

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ, ПУЛЬСИРУЮЩЕГО В ЖИДКОСТИ

О. В. Воинов, В. В. Перепелкин
(Москва)

Рассматривается устойчивость поверхности сферического газового пузыря, совершающего нелинейные колебания. Изучается динамика малых возмущений в зависимости от длины волны и параметров нелинейного процесса пульсаций пузыря. Развит подход к анализу динамики возмущений поверхности пузыря на основе решения дифференциального уравнения устойчивости на полупериоде пульсации. В коротковолновом приближении получена формула для приращения амплитуды возмущения и установлена аналогия между задачей устойчивости и задачей о прохождении частицы через потенциальный барьер в квантовой механике. Найдены асимптотические формулы для скорости роста возмущений при пульсациях большой амплитуды и дано сравнение с точными численными расчетами. Доказано, что скорость роста возмущений заданной длины волны — ограниченная функция при бесконечном усилении интенсивности пульсаций. С учетом капиллярных сил найдено, что при усилении амплитуды пульсаций наиболее быстро растущие возмущения сдвигаются в область более коротких волн. Показано, что неустойчивость Тейлора — основная причина разрушения поверхности пульсирующего газового пузыря.

Устойчивость плоской границы раздела двух жидких сред впервые рассматривалась Дж. Тейлором [1] в связи с проблемой динамики пузыря при подводном взрыве. В экспериментах наблюдали иглоподобные нарушения сферической формы пузыря, приобретавшего форму «ежа» [2]. Дж. Тейлор показал, что граница раздела сред неустойчива, если ускорение границы направлено от менее к более плотной жидкости. В [3] исследовалась неустойчивость сферической поверхности раздела расширяющейся или захлопывающейся кавитационной полости, когда ускорение стенки полости знакопостоянно и направлено к центру полости. Такая граница раздела устойчива по Тейлору, но в силу сферической симметрии задачи амплитуды возмущений поверхности кавитационной полости зависят от радиуса пузыря R как $R^{-1/4}$ и захлопывающаяся каверна оказывается неустойчивой (неустойчивость Биркгофа—Плессета). Устойчивость поверхности периодически пульсирующего газонаполненного пузыря исследовалась лишь для линейных или слабонелинейных пульсаций [4], когда радиус $R(t)$ хорошо описывается тремя первыми членами ряда Фурье по времени. Параметрическое возбуждение поверхностных волн изучалось на основе уравнения устойчивости, принимающего в этом случае форму уравнения Матье. Используемый в [4] метод непригоден при пульсациях большой амплитуды, когда график функции $R(t)$ имеет резкие изломы.

1. Постановка задачи и метод решения. В безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил покоится газовый пузырь радиуса R'_0 . В некоторый момент времени $t' = 0$ давление в жидкости на бесконечности p_0 изменяется скачком до p_∞ . В результате пузырь начинает пульсировать. Предполагается, что давление газа внутри пузыря описывается политропой $p_g = \text{const } \rho_g^k$ (k — показатель политропы) и что плотность газа ρ_g внутри пузыря всегда остается много меньшей, чем плотность окружающей жидкости ρ_l : $\rho_g \ll \rho_l$.

Пусть в сферической системе координат r, θ, φ с началом отсчета в центре пузыря его поверхность задана уравнением [3]

$$r = R' + \sum_{n=2}^{\infty} a'_n Y_n(\theta, \varphi), \quad |a'_n| \ll R',$$

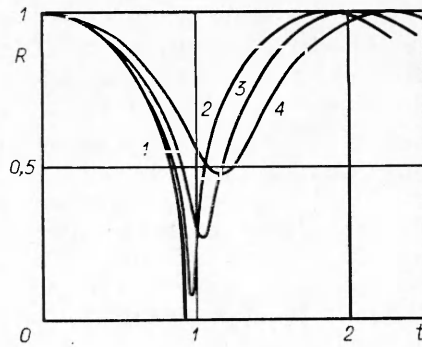
где $R'(t')$ — текущий радиус пузыря; $a'_n(t')$ — малая амплитуда отклонения от сферической формы; $Y_n(\theta, \varphi)$ — поверхностная сферическая гармоника степени n . Тогда уравнения для R' и a'_n можно записать в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \ddot{R}R + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = (\varepsilon + 2\sigma) R^{-3k} - \frac{2\sigma}{R} - 1, \quad R(0) = 1, \quad \dot{R}(0) = 0;$$

$$(1.2) \quad \ddot{y}_n - \Phi_n(t) y_n = 0, \quad \Phi_n(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - (n^2 - 1)(n + 2) \frac{\sigma}{R^3}.$$

Здесь $R = R'/R'_0$; $y_n = a'_n R^{3/2}/R'_0$; $t = t' (p_\infty/\rho_l)^{1/2}/R'_0$; $\varepsilon = p_0/p_\infty$; $\sigma = \sigma'/R'_0 p_\infty$; t' , σ' — размерные время и коэффициент поверхностного натяжения; точка над буквами означает дифференцирование по t . Уравнения (1.2) для модифицированных амплитуд y_n с различными номерами n взаимнонезависимы, поэтому в дальнейшем индекс n будет опускаться.

На рис. 1 представлены характерные графики решений уравнения (1.1) при различных ε и $\sigma = 0$. Кривые 1—4 соответствуют $\varepsilon = 0$; 0,02; 0,1; 0,25. Функции $R(t)$ и, следовательно, $\Phi(t)$ являются периодическими с периодом пульсации пузыря T . Поэтому (1.2) есть уравнение типа Хилла и его решение, согласно теории Флоке [5], имеет вид $y = \xi(t) \exp(\mu_1 t) + \zeta(t) \exp(\mu_2 t)$, где ξ и ζ — T -периодические функции. В силу четности $\Phi(t)$ $\mu_1 = -\mu_2 \equiv \mu$ и характеристический показатель $\mu = \text{Ln} (y_1(T) \pm \sqrt{y_1^2(T) - 1})/T$. Здесь $y_1 = y_1(T)$ — решение уравнения (1.2) с начальными условиями $y_1(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = 0$. Сферическая поверхность пузыря будет устойчива относительно возмущения с номером n , если амплитуда $y(t, n, \varepsilon, \sigma, k)$ ограничена во времени. Для этого характеристический показатель μ должен быть величиной чисто мнимой, что выполняется лишь при $|y_1(T)| < 1$. При $|y_1(T)| > 1$



Р и с. 1

(1.3)
$$\text{Re } \mu = \text{Ln} (|y_1(T)| + \sqrt{y_1^2(T) - 1})/T$$
 и амплитуда возмущений экспоненциально растет. Таким образом, для решения задачи устойчивости и определения закона нарастания возмущений достаточно рассчитать значение $y_1(T)$. Пусть $Y_0(t) = \begin{pmatrix} y_1 & \dot{y}_1 \\ y_2 & \dot{y}_2 \end{pmatrix}$ есть матрица двух линейно независимых решений уравнения (1.2) с единичными начальными данными $Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда для матрицы Y двух произвольных линейно независимых решений с начальными значениями $Y(0)$ справедливо $Y(T/2) = Y(0)D$, $Y(T/2)D^{-1} = Y(0)$ ($D = Y_0(T/2)$). Учитывая симметрию функций $R(t)$ и $\Phi(t)$ относительно момента времени $t = T/2$ и производя в последней формуле замену $t \rightarrow T - t$, при которой \dot{y} переходит в $-\dot{y}$, получим

$$Y(T) = Y(T/2)JD^{-1}J = Y(0)DJD^{-1}J, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В частности, $Y_0(T) = DJD^{-1}J$. Отсюда, в силу того что $|D| = 1$, следует

$$(1.4) \quad y_1(T) = 2y_1(T/2)\dot{y}_2(T/2) - 1,$$

и для решения задачи устойчивости достаточно рассчитать уравнение (1.2) на полупериоде пульсации.

2. Динамика коротковолновых возмущений ($n \gg 1$). Уравнение для амплитуд возмущений (1.2) можно переписать в виде

$$(2.1) \quad \ddot{y} + \left(\lambda^2 q(t) - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right) y = 0;$$

$$(2.2) \quad q(t) = -\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\sigma(n^2 - 1)(n + 2)}{R^3(2n + 1)}, \quad \lambda^2 = n + \frac{1}{2}.$$

Для достаточно крупных пузырей параметр σ очень мал, так, $\sigma \approx 0,15 \cdot 10^{-3}$ для пузыря в воде при $R_0' = 10^{-3}$ м, $p_0 = 0,1$ МПа, $\varepsilon = 0,2$. Поэтому при нелинейных пульсациях, когда ускорение стенки пузыря достигает больших величин, вид функции $q(t)$ в широком диапазоне значений n определяется в основном членом $-\ddot{R}/R$. В силу этого функция $q(t)$ будет иметь в точке $t_* < T/2$ простой нуль: $q(t_*) = 0$. Причем $q(t) > 0$ при $0 \leq t < t_*$ и $q(t) < 0$ при $t_* < t \leq T/2$. В случае $n \gg 1$ уравнение (2.1) можно рассматривать как уравнение с большим параметром, имеющее точку поворота.

В соответствии с ВКБ-методом два линейно независимых решения (2.1) с точностью до $O(\lambda^{-1})$ при $0 \leq t < t_*$ запишем в виде

$$(2.3) \quad y_i = q^{-1/4} C_i^- \cos(\lambda I(t) + \pi/4 + \psi_i), \quad I(t) = \int_t^{t_*} \sqrt{-q} dt.$$

Амплитуды возмущений остаются ограниченными на этом интервале времени для любого n . Аналогично в области $t_* < t \leq T/2$ с точностью до $O(\lambda^{-1})$ справедливо

$$(2.4) \quad y_i = (-q)^{-1/4} C_i^+ \exp(\lambda K(t)), \quad K(t) = \int_{t_*}^t \sqrt{-q} dt.$$

Экспоненциально малое слагаемое $\exp(-\lambda K)$ здесь не учитывается. Экспоненциально растущее решение (2.4) отвечает неустойчивости Тейлора границы раздела двух жидких сред при ускорении, направленном от легкой жидкости к более тяжелой.

Постоянные C_i^+ и C_i^- в формулах (2.3) и (2.4) связаны между собой решением уравнения (2.1) в малой окрестности точки поворота t_* , где асимптотические представления (2.3) и (2.4) теряют силу. Задача перехода в асимптотическом решении через простой нуль функции $q(t)$ была решена в квантовой механике в квазиклассической теории прохождения частицы через потенциальный барьер. Согласно формулам сопряжения квантовой механики [6], с точностью до малых $O(\lambda^{-2/3})$ справедливо

$$(2.5) \quad C_i^+ = C_i^- \cos \psi_i.$$

Из формул (2.3)–(2.5) с учетом единичных начальных условий для y_1 , y_2 и $q(0) = 0$ можно найти соответствующие значения постоянных ψ_i , C_i^- :

$$\psi_1 + \lambda I(0) + \pi/4 = 0, \quad C_1^- = q^{1/4}(0), \quad \psi_2 = \psi_1 + \pi/2, \quad C_2^- = \lambda^{-1} q^{-1/4}(0).$$

Отсюда и из (1.4), (2.4), (2.5) следует

$$(2.6) \quad y_1(T) = \exp(2\lambda K_0) \cos 2\lambda I_0, \quad K_0 = K(T/2), \quad I_0 = I(0).$$

С ростом номера поверхностной моды n характеристический показатель (1.3) растет по порядку величины как $2\lambda K_0/T \sim \sqrt{n}$, что справедливо в ограниченной области значений n , в которой можно пренебречь капиллярными силами.

3. Асимптотики при нелинейных пульсациях ($\varepsilon \ll 1$). Рассмотрим случай, когда капиллярные силы несущественны и можно положить $\sigma = 0$. Учитывая первый интеграл уравнения Рэлея

$$(3.1) \quad \dot{R}^2 = \frac{2}{3} ((1 + \alpha) R^{-3} - \alpha R^{-3k} - 1), \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{k-1},$$

функцию $q(t)$ в (2.1) представим в виде

$$(3.2) \quad q(t) = -\ddot{R}/R = (1 + \alpha) R^{-5} - k\alpha R^{-3k-2}.$$

В предельном случае $\varepsilon = 0$ уравнения (2.1) и (3.1) с указанной функцией $q(t)$ описывают замыкание кавитационной полости в безграничном объеме идеальной жидкости в отсутствие капиллярных сил. На конечной стадии

замыкания $R \rightarrow 0$ у решения (2.1) есть асимптотика

$$(3.3) \quad y \sim \text{const } R^{5/4} \exp \left(i \sqrt{\frac{3}{2} \left(n - \frac{25}{24} \right) \ln R} \right), \quad i = \sqrt{-1}.$$

С другой стороны, из (2.3) при $n \gg 1$ следует $y \sim \text{const } R^{5/4} \exp \left(i \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{1 + \sqrt{1 - R^3}}{1 - \sqrt{1 - R^3}} \right)$. При $R \rightarrow 0$ это выражение имеет асимптотику $y \sim \\ \sim \text{const } R^{5/4} \exp \left(i \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda \ln R \right)$, и для точного совпадения ее с (3.3) нужно положить $\lambda = \sqrt{n - 25/24}$. В дальнейшем параметр λ будет определяться именно таким образом, а не как в (2.2).

При $\varepsilon \rightarrow 0$ радиус пузыря при пульсациях изменяется в пределах от своего максимального значения $R(0) = 1$ до минимального $R_m \equiv \equiv R(T/2) \rightarrow 0$:

$$R_m = b^{-1} (1 + A/(3k - 3) + O(\alpha^{2/(k-1)})), \quad A = (1 + \alpha)^{-1} b^{-3}, \\ b = (1 + 1/\alpha)^{1/(3(k-1))}.$$

В момент времени $t_* \in (0, T/2)$, являющийся простым нулем функции $q(t)$ (3.2), $R_* \equiv R(t_*) = b^{-1} k^{1/(3(k-1))}$. Отметим, что при $\varepsilon \ll 1$ $R_* \sim R_m \ll 1$. Из (2.3), (2.6), (3.2) вытекает

$$(3.4) \quad I_0 = \int_0^{t_*} \sqrt{q} dt = - \sqrt{\frac{3}{2}} \int_1^{R_*} L(R) \frac{dR}{R}, \\ L(R) = \sqrt{\frac{1 + \alpha - \alpha k R^{-3(k-1)}}{1 + \alpha - \alpha R^{-3(k-1)} - R^3}}.$$

Знак минус перед последним интегралом появляется вследствие того, что скорость стенки пузыря на стадии захлопывания отрицательна: $\dot{R} \leq 0$.

Для $R \sim R_*$ можно положить

$$(3.5) \quad L(R) \approx L_1(R) = \sqrt{\frac{1 + \alpha - \alpha k R^{-3(k-1)}}{1 + \alpha - \alpha R^{-3(k-1)}}}$$

с точностью до членов $O(\alpha^{1/(k-1)})$. При $R \sim 1$ с точностью до малых $O(\alpha^2)$ справедливо

$$(3.6) \quad L \approx L^+ = L|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha, \quad L_1 \approx L^- = 1 + \frac{\partial L_1}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha.$$

Учитывая, что $L^+ \rightarrow L^-$ при $R \rightarrow R_*$, можно доказать справедливость при $\alpha \rightarrow 0$ составного разложения, пригодного при любом $R \in [R_*, 1]$: $L = L_1 + L^+ - L^- + O(\alpha^{1/(k-1)}, \alpha^2)$. Отсюда и из (3.5), (3.6) следует $L = L_1 + L_2 + \alpha L_3/2 + O(\alpha^{1/(k-1)}, \alpha^2)$, $L_2 = (1 - R^3)^{-1/2} - 1$, $L_3 = R^{-3(k-1)} [(1 - R^{3k})(1 - R^3)^{-3/2} - 1 - kL_2]$.

Подставляя эти выражения в (3.4), получим с точностью до членов $\ln \alpha O(\alpha^{1/(k-1)}, \alpha^2)$

$$(3.7) \quad I_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(I_1 + I_2 + \frac{\alpha}{2} I_3 \right), \quad I_i = \int_{R_*}^1 L_i \frac{dR}{R}.$$

Первые два интеграла вычисляются в элементарных функциях

$$I_1 = - \frac{1}{3(k-1)} \ln \left[\alpha \frac{k-1}{4} \left(\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1} \right)^{\sqrt{k}} \right] + \alpha \frac{k+1}{6(k-1)} + O(\alpha^2), \quad I_2 = \\ = \frac{2}{3} \ln 2 + O(\alpha^{1/(k-1)}).$$

Интеграл $I_3 = \int_0^1 I_3 \frac{dR}{R} + O(\alpha^{1/(k-1)})$ в рамках точности вычисления I_0 зависит параметрически только от k и может быть легко рассчитан численно. Аналогично I_0 значение K_0 также определяется приближенно. Согласно (2.4), (2.6), (3.2),

$$(3.8) \quad K_0 = \int_{t_*}^{T/2} \sqrt{-q} dt = \frac{1}{\sqrt{6}(k-1)} \int_{x_*}^{x_m} M(x) \frac{dx}{x},$$

$$x = \frac{\alpha}{1+\alpha} R^{-3(k-1)}, \quad x_* = k^{-1}, \quad x_m = 1 + O(\alpha^{1/(k-1)}),$$

$$M = \sqrt{\frac{kx-1}{1-x-Ax^{-1/(k-1)}}} = \sqrt{\frac{kx-1}{1-x}} + O(\alpha^{1/(k-1)}).$$

Интегрируя приближенное значение M в пределах от x_* до 1, получим с точностью до $\ln \alpha O(\alpha^{1/(k-1)})$

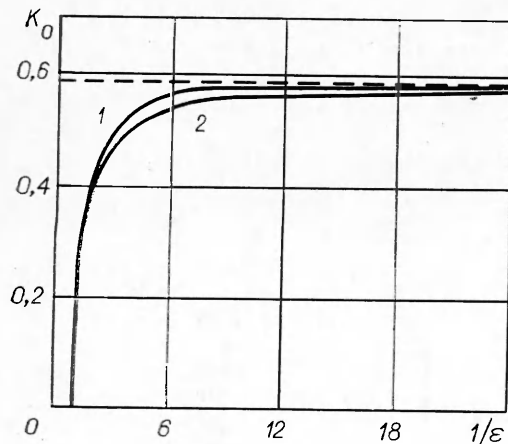
$$(3.9) \quad K_0 = \pi / [\sqrt{6}(\sqrt{k} + 1)].$$

В табл. 1 для разных k дано сравнение точных значений K_0 , определенных с помощью ЭВМ по формуле (3.8), с их приближенными значениями (3.9). Верхнее число — точное значение, вычисленное при $\varepsilon = 0,1$, нижнее — приближенное.

Используя формулы (1.3), (2.6), (3.4), (3.9), можно вычислить значение характеристического показателя μ и решить, таким образом, задачу устойчивости сферической поверхности пузыря.

В табл. 2 представлены значения μ для $k = 1,4$, вычисленные по этим приближенным формулам (нижнее число) и найденные по амплитуде $y_1(T)$, определенной численным расчетом системы (1.1), (1.2) (верхнее число). Сильное расхождение значений μ при $\varepsilon = 0,1$ и $n = 50$ объясняется тем, что в (2.6) аргумент косинуса вычисляется с помощью (3.7) с точностью до членов $\sqrt{n} \ln \alpha O(\alpha^{1/(k-1)}), \alpha^2$, и поэтому для более точного определения характеристического показателя при больших n и не очень маленьких ε необходимо рассчитывать I_0 непосредственно по (3.4) численным интегрированием. Отметим, что приближенное вычисление K_0 по (3.9) не дает большой относительной ошибки при определении μ .

Формула (3.9) показывает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует предельное значение K_0 . На рис. 2 кривой 1 представлен график зависимости K_0 (3.8) при $k = 1,4$ от перепада давления $p_\infty/p_0 = 1/\varepsilon$, штриховая линия соответствует предельному значению (3.9). Видно, что K_0 существенным образом зависит от ε лишь в области сравнительно малых амплитуд пульсаций.



Р и с. 2

В этой области, когда справедлива линейная теория пульсаций пузыря ($1 - \varepsilon \ll \ll 1$), имеем $R(t) = 1 - (1 - \varepsilon) \times \times (1 - \cos \omega t) / \omega^2$, $\omega^2 = 3k$ и $K_0 = = 0,692 \sqrt{(1 - \varepsilon)/k}$. В частности, для $k = 1,4$ $K_0 = 0,585 \sqrt{1 - \varepsilon}$. График значений K_0 , найденных по этой формуле, показан кривой 2. Примечательным фактом является то, что формула, полученная на основе линейной теории, хорошо описывает поведение K_0 в области сильных нелинейных пульсаций пузыря.

Таблица 1

k	K_0
1,1	0,625 0,626
1,2	0,609 0,612
1,3	0,593 0,599
1,4	0,577 0,587

Таблица 2

n	μ		
	ε		
	0,1	0,05	0,01
2	0,992 0,882	0,314 0,272	0,414 0,602
6	1,251 1,109	1,675 1,650	1,544 1,546
10	2,003 1,949	2,051 2,027	2,271 2,251
50	4,069 2,654	4,512 4,557	4,132 4,110

При достаточно малых начальных возмущениях основную роль играют возмущения с максимальным характеристическим показателем, отвечающим номеру моды $n = N$. Оценка номера N возможна на основе учета капиллярных сил. В области коротких волн ($n \gg 1$) может быть важна также вязкость, которую для простоты не учитываем.

4. Влияние капиллярных сил. С учетом капиллярных сил $\sigma \neq 0$. Рассмотрим случай достаточно крупного пузыря, когда $\sigma \ll 1$ и влияние сил поверхностного натяжения сказывается только в области коротких волн. Влиянием σ на поведение радиуса $R(t)$ можно поэтому пренебречь. Параметр K_0 в (2.4), (2.6), определяющий в основном значение характеристического показателя, запишем в виде

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{6}(k-1)} \int_{x_*}^{x_m} \sqrt{\frac{kx-1-\Sigma x^{-2/3(k-1)}}{1-x-Ax^{-1/(k-1)}}} \frac{dx}{x^2}$$

где x, x_m определены в (3.8); $\Sigma = \sigma n^2 b^{-2}(1+\alpha)$; x_* находится из уравнения $\Sigma = (kx_* - 1)x_*^{2/3(k-1)}$.

При нелинейных пульсациях большой амплитуды, как показано выше, можно положить $x_m = 1$, а членом, содержащим $A \sim \alpha^{1/(k-1)}$ пренебречь:

$$K_0 \approx \frac{1}{\sqrt{6}(k-1)} \int_{x_*}^1 \sqrt{\frac{kx-1-\Sigma x^{-2/3(k-1)}}{1-x}} \frac{dx}{x}$$

Возможна аналитическая аппроксимация этого интеграла, если сделать замену $kx-1-\Sigma x^{-2/3(k-1)} \approx (k-1-\Sigma) \frac{x-x_*}{1-x_*}$, погрешность вычисления интеграла не превышает 1% для $k = 1,4$. В итоге

$$K_0 \approx \frac{\pi}{\sqrt{6}(k-1)} \sqrt{(k-1-\Sigma) \frac{1-\sqrt{x_*}}{1+\sqrt{x_*}}}$$

В силу того что $\cos 2\lambda I_0$ в (2.6) является быстроосциллирующей функцией λ , наибольшую скорость роста имеет возмущение с номером, близким к тому, для которого показатель экспоненты $2\lambda K_0$ максимален. Максимум $2\lambda K_0$ достигается при фиксированном значении Σ_N , зависящем параметрически только от k . При этом номер наиболее быстро растущей моды

$$(4.1) \quad N \approx \sqrt{\frac{\Sigma_N}{\sigma(1+\alpha)}} b, \quad b \approx \frac{1}{R_m}$$

Для $k = 1,4$ максимум $2\lambda K_0$ достигается при $\Sigma_N \approx 0,064$, $x_* \approx 0,783$ и

$$(4.2) \quad \max(2\lambda K_0) \approx 0,462 \sqrt{b}(\sigma(1+\alpha))^{-1/4}$$

С увеличением n ($n > N$) повышается и роль поверхностного натяжения, показатель $2\lambda K_0$ уменьшается, и, начиная с некоторого номера N_* , капиллярные силы должны подавить развитие неустойчивости Тейлора на длинах волн, соответствующих $n > N_*$. С ростом n точка поворота $t_* \rightarrow T/2$ и $K_0 \rightarrow 0$ в (2.4), и, хотя не следует ожидать в этом случае от ВКБ-метода большой точности в области $t_* < t \leq T/2$, тем не менее можно оценить N_* как номер моды, при котором $t_* = T/2$ и область отрицательных значений $q(t)$ в (2.2) исчезает: $N_* \sim \sqrt{\frac{k-1}{\sigma(1+\alpha)}} b$.

Область наиболее опасных для разрушения пузыря номеров n тогда определим как $N \leq n < N_*$. Отметим, что $N_*/N = \sqrt{(k-1)/\sum N}$ и, в частности, для $k = 1,4$ $N_* \approx 2,5N$. На основе (4.1), (4.2) можно проанализировать влияние на развитие неустойчивости безразмерного перепада давления ε , начального давления p_0 , начального радиуса пузыря R'_0 , коэффициента поверхностного натяжения σ' . Видно, что изменение этих параметров, приводящее к уменьшению ε или $\sigma = \varepsilon\sigma'/p_0R'_0$, увеличивает N и скорость роста соответствующего возмущения, усиливая тем самым неустойчивость поверхности пузыря.

Интересно оценить найденные величины на конкретном примере. Пусть $R'_0 = 10^{-3}$ м, $p_0 = 0,1$ МПа, $\varepsilon = 0,1$, $\sigma' = 0,073$ Н/м, тогда $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-5}$, $b \approx 3,8$ и, согласно (4.1), (4.2),

$$N \approx \sqrt{\frac{0,064}{\sigma(1+\alpha)}} b \approx 100, \quad \max(2\lambda K_0) \approx 9,24.$$

Следовательно, за два цикла колебаний радиуса пузыря амплитуда наиболее опасного возмущения с номером N вырастет в огромное число раз ($\sim 10^8$), этого более чем достаточно для разрушения поверхности на этой длине волны, если под разрушением понимать превышение амплитудой четверти длины волны, т. е. выход малого возмущения в область конечных возмущений. Отметим, что одновременно амплитуда возмущений с $n \sim 2-4$ изменится всего на один-два порядка.

Таким образом, неустойчивость Тейлора поверхности газового пузыря является более существенным фактором, чем неустойчивость Биркгофа—Плессета, обусловленная сферической симметрией задачи при схлопывании кавитационного пузыря [3]. Последняя не имеет свойства накапливаться при повторении циклов схлопывания, в то время как для неустойчивости Тейлора наблюдается эффект возрастания амплитуды возмущений на каждом цикле в $\exp(2\lambda K_0)$ раз. Кроме того, для проявления неустойчивости Биркгофа—Плессета необходимо схлопывание пузыря во много раз, а для проявления неустойчивости Тейлора достаточно однократного схлопывания в 3—4 раза по радиусу, если длина волны возмущения достаточно мала. Из вышесказанного следует, что основная причина разрушения поверхности пульсирующего газового пузыря — неустойчивость Тейлора.

В настоящей работе не рассматривался случай пузыря, совершающего наряду с пульсациями еще и поступательное движение. Тем самым неустойчивость Кельвина—Гельмгольца поверхности пузыря, связанная с разрывом касательной скорости на границе газ—жидкость, осталась за пределами обсуждения. Можно, однако, предположить, что при достаточно небольших начальных поступательных скоростях пузыря неустойчивость Кельвина—Гельмгольца менее значительна, чем неустойчивость Тейлора, и выводы, сделанные выше, останутся в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Roy. Soc. — 1950. — V. A201. — P. 192.
2. Коул Р. Подводные взрывы. — М.: ИЛ, 1950.

3. Plesset M. S., Mitchell T. P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // Quart. Appl. Math.— 1956.— V. 13, N 4.
4. Hermans W. On the instability of a translating gas bubble under the influence of a pressure step // Philips Res. Rept. Suppl.— 1973.— N 3.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.
6. Шифф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1959.

Поступила 18/VIII 1987 г.

УДК 533.6.011

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК ПРИ УСКОРЕННОМ И ВНЕЗАПНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

В. В. Подлубный, А. С. Фонарев
(Москва)

Наряду с проведением расчетов аэродинамических и прочностных характеристик тел в стационарном режиме движения часто возникает задача оценки нестационарных сил, действующих при резких изменениях скоростного режима и, в частности, при резком разгоне тела из состояния покоя до заданной скорости стационарного полета. Представляет интерес определение дополнительных нагрузок (по сравнению со стационарной фазой движения), возникающих при неустановившемся обтекании. Важные характеристики при этом — максимально возможные давление, сила и характерное время нестационарных переходных процессов.

Ниже рассмотрена задача об ускоренном движении некоторых тел — сферы, цилиндра с плоским срезом, конуса — от состояния покоя до заданной дозвуковой или сверхзвуковой скорости при разных ускорениях, включая и внезапное движение тела с заданной скоростью. С применением численного метода получены нестационарные аэродинамические характеристики тел при разных ускорениях. Предложен аналитический метод расчета распределения давления в начальный момент и максимальных сил при внезапном движении.

1. Постановка задачи и метод численного решения. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ тело вращения заданной формы начинает движение из состояния покоя и за время T , двигаясь равноускоренно, достигает скорости, соответствующей заданному числу Маха M . Газ считается совершенным, находится в состоянии покоя с постоянным давлением p_0 и плотностью ρ_0 , показателем адиабаты $\gamma = 1,4$.

В системе координат, связанной с телом, течение газа описывается двумерными нестационарными уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u y) + \frac{\partial}{\partial z}[(p + \rho u^2) y] + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v y) + \frac{\partial}{\partial y}[(p + \rho v^2) y] &= p, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) y \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) y \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) y \right] &= 0 \end{aligned}$$

и уравнением состояния $p = \rho e(\gamma - 1)$. Здесь p — давление; ρ — плотность; u, v — продольная и вертикальная составляющие скорости в декартовой системе координат x, y ; e — удельная энергия единицы массы газа; t — время.

В качестве характерных размерных величин примем: размер тела L , невозмущенные значения давления p_0 и плотности ρ_0 , скорость $u_0 = \sqrt{p_0/\rho_0}$, время $t_0 = L/u_0$, силу $F = p_0 L^2$. Величина L является радиусом сферы, основания цилиндра или конуса. Все результаты расчета даны в безразмерном виде.