

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 539.37; 622.83

КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ИДЕАЛЬНО СВЯЗНЫХ И СЫПУЧИХ ТЕЛ

О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: revuzhenko@yandex.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Для формулировки критериев предлагается использовать, наряду с известными, новые инварианты тензора напряжений. Инварианты строятся как средние значения касательных и нормальных напряжений, а также как их отношения по всем площадкам, которые проходят через главные направления тензора напряжений. Приведены примеры использования полученных условий предельного состояния для вывода уравнений деформирования геосреды на основе ассоциированного закона течения.

Горные породы, прочность, предельное состояние, инварианты, напряжения

Введение. Классические критерии предельного состояния и разрушения учитывают напряжения только на самых опасных (с точки зрения соответствующей теории) площадках. Например, на площадках, где доля касательных напряжений по отношению к нормальным наибольшая (критерий Кулона–Мора), или на площадках с наибольшими растягивающими напряжениями и т. д. Вместе с тем во многих работах со ссылкой на экспериментальные данные отмечалось, что в критериях должны быть представлены напряжения, действующие на всех площадках элементарного объема тела [1–3]. В связи с этим необходимо определить процедуры осреднения напряжений, которые, с одной стороны, давали бы адекватные интегральные характеристики напряженного состояния, а с другой — могли быть использованы для формулировок критериев предельного состояния и разрушения. В работе [4] указано, что осреднение должно проводиться только по поверхности сферы, поскольку только на сфере, ввиду ее полной симметрии, направления всех нормалей к ее поверхности будут вполне равноправны.

Оказывается, можно найти еще один, отличный от [4], способ осреднения, в котором в равной мере учитываются напряжения на всех площадках элементарного объема. Пусть σ_n, τ_n — нормальное и касательное напряжения, действующие на площадке с нормалью \bar{n} . Обратимся к плоскости, в которой σ_n, τ_n являются декартовыми координатами. В данной плоскости точки (σ_n, τ_n) заполняют двумерную область S , ограниченную тремя полуокружностями Мора (рис. 1).

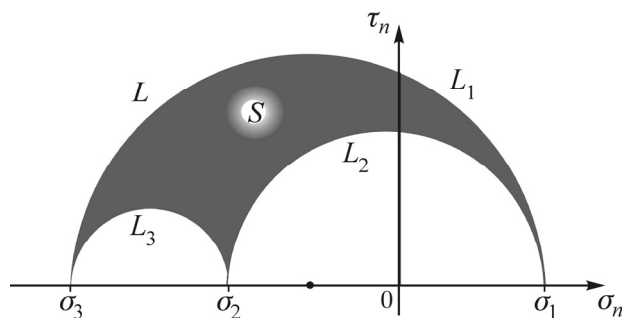


Рис. 1

Пусть $f(\sigma_n, \tau_n)$ — некоторая функция напряжений, которую необходимо осреднить по всем площадкам. Например,

$$f(\sigma_n, \tau_n) = \begin{cases} \sigma_n & \text{при } \sigma_n > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_n \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

если нас интересуют критерии хрупкого разрушения, или $f = \tau_n$ для пластических тел, $f = \tau_n / \sigma_n$ для идеально сыпучих тел и т. д. В [5] предложен способ осреднения, который сводится к двойному интегрированию в плоскости (σ_n, τ_n) :

$$\langle f \rangle_S = \frac{1}{S} \iint_S f(\sigma_n, \tau_n) d\sigma_n d\tau_n. \quad (2)$$

Представляет интерес также процедура осреднения, когда двойной интеграл заменяется криволинейным интегралом по границе L области S :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L} \oint_L f(\sigma_n, \tau_n) dl. \quad (3)$$

Через S и L обозначены как сама область и ее граница, так и их площадь и длина. Интегралу (2) соответствует осреднение по всем площадкам элементарного объема тела, а интегралу (3) — только по трем семействам площадок, каждая из которых проходит через одно из направлений главных напряжений. Процедуры (2) и (3) приводят к новым инвариантам тензора напряжений. По своему построению данные инварианты имеют ясный механический смысл, поэтому их можно использовать для формулировки различных критериев разрушения или предельного состояния горных пород, пластических и сыпучих материалов.

В данной работе речь идет не столько о конкретных критериях, сколько о расширении арсенала средств для формулировки тех или иных критериев. Важным представляется также и то обстоятельство, что формулировка условий предельного состояния (условий текучести) открывает пути для построения математических моделей деформирования среды. Здесь можно опираться на ассоциированный или неассоциированный закон течения, а также на известные методы построения и исследования замкнутых моделей [6]. Рассмотрим примеры реализации указанных возможностей.

Идеально сыпучая среда. Предположим вначале, что среда сцеплением не обладает и все напряжения являются сжимающими. Положим $f = \tau_n / \sigma_n$. Интегралы удобнее вычислять, используя более привычные обозначения: $\sigma_n = x$, $\tau_n = y$, r — радиус одного из кругов Мора, a — координата его центра, ϑ — полярный угол (рис. 2).

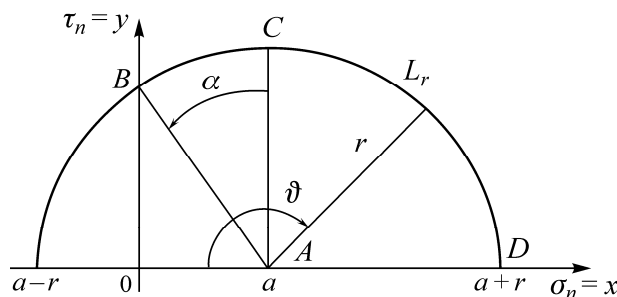


Рис. 2

Подсчитаем отдельно числитель и знаменатель в формуле (3). Замкнутый контур L состоит из трех полуокружностей: $L = L_1 + L_2 + L_3$. Для них имеем соответственно

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, & a_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, & r_2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, & a_2 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \\ r_3 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, & a_3 &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, & L &= \pi(\sigma_1 - \sigma_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Для произвольной полуокружности L_r , показанной на рис. 2, имеем

$$J_r = \int_{L_r} \frac{\tau_n}{\sigma_n} dl = \int_0^\pi \frac{r \sin \vartheta}{a - r \cos \vartheta} r d\vartheta = r \ln \left| \frac{a+r}{a-r} \right|. \quad (5)$$

Применяя формулу (5) к каждой из полуокружностей (4) и подставляя результаты в (3), получим

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \ln \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right| + (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right| + (\sigma_2 - \sigma_3) \ln \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right|}{2\pi(\sigma_1 - \sigma_3)}. \quad (6)$$

Данное выражение можно назвать логарифмическим инвариантом тензора напряжений. Для безразмерных напряжений

$$2\pi \left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \ln |\sigma_1| + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \ln |\sigma_2| + \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \ln |\sigma_3|.$$

Отсюда видна тесная связь логарифмического инварианта с параметром Лоде–Надаи. Теперь условие предельного состояния можно записать таким образом:

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = -\operatorname{tg} \Phi,$$

где Φ — постоянная материала. Ассоциированный закон течения имеет вид

$$\varepsilon_i = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle, \quad i = 1, 2, 3,$$

где ε_i — скорость деформаций; λ — множитель, зависящий от краевых условий.

Идеально связная (пластическая) среда. Для пластической среды $f(\sigma_n, \tau_n) = \tau_n$. Интеграл по окружности L_r равен

$$G_r = \int_{L_r} \tau_n dl = \int_0^\pi r \sin \vartheta r d\vartheta = 2r^2.$$

Подставляя данный результат в (2) и используя (3), получим

$$\langle \tau_n \rangle = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2\pi} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (7)$$

Структура формулы чрезвычайно интересна. Во-первых, ее числитель — это квадрат октаэдрического напряжения (здесь и ниже выражения сравниваются с точностью до известных констант). С другой стороны, числитель — это квадрат интенсивности касательных напряжений [1]. Казалось бы, что на этой основе для получения размерности напряжения самым естественным является применение операции извлечения квадратного корня [1]. Однако вычисление интеграла (3) показывает, что получение размерности напряжения должно происходить не путем извлечения корня, а путем деления на величину максимального касательного напряжения. Сравним теперь среднее в смысле (7) с интенсивностью касательных напряжений. Представим (7) в следующей форме:

$$\langle \tau_n \rangle = \rho(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

где

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{2\pi(\sigma_1 - \sigma_3)}.$$

Значения ρ лежат в довольно узком интервале $\left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \frac{\sqrt{1.5}}{2\pi} \right)$, поэтому условие текучести на основе инварианта (7)

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \kappa = 0$$

и условие на основе постоянства интенсивности касательных напряжений будут близки между собой.

Из ассоциированного закона следует, что

$$\frac{\varepsilon_1}{2\lambda} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - \frac{\pi\kappa}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

$$\frac{\varepsilon_2}{2\lambda} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

$$\frac{\varepsilon_3}{2\lambda} = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} + \frac{\pi\kappa}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

Здесь также видна тесная связь с параметром Лоде – Надаи:

$$\varepsilon_i = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \langle \tau_n \rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

Хрупкое разрушение. Рассмотрим теперь площадки, на которых нормальные напряжения являются растягивающими, т. е. $\sigma_n \geq 0$. Вычислим интеграл (3) для функции f , определяемой условиями (1). Вначале получим числитель в выражении (3) для произвольной окружности, не конкретизируя ее параметров. Пусть a — координата центра окружности и r — ее радиус. Если $a \leq -r$, то вся окружность находится в области сжимающих напряжений и $\langle \sigma_n \rangle = 0$. При $-r < a < r$ часть площадок, соответствующая дуге BCD окружности, находится в области растяжения, остальная часть — в области сжатия. Пусть

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{r}. \quad (8)$$

Тогда длина дуги BCD равна

$$L_r = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) r, \quad (9)$$

а интеграл по этой дуге

$$J_r = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\pi} x r d\vartheta = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) ar + r^2 \cos \alpha. \quad (10)$$

Если $\alpha > r$, то вся окружность перемещается в область растяжения. В этом случае необходимо учитывать всю длину полуокружности и соответствующий интеграл по ней:

$$L_r = \pi r, \quad J_r = \pi ar. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь реальную ситуацию, когда действуют три главных напряжения $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ и им соответствуют три полуокружности Мора. Для каждой из окружностей (в зависимости от ее расположения относительно оси $\sigma_n = 0$) определяем по формулам (8)–(11) длину и интеграл. Затем подставляем их в (3). Через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ обозначим правую часть (8) с соответствующими индексами у параметров a и r .

Возможны четыре случая расположения кругов Мора относительно оси $\sigma_n = 0$. Для каждого из них выражение для среднего растягивающего напряжения $\langle \sigma_n \rangle$ дается своей формулой. Первый случай реализуется, когда $\sigma_1 < 0$. При этом на всех площадках действуют только сжимающие напряжения и $\langle \sigma_n \rangle \equiv 0$. Будем теперь постепенно увеличивать σ_1 , сдвигая круги Мора в область все больших растягивающих напряжений. Из длины L исключим вертикальный отрезок, где $\sigma_n = 0$. Пусть σ_1 стало растягивающим напряжением, а оба напряжения σ_2 и σ_3 остаются по-прежнему сжимающими:

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 < 0, \quad \sigma_1 > 0$$

(случай 2, именно он показан на рис. 1). Тогда интеграл (3) равен

$$\langle \sigma_n \rangle = J/L, \quad (12)$$

где

$$J = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) \frac{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}{4} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} \cos \alpha_1 + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \right) \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \cos \alpha_2,$$

$$L = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \right) \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \alpha_2 = \arcsin \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Если два главных напряжения являются растягивающими ($\sigma_2, \sigma_1 > 0$), а третье — сжимающим ($\sigma_3 < 0$), то имеем представление (12), где

$$J = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) \frac{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}{4} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} \cos \alpha_1 + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_3 \right) \frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{4} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4} \cos \alpha_3 + \pi \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4},$$

$$L = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_3 \right) \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} + \pi \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \alpha_3 = \arcsin \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}.$$

Это третий случай. Четвертому случаю соответствуют все растягивающие напряжения $\sigma_3 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_1 > 0$. Здесь интеграл (3) приводит к следующему результату:

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Для данного расположения кругов Мора среднее главное напряжение в окончательный результат не вошло. Если учитывать только площадки с растягивающими нормальными напряжениями, то критерий разрушения можно записать в виде

$$\langle \sigma_n \rangle = \sigma^*, \quad \sigma^* = \text{const}.$$

В более общем случае

$$\psi(\langle \tau_n \rangle, \langle \sigma_n \rangle) = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

где ψ — линейная или нелинейная функции своих аргументов.

ВЫВОДЫ

Средние значения напряжений по площадкам, которые проходят через направления главных напряжений, представляют собой новую систему инвариантов тензора напряжений. Инварианты можно использовать для формулировки условий предельного состояния и разрушения, а также для построения моделей деформирования на основе ассоциированного либо неассоциированного закона течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Виноградов В. В.** Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок. — Киев: Наук. думка, 1989.
2. **Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г.** Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001.
3. **Литвинский Г. Г.** Аналитическая теория прочности горных пород и массивов. — Донецк: Норд-Пресс, 2008.
4. **Новожилов В. В.** Теория упругости. — М.: Судпромгиз, 1956.
5. **Ревуженко А. Ф.** О критериях разрушения горных пород, основанных на новой системе инвариантов тензора напряжений // ФТПРПИ. — 2014. — № 3.
6. **Радаев Ю. Н.** Об одной достижимой оценке снизу трехмерного инварианта напряжений Кулона–Треска системами “двумерных” касательных напряжений // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. — 2012. — № 4 (14).

Поступила в редакцию 15/VI 2014