant \leqslant 1$ $(h \equiv (v_2')^2 + (v_3')^2)$. Вводится угол θ такой, что $\sin\theta = S_1(h+1)h^{-1/2}/ /(2k)$.

Если $S_1 = S_1(v_1)$ (или $\theta = \theta(v_1)$), то $\sigma = \sigma(v_1)$ и решение редуцируется к простой волне. Поэтому в качестве параметров двойной волны выбираются S_1 и v_1. Подставив $\sigma = \sigma(S_1, v_1)$ в (1) с учетом первых двух независимых уравнений (46), запишем

$$b_{i\alpha}\partial S_1/\partial x_\alpha + b_{i4}w_1 = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{47}$$

вид коэффициентов b_{ij} $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4)$ довольно громоздок и здесь не приводится. Все последующие выкладки также проделывались на ЭВМ, и здесь даются только ход рассуждений и окончательные результаты.

Для того чтобы не было редукции двойной волны к инвариантному решению в (47), независимых уравнений должно быть не больше двух. Значит, ранг матрицы $B = (b_{ij})$ не больше двух. Если обозначить через B_j квадратную матрицу, составленную из матрицы B без j-го столбца, то $\det(B_j) = 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, приравнивая нулю $\det(B_4)$,

$$\partial\sigma/\partial S_1((\partial\sigma/\partial S_1)^2 - (h+1)^2/(4h\cos^2\theta)) = 0.$$

Откуда следует: либо $\sigma = \sigma(v_1)$, либо $\sigma = \pm S_1(h+1)h^{-1/2}/(2\cos\theta) + + \varphi(v_1)$. Подставив выражения для σ в $\det(B_3) = 0$, в обоих случаях получим полином относительно $\operatorname{tg}\theta$ с коэффициентами, зависящими от v_1. Так как θ и v_1 считаются функционально независимыми, то эти коэффициенты должны обращаться в нуль. Но среди соотношений имеются противоречивые равенства, например $h + 1 = 0$. Таким образом, в данном случае, когда $v_i = v_i(v_1)$ $(i = 2, 3)$, двойных волн, нередуцируемых к инвариантным решениям или к простым волнам, нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
2. **Peradzynski Z.** Hyperbolic flows in ideal plasticity // Arch. Mech.— 1975.— V. 27, N 1.
3. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи.— М.: Наука, 1984.
4. **Мелешко С. В.** Двойные волны в идеальном жесткопластическом теле при плоской деформации // ПМТФ.— 1990.— № 2.
5. **Ганжа В. Г., Мелешко С. В., Шапеев В. П.** Промежуточные выкладки в аналитических исследованиях дифференциальных уравнений на ЭВМ // Моделирование в механике/АН СССР, Спб. отд-ние, ИТПМ.— 1989.— Т. 3, № 4.

г. Новосибирск *Поступила 14/VIII 1989 г.*

УДК 539.412

Л. Г. Смирнов, И. И. Федик

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОВОГО ПЯТНА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Задача об определении термонапряженного состояния тела при нагреве по пятну, занимающему некоторую область, сводится к задаче об определении упругих напряжений при заданных разрывах перемещений на границе пятна [1]. Последняя эквивалентна задаче об определении упругих напряжений, вызванных наличием включения, предварительно подвергнутого собственной деформации и имеющего упругие характеристики, что и окружающая среда, а затем вставленного в отверстие, занимае-