

## ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОИСТОГО СФЕРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В МАТРИЦЕ ПРИ ТРЕХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

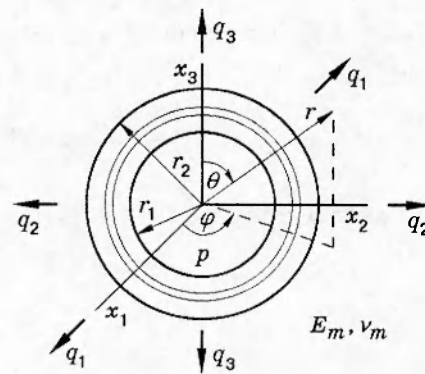
В. В. Алехин, Л. В. Баев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача синтеза из конечного набора упругих однородных изотропных материалов многослойного сферического включения минимального веса, находящегося в матрице, растягиваемой на бесконечности тремя различными равномерными осевыми усилиями, при заданных ограничениях на прочность включения и его толщину. Получены необходимые условия оптимальности, построен вычислительный алгоритм и приведен пример расчета оптимального включения.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеется набор  $W$ , состоящий из  $k$  однородных изотропных материалов. Из данного набора требуется синтезировать слоистое сферическое включение минимального веса при заданных ограничениях на прочность и толщину включения.

Пусть  $r_1, r_2$  — радиусы внутренней и внешней поверхностей включения (см. рисунок), которое находится в матрице, растягиваемой на бесконечности тремя равномерными осевыми усилиями:  $q_1, q_2$  и  $q_3$ . На внутренней границе  $r_1$  включения задано давление  $p$ . Напряженно-деформированное состояние (НДС) многослойного включения и матрицы в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  описывается краевой задачей, содержащей уравнения равновесия



$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta] &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

соотношения закона Гука

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_{kl} \delta_{kl}) \delta_{ij} + \epsilon_{ij} \right], \quad (1.2)$$

где компоненты тензора деформации выражаются через радиальное смещение  $u_r(r, \theta, \varphi)$ , меридиональное  $u_\theta(r, \theta, \varphi)$  и окружное  $u_\varphi(r, \theta, \varphi)$  в виде

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta,$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (1.3)$$

$$2\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi};$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r_1, \theta, \varphi) &= -p, \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta, \varphi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r_1, \theta, \varphi) = 0, \\ \sigma_{rr}(\infty, \theta, \varphi) &= q_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + q_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + q_3 \cos^2 \theta, \\ \sigma_{r\theta}(\infty, \theta, \varphi) &= \sin \theta \cos \theta (q_1 \cos^2 \varphi + q_2 \sin^2 \varphi - q_3), \\ \sigma_{r\varphi}(\infty, \theta, \varphi) &= (q_2 - q_1) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $E(r)$ ,  $\nu(r)$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материалов слоев включения и матрицы.

На внутренних границах  $r_i \in (r_1, r_2]$  слоев включения и самой границе включения — матрица, где терпят разрыв характеристики среды, необходимо задавать условия сопряжения (непрерывность смещений  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_\varphi$  и напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ):

$$\begin{aligned} [u_r(r_i, \theta, \varphi)] &= [u_\theta(r_i, \theta, \varphi)] = [u_\varphi(r_i, \theta, \varphi)] = 0, \\ [\sigma_{rr}(r_i, \theta, \varphi)] &= [\sigma_{r\theta}(r_i, \theta, \varphi)] = [\sigma_{r\varphi}(r_i, \theta, \varphi)] = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пусть  $\sigma$ ,  $R$ ,  $\rho_*$  — величины, имеющие размерность напряжения, длины и плотности. Введем новые безразмерные переменные (в дальнейшем звездочка у безразмерных величин опущена):

$$u_i^* = \frac{u_i}{R}, \quad r_i^* = \frac{r_i}{R}, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma}, \quad \sigma_s^* = \frac{\sigma_s}{\sigma}, \quad E^* = \frac{E}{\sigma}, \quad p^* = \frac{p}{\sigma}, \quad q_i^* = \frac{q_i}{\sigma}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_*}$$

( $\sigma_s$ ,  $\rho$  — пределы прочности и плотности материалов из множества  $W$ ). Сделаем замену координат

$$r = r_1 + x(r_2 - r_1), \quad x \in [0, 1], \quad (1.6)$$

переводящую переменную область задания  $[r_1, r_2]$  в постоянную  $[0, 1]$ . Введем кусочно-постоянную функцию

$$\alpha(x) = \{\alpha_j; x \in [x_j, x_{j+1}), j = 1, \dots, n\}, \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1, \quad (1.7)$$

характеризующую структуру слоистого включения: количество, размеры и материалы составляющих его слоев. Значения  $\alpha_j$  принадлежат дискретному конечному множеству

$$U = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad (1.8)$$

соответствующему заданному набору материалов  $W$ . Теперь все характеристики материалов из множества  $W$  будут функциями распределения  $\alpha(x)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Удобно в качестве множества  $U$  задавать набор целых чисел  $U = \{1, \dots, k\}$ . Тогда запись  $\alpha(x) = i$ ,  $x \in [x_j, x_{j+1})$  означает, что  $j$ -й слой включения состоит из  $i$ -го материала множества  $W$ .

Так как структура слоистого включения определяется функцией  $\alpha(x)$ , а геометрия — его размерами  $r_1$  и  $r_2$ , в качестве управления рассмотрим пару  $\{\alpha(x), r_1\}$  (не нарушая общности, внешний радиус  $r_2$  можно считать фиксированным), где  $\alpha(x) \in U$  (1.8) и

$$0 < a \leq r_1 \leq b < r_2 \quad (1.9)$$

( $a$ ,  $b$  — заданные пределы, в которых может варьироваться внутренний радиус  $r_1$ ).

Задача оптимального проектирования заключается в следующем. Среди кусочно-постоянных функций  $\alpha(x)$  (1.7) с областью значений  $U$  (1.8) и параметров  $r_1$  из отрезка  $[a, b]$  требуется найти управление  $\{\alpha(x), r_1\}$ , доставляющее минимум функционалу веса

$$F[\alpha, r_1] = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho(\alpha) r^2 dr = \int_0^1 G(\alpha, r_1, x) dx \quad (1.10)$$

при заданном ограничении на прочность

$$\eta(x, \theta, \varphi, u_r, u_\theta, u_\varphi, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\varphi}, \alpha, r_1) \leq 0. \quad (1.11)$$

В качестве ограничения (1.11) рассмотрим условие текучести Мизеса

$$\eta = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{r\varphi}^2 + \sigma_{\theta\varphi}^2) - 2\sigma_s^2 \leq 0. \quad (1.12)$$

Неравенство (1.12) можно записать в терминах  $u_r, u_\theta, u_\varphi, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\varphi}$ , используя соотношения закона Гука (1.2).

**2. Необходимые условия оптимальности.** Для вывода необходимых условий оптимальности в задаче (1.1)–(1.12) требуется построить выражения для вариаций целевого функционала (1.10) и ограничения (1.12) через вариации управления  $\{\alpha(x), r_1\}$ . С этой целью преобразуем краевую задачу (1.1)–(1.5). Введем три сферические системы координат  $(r, \theta_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где угол  $\theta_i$  отсчитывается от оси  $X_i$  декартовой системы координат  $(X_1, X_2, X_3)$ . На рисунке показана система координат  $(r, \theta, \varphi)$ , совпадающая в данном случае с системой координат  $(r, \theta_3, \varphi_3)$ . Решение исходной задачи (1.1)–(1.5) в силу линейности уравнений теории упругости можно представить в виде суперпозиции четырех решений. Первое решение (задача 1) описывает НДС слоистого сферического включения в бесконечной матрице под действием внутреннего давления  $p$ . Остальные три решения (задача 2) определяют НДС включения в матрице при действии на бесконечности равномерного одноосного усилия  $q_i$  вдоль оси  $X_i$  [1]. Рассмотрим данные задачи.

Задача 1 включает в себя уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0; \quad (2.1)$$

соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) + \frac{du_r}{dr} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) + \frac{u_r}{r} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

и краевые условия

$$\sigma_{rr}(r_1) = -p, \quad \sigma_{rr}(\infty) = 0. \quad (2.3)$$

НДС матрицы без включения, удовлетворяющее условию (2.3) на бесконечности, описывается формулами

$$u_r = \frac{a}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = -\lambda\sigma_{\theta\theta} = -\frac{2E_m}{1+\nu_m} \frac{a}{r^3} \quad (2.4)$$

( $E_m, \nu_m$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы).

Условия сопряжения (1.5) на внутренних границах слоев включения и соотношения (1.6) позволяют ввести непрерывные на отрезке  $[0, 1]$  фазовые переменные

$$\mathbf{Y}(x) = (u_r, \sigma_{rr})^T \quad (2.5)$$

(индекс  $T$  означает транспонирование вектора или матрицы).

Теперь задачу (2.1)–(2.3), используя решение (2.4) для матрицы, можно представить в виде краевой задачи относительно неизвестных  $\mathbf{Y}(x)$  (2.5) только для сферического включения:

$$\mathbf{Y}'(x) = A(\alpha, r_1, x) \mathbf{Y}(x), \quad y_2(0) = -p, \quad y_1(1) + \frac{r_2(1 + \nu_m)}{2E_m} y_2(1) = 0. \quad (2.6)$$

Здесь элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A(\alpha, r_1, x)$  имеют вид

$$a_{11} = \frac{2\nu(r_2 - r_1)}{r(\nu - 1)}, \quad a_{12} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)}(r_2 - r_1),$$

$$a_{21} = \frac{2E(r_2 - r_1)}{r^2(1 - \nu)}, \quad a_{22} = \frac{(2 - 4\nu)(r_2 - r_1)}{r(\nu - 1)}.$$

Рассмотрим задачу 2. Согласно [2], при действии на бесконечности равномерного одноосного усилия  $q_i$  вдоль оси  $X_i$  решение в матрице и сферическом включении в системе координат  $(r, \theta_i, \varphi_i)$  запишем в виде

$$u_r(r, \theta_i) = q_i[u_1(r) + u_2(r) \cos 2\theta_i], \quad u_\theta(r, \theta_i) = q_i u_3(r) \sin 2\theta_i,$$

$$\sigma_{rr}(r, \theta_i) = q_i[\sigma_1(r) + \sigma_2(r) \cos 2\theta_i], \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta_i) = q_i \sigma_3(r) \sin 2\theta_i. \quad (2.7)$$

Так как задача 2 является осесимметричной, то все величины не зависят от координаты  $\varphi_i$  и соответствующие окружное смещение  $u_\varphi$ , касательные напряжения  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\theta\varphi}$  и деформации  $\varepsilon_{r\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\theta\varphi}$  равны нулю. Ненулевые компоненты вектора смещений, тензоров напряжений и деформаций удовлетворяют уравнениям (1.1)–(1.3), а краевые условия (1.4) приводятся к виду

$$\sigma_{rr}(r_1, \theta_i) = \sigma_{r\theta}(r_1, \theta_i) = 0, \quad \sigma_{rr}(\infty, \theta_i) = \frac{q_i}{2}(1 + \cos 2\theta_i), \quad \sigma_{r\theta}(\infty, \theta_i) = -\frac{q_i}{2} \sin 2\theta_i. \quad (2.8)$$

НДС матрицы без включения, удовлетворяющее условию (2.8) на бесконечности, описывается формулами [2]

$$u_1 = -\frac{a_1}{r^2} - \frac{3a_2}{r^4} + \frac{5 - 4\nu_m}{3(1 - 2\nu_m)} \frac{a_3}{r^2} + \frac{1 - \nu_m}{2E_m} r, \quad u_2 = -\frac{9a_2}{r^4} + \frac{5 - 4\nu_m}{1 - 2\nu_m} \frac{a_3}{r^2} + \frac{1 + \nu_m}{2E_m} r,$$

$$u_3 = -\frac{6a_2}{r^4} - \frac{2a_3}{r^2} - \frac{1 + \nu_m}{2E_m} r, \quad \sigma_1 = \frac{2E_m}{1 + \nu_m} \left[ \frac{a_1}{r^3} + \frac{6a_2}{r^5} - \frac{5 - \nu_m}{3(1 - 2\nu_m)} \frac{a_3}{r^3} \right] + \frac{1}{2}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_2 = \frac{2E_m}{1 + \nu_m} \left[ \frac{18a_2}{r^5} - \frac{5 - \nu_m}{1 - 2\nu_m} \frac{a_3}{r^3} \right] + \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{2E_m}{1 + \nu_m} \left[ \frac{12a_2}{r^5} - \frac{1 + \nu_m}{1 - 2\nu_m} \frac{a_3}{r^3} \right] - \frac{1}{2}.$$

Условия сопряжения (1.5) и соотношения (1.6), (2.7) позволяют ввести непрерывные на отрезке  $[0, 1]$  фазовые переменные

$$\mathbf{Z}(x) = (u_1, u_2, u_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T. \quad (2.10)$$

Теперь задачу 2 ((1.1)–(1.3), (2.8)), используя решение (2.9) для матрицы, можно представить в виде краевой задачи относительно неизвестных  $\mathbf{Z}(x)$  (2.10) только для сферического включения:

$$\mathbf{Z}'(x) = B(\alpha, r_1, x) \mathbf{Z}(x), \quad z_4(0) = z_5(0) = z_6(0) = 0,$$

$$\mathbf{Z}_f(1) = C(E_m, \nu_m) \mathbf{Z}_l(1) + \mathbf{D}(E_m, \nu_m). \quad (2.11)$$

Здесь  $\mathbf{Z}_f(x) = (z_1, z_2, z_3)^T$ ;  $\mathbf{Z}_l(x) = (z_4, z_5, z_6)^T$ ; ненулевые элементы  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $d_i$  матриц  $B(\alpha, r_1, x)$ ,  $C(E_m, \nu_m)$  и вектора  $\mathbf{D}(E_m, \nu_m)$  имеют вид

$$b_{11} = 2b_{13} = b_{22} = \frac{2}{3} b_{23} = -b_{65} = \frac{2\nu(r_2 - r_1)}{r(\nu - 1)}, \quad b_{14} = b_{25} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)}(r_2 - r_1),$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{36} &= \frac{2(1+\nu)}{E} (r_2 - r_1), \quad \frac{1}{2} \dot{b}_{32} = \dot{b}_{33} = -\dot{b}_{46} = -\frac{1}{3} \dot{b}_{56} = -\frac{1}{3} \dot{b}_{66} = \frac{r_2 - r_1}{r}, \\ b_{41} = 2b_{43} = b_{52} &= \frac{2}{3} b_{53} = b_{62} = \frac{2E(r_2 - r_1)}{r^2(1-\nu)}, \quad b_{65} = \frac{E(5+\nu)(r_2 - r_1)}{r^2(1-\nu^2)}, \\ \dot{b}_{44} = \dot{b}_{55} &= \frac{(2-4\nu)(r_2 - r_1)}{r(\nu-1)}, \quad a = \frac{r_2(1+\nu_m)}{4E_m(7-5\nu_m)}, \\ c_{11} &= -\frac{r_2(1+\nu_m)}{2E_m}, \quad c_{12} = a(3\nu_m - 1), \quad c_{13} = a(5-7\nu_m), \\ c_{22} &= a(19\nu_m - 17), \quad c_{23} = a(15-21\nu_m), \quad c_{32} = a(10-14\nu_m), \\ c_{33} &= a(26\nu_m - 22), \quad d_1 = 24a \frac{1-\nu_m}{1+\nu_m}, \quad d_2 = -d_3 = 30a(1-\nu_m). \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений, входящие в ограничение на прочность (1.12), в исходной сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  выражаются через решения  $\mathbf{Y}(x)$  и  $\mathbf{Z}(x)$  краевых задач (2.6) и (2.11) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta, \varphi) &= y_2 + (z_4 - z_5)(q_1 + q_2 + q_3) + 2z_5[q_3 \cos^2 \theta + (q_1 \cos^2 \varphi + q_2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta], \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \varphi) &= \frac{E}{r(1-\nu)} y_1 + \frac{\nu}{1-\nu} y_2 + \left[ \frac{E}{r(1-\nu)} (z_1 + z_2 + 2z_3) + \frac{\nu}{1-\nu} (z_4 + z_5) \right] (q_1 + q_2 + q_3) - \\ &- 2 \left[ \frac{E}{r(1-\nu)} z_2 + \frac{E(2+\nu)}{r(1-\nu^2)} z_3 + \frac{\nu}{1-\nu} z_5 \right] [q_3 \sin^2 \theta + (q_1 \cos^2 \varphi + q_2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta] - \\ &- 2 \left[ \frac{E}{r(1-\nu)} z_2 + \frac{E(1+2\nu)}{r(1-\nu^2)} z_3 + \frac{\nu}{1-\nu} z_5 \right] (q_1 \sin^2 \varphi + q_2 \cos^2 \varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \theta, \varphi) &= \frac{E}{r(1-\nu)} y_1 + \frac{\nu}{1-\nu} y_2 + \left[ \frac{E}{r(1-\nu)} (z_1 + z_2 + 2z_3) + \right. \\ &+ \left. \frac{\nu}{1-\nu} (z_4 + z_5) \right] (q_1 + q_2 + q_3) - 2 \left[ \frac{E}{r(1-\nu)} z_2 + \frac{E(1+2\nu)}{r(1-\nu^2)} z_3 + \frac{\nu}{1-\nu} z_5 \right] [q_3 \sin^2 \theta + \\ &+ (q_1 \cos^2 \varphi + q_2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \theta] - 2 \left[ \frac{E}{r(1-\nu)} z_2 + \frac{E(2+\nu)}{r(1-\nu^2)} z_3 + \frac{\nu}{1-\nu} z_5 \right] (q_1 \sin^2 \varphi + q_2 \cos^2 \varphi), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, \varphi) &= z_6(q_3 - q_1 \cos^2 \varphi - q_2 \sin^2 \varphi) \sin 2\theta, \\ \sigma_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) &= z_6(q_1 - q_2) \sin \theta \sin 2\varphi, \quad \sigma_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) = \frac{E}{r(1+\nu)} z_3(q_1 - q_2) \cos \theta \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Итак, исходная задача (1.1)–(1.5) свелась к решению краевых задач (2.6) и (2.11) относительно неизвестных вектор-функций  $\mathbf{Y}(x)$  и  $\mathbf{Z}(x)$ .

Заменим локальное ограничение (1.12) на эквивалентное интегральное ограничение

$$F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = 0,5 \int_V \{ \eta(\dots) + |\eta(\dots)| \} dV = \int_0^1 G_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 0, \quad (2.12)$$

где  $V$  — объем сферического включения; в силу четности функции  $\eta(\dots)$  относительно координатных плоскостей  $X_1OX_2$ ,  $X_2OX_3$  и  $X_1OX_3$  функция

$$G_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 4(r_2 - r_1) r^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \{ \eta(\dots) + |\eta(\dots)| \} \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (2.13)$$

Функционал (2.12) имеет производную Фреше [3], так как функция  $|\eta(\dots)|$ , представляющая собой модуль от условия текучести Мизеса, в слоистом сферическом включении может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек, т. е. на множестве нулевой меры.

Пусть  $\{\alpha(x), r_1\}$  — оптимальное управление из допустимого множества (1.8), (1.9), минимизирующее функционал (1.10) и удовлетворяющее ограничению (2.12). Рассмотрим возмущенное управление  $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$  [3]:

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D, \quad g(x) \in U, \\ \alpha(x), & x \notin D, \quad \text{mes}(D) < \varepsilon, \end{cases} \quad r_1 + \delta r_1 \in [a, b], \quad |\delta r_1| < \varepsilon \quad (2.14)$$

( $D \subset [0, 1]$  — множество малой меры,  $\varepsilon > 0$  — малая величина).

Используя стандартную технику [3], можно получить главные части приращений функционалов (1.10), (2.12) (для краткости аргументы функций, относящиеся к невозмущенному управлению  $\{\alpha(x), r_1\}$ , опущены):

$$\delta F[\dots] = \int_D \{G(\alpha^*, \dots) - G(\alpha, \dots)\} dx + S \delta r_1, \quad (2.15)$$

$$\delta F_1[\dots] = \int_D \{M(\alpha^*, \dots) - M(\alpha, \dots)\} dx + S_1 \delta r_1.$$

Здесь

$$M(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi) = G_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \Phi^T(x) A(\alpha, r_1, x) \mathbf{Y}(x) + \Psi^T(x) B(\alpha, r_1, x) \mathbf{Z}(x),$$

$$S = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} G(\alpha, r_1, x) dx, \quad S_1 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} M(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi) dx. \quad (2.16)$$

Векторы сопряженных переменных  $\Phi(x) = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T$  и  $\Psi(x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6)^T$  удовлетворяют краевым задачам

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= -A^T(\alpha, r_1, x) \Phi(x) - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}} G_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \right]^T, \\ \vartheta_1(0) &= 0, \quad \vartheta_2(1) - \frac{r_2(1 + \nu_m)}{2E_m} \vartheta_1(1) = 0; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= -B^T(\alpha, r_1, x) \Psi(x) - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}} G_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \right]^T, \\ \psi_1(0) &= \psi_2(0) = \psi_3(0) = 0, \quad \Psi_l(1) + C^T(E_m, \nu_m) \Psi_f(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Составим расширенный функционал

$$J[\alpha, r_1] = F[\alpha, r_1] + \lambda_1 F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + \lambda_2 \{a - r_1 + \xi_1^2\} + \lambda_3 \{r_1 - b + \xi_2^2\} \quad (2.19)$$

( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\xi_1, \xi_2$  — множители Лагранжа и штрафные переменные). Вариацию функционала (2.19) с использованием выражений (2.15), (2.16) представим в виде

$$\delta J[\dots] = \int_D \{H(\alpha, \dots) - H(\alpha^*, \dots)\} dx + \{S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3\} \delta r_1 + 2\lambda_2 \xi_1 \delta \xi_1 + 2\lambda_3 \xi_2 \delta \xi_2; \quad (2.20)$$

$$H(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi) = -G(\alpha, r_1, x) - \lambda_1 M(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi). \quad (2.21)$$

Так как управление  $\{\alpha(x), r_1\}$  является оптимальным (минимизирующим) управлением, для любых допустимых управлений  $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$  (2.14) должно выполняться

условие  $\delta J[\dots] \geq 0$ . Тогда из выражения (2.20) в силу произвольности вариаций  $\delta r_1, \delta \xi_i$  имеем

$$S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \quad (2.22)$$

$$\lambda_2(a - r_1) = 0, \quad \lambda_3(r_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0. \quad (2.23)$$

Так как множество малой меры  $D$  может быть почти всюду плотно расположено на отрезке  $[0, 1]$ , для почти всех  $x \in [0, 1]$  должно выполняться условие максимума для функции Гамильтона  $H(\dots)$  (2.21) по аргументу  $\alpha$  [3]:

$$H(\alpha, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi) = \max_{\alpha^*(x) \in U} H(\alpha^*, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi). \quad (2.24)$$

Таким образом, получаем, что оптимальное управление  $\{\alpha(x), r_1\}$  и соответствующие ему оптимальные траектории  $\mathbf{Y}(x), \mathbf{Z}(x)$  и векторы сопряженных переменных  $\Phi(x), \Psi(x)$  должны удовлетворять краевым задачам (2.6), (2.11), (2.17), (2.18), соотношениям (1.8), (1.9), (2.12), (2.23) и условиям оптимальности (2.22), (2.24).

**3. Вычислительный алгоритм.** Основная идея прямого метода решения задач оптимального проектирования заключается в построении последовательности управлений  $\{\alpha(x), r_1\}_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), минимизирующей целевой функционал (1.10). Для этого введением равномерной сетки  $\{x_i\}$  разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  отрезков  $D_i$ , моделирующих множества малой меры. Зададим начальное управление  $\{\alpha(x), r_1\}$  из допустимой области (1.8), (1.9), (2.12). Очевидно, что функция  $\alpha(x)$  является кусочно-постоянной с участками постоянства  $D_i = [x_i, x_{i+1})$ , на которых она принимает значения из множества  $U$  (1.8). Следующее приближение  $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$  на некотором множестве  $D_i$  ищется в виде (2.14)

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} \alpha_j, & x \in D_i, \quad \alpha_j \in U, \\ \alpha(x), & x \notin D_i; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$r_1 + \delta r_1 \in [a, b], \quad |\delta r_1| < \varepsilon \quad (3.2)$$

и определяется из линейризованной оптимизационной задачи: найти на данном множестве такое допустимое возмущение  $\{\alpha_j, \delta r_1\}$ , которое обеспечивает максимальное убывание функционала  $F[\dots]$  (1.10), т. е. минимум вариации  $\delta F[\dots]$  (2.15) при условиях (3.1), (3.2) и линейризованном ограничении (2.12)

$$F_1[\alpha^*, r_1 + \delta r_1, \mathbf{Y} + \delta \mathbf{Y}, \mathbf{Z} + \delta \mathbf{Z}] \approx F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + \delta F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = 0, \quad (3.3)$$

где выражение для  $\delta F_1[\dots]$  дается формулой (2.15). Эта линейризованная задача представляет собой вариант задачи, рассмотренной в пп. 1, 2. Отсюда непосредственно получаем, что оптимальное возмущение  $\{\alpha_j, \delta r_1\}$  должно удовлетворять соотношениям

$$\delta r_1 = -\gamma \{S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3\}, \quad \gamma \geq 0; \quad (3.4)$$

$$\lambda_2(a - r_1 - \delta r_1) = 0, \quad \lambda_3(r_1 + \delta r_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \quad (3.5)$$

и ограничениям (3.2), (3.3).

Множители Лагранжа  $\gamma, \lambda_2, \lambda_3$  в процессе численного счета находятся из (3.2), (3.5). Наилучшая поправка  $\alpha_j$  (3.1) определяется следующим образом. При  $S_1 \neq 0$  из соотношения (3.3) имеем

$$\delta r_1 = -\left\{ \int_{D_i} [M(\alpha_j, \dots) - M(\alpha, \dots)] dx + F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \right\} / S_1. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в  $\delta F[\dots]$  (2.15), находим поправку  $\alpha_j$ , минимизирующую вариацию  $\delta F[\dots]$ , из условия

$$\int_{D_i} H(\alpha_j, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi) dx = \max_{\alpha^* \in U} \int_{D_i} H(\alpha^*, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi) dx,$$

где

$$H(\alpha_*, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi) = -G(\alpha_*, r_1, x) + \frac{S}{S_1} M(\alpha_*, r_1, x, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \Phi, \Psi).$$

При  $S_1 = 0$  наилучшая поправка  $\{\alpha_j, \delta r_1\}$  определяется из соотношения (3.4) и условия минимума вариации  $\delta F[\dots]$  (2.15):

$$\delta r_1 = -\gamma\{S - \lambda_2 + \lambda_3\}, \quad \int_{D_i} G(\alpha_j, r_1, x) dx = \min_{\alpha_* \in U} \int_{D_i} G(\alpha_*, r_1, x) dx,$$

при этом должны учитываться ограничения (3.2), (3.3), (3.5).

Построив таким образом новое управление  $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$ , принимаем его за начальное и строим следующее приближение. Процесс считается оконченным на данной сетке разбиения  $\{x_i\}$ , если управление  $\{\alpha(x), r_1\}$  не изменяется ни на одном из множеств  $D_i$ . Полученное решение представляет собой локальный минимум в рассматриваемой задаче.

**ПРИМЕР.** Множество  $W$  состоит из пяти материалов. Механические и физические безразмерные характеристики этих материалов приведены в таблице.

Материал	$\rho$	$E$	$\nu$	$\sigma_s$
Сферопластик	0,65	270	0,27	4,5
Дюралюминий	2,85	7100	0,33	44
Титановый сплав	4,6	12000	0,32	80
Сталь	7,8	21000	0,3	120
Медь	8,93	11200	0,33	20

На внутренней поверхности сферического включения задается давление  $p = 0,01$ . Внутренний радиус  $r_1$  включения может изменяться в пределах отрезка  $[0,75; 0,95]$ , внешний же радиус  $r_2$  считается фиксированным и равным единице. Матрица, содержащая сферическое включение, состоит из сферопластика и нагружается на бесконечности равномерными осевыми усилиями  $q_1 = 4$ ,  $q_2 = 0$  и  $q_3 = -4$ , т. е. подвергается на бесконечности простому сдвигу. Область включения разбивается по толщине на 50 равных частей, моделирующих множества  $D_i$ .

Вариации управления в приведенном выше вычислительном алгоритме имеют локальный характер, т. е. на каждой итерации изменение управления происходит только на одном из элементарных интервалов (множестве  $D_i$ ). Такое варьирование, как известно [3], может приводить к тупиковым ситуациям: конструкция может быть не оптимальной, но за счет локального варьирования ее улучшить не удастся. Поэтому в качестве начальных приближений брали различные распределения материалов по толщине оптимизируемого включения. По результатам расчетов, исходя из некоторых механических соображений, выбирали новые начальные приближения и т. д. В результате удалось получить четырехслойное включение с внутренним радиусом  $r_1 = 0,75123$ , весом  $F^* = 8,16$  и со слоями  $[0,75123; 0,77611]$  и  $[0,82088; 0,92537]$  из титанового сплава,  $[0,77611; 0,82088]$  из сферопластика и  $[0,92537; 1]$  из дюралюминия. Самым легким однородным включением, удовлетворяющим ограничениям на прочность (1.12) и толщину тела (1.9) при заданных нагрузках  $p$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , является включение из титанового сплава с внутренним радиусом  $r_1 = 0,80813$  и весом  $F_* = 9,099$ . Относительный выигрыш по весу для оптимального включения по сравнению с данным однородным включением составил  $(1 - F^*/F_*) \cdot 100\% = 10,3\%$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01527).



ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехин В. В.** Оптимизация слоистого сферического включения в бесконечной матрице при одноосном растяжении // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 115–120.
2. **Matonis V. A., Small N. C.** A macroscopic analysis of composites containing layered spherical inclusions // Polymer Eng. and Sci. 1969. V. 9, N 2. P. 90–99.
3. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.

*Поступила в редакцию 4/VI 1996 г.*

---