

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ ПОРОХА

О. Я. Романов

(Ленинград)

Использование интегрального уравнения для определения нестационарной скорости горения пороха обладает определенным достоинством. В рамках теории, учитывающей инерционность лишь прогретого слоя конденсированной фазы (к-фазы) [1], оно заключается в возможности не производить более сложный расчет нестационарного температурного поля в прогретом слое к-фазы и ограничиться системой уравнений, описывающих изменение параметров, зависящих только от времени.

При определении скорости нестационарного горения реальных порохов целесообразно проводить учет инерционности процессов, протекающих в прогретом слое и реакционной зоне к-фазы. В этом случае, как показано ниже, получаются два интегральных соотношения — для температуры и концентрации на поверхности пороха. На их основе строятся приближенные методы расчета скорости горения, не требующие определения нестационарных полей температуры и концентрации в к-фазе.

1. Основные соотношения

Нестационарное распределение температуры T и относительной концентрации β в к-фазе, занимающей полупространство $x \geq 0$, описывается системой уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{Q}{c\rho} W(T, \beta), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = u \frac{\partial \beta}{\partial x} - W(T, \beta). \quad (1.2)$$

Здесь t — время, κ , c , ρ , Q — температуропроводность, теплоемкость, плотность и тепловой эффект химической реакции в к-фазе, идущей со скоростью $W(T, \beta)$, u — скорость нестационарного горения.

Граничные и начальные условия

$$T(0, t) = T_s(t); \beta(0, t) = \beta_s(t); T(\infty, t) = T_0; \beta(\infty, t) = 1; \quad (1.3)$$

$$T(x, 0) = T_n(x); \beta(x, 0) = \beta_n(x) \quad (1.4)$$

позволяют определить поля концентрации и температуры и нестационарную скорость горения, имеющую смысл переменного во времени собственного значения задачи, в зависимости от T_s и β_s .

В предположении о безынерционности процессов, протекающих в зонах горения над поверхностью пороха и зоне диспергирования (в тонком слое к-фазы толщиной порядка диаметра газового пузырька), имеем две связи [2]

$$u = u(p, T_s, f_s, \beta_s); \beta_s = \beta_s(p, T_s, f_s, u), \quad (1.5)$$

где f_s — градиент температуры на границе со стороны к-фазы, p — общий символ для совокупности экстенсивных параметров (давление, скорость тангенциального газового потока и т. п.).

Условия (1.5) могут быть установлены при рассмотрении конкретных механизмов горения и диспергирования, либо посредством обработки результатов, полученных в опытах со стационарным горением. При необходимости можно учесть неадиабатичность процессов, протекающих над поверхностью пороха, по способу, изложенному в [3].

С заданием функции $p(t)$ система уравнений (1.1)–(1.5) становится замкнутой и позволяет определить $u(t)$.

2. Интегральные уравнения задачи

Преобразуем (1.1) и (1.2) в интегральные уравнения. Воспользуемся преобразованием Фурье

$$F(k, t) = \int_0^{\infty} \vartheta(x, t) e^{ikx} dx; \quad H(k, t) = \int_0^{\infty} \alpha(x, t) e^{ikx} dx, \quad (2.1)$$

где $\vartheta = T - T_0$; $\alpha = 1 - \beta$. Подстановка (2.1) в (1.1) и (1.2) дает

$$\frac{dF}{dt} + (\kappa k^2 + iku) F = (i\kappa k - u) \vartheta_s - \kappa \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_s + \frac{Q}{c\rho} \bar{W}, \quad (2.2)$$

$$\frac{dH}{dt} + ikuH = \bar{W} - u\alpha_s \quad (2.3)$$

с начальными условиями $F(k, 0)$ и $H(k, 0)$. Здесь \bar{W} — изображение по Фурье $W(\vartheta, \alpha)$, рассматриваемой как функция переменных x и t , индексом s обозначены зависящие от времени граничные значения функций при $x=0$.

Решения линейных уравнений (2.2) и (2.3) имеют вид

$$F = \int_0^t \left[\kappa i k \vartheta_s - u \vartheta_s - \kappa \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_s + \frac{Q}{c\rho} \bar{W} \right] \exp[-\kappa k^2(t-s) - ikI] ds + F(k, 0) \exp(-k^2 t - ikJ); \quad (2.4)$$

$$H = \int_0^t [\bar{W} - u\alpha_s] \exp(-ikI) ds + H(k, 0) \exp(-ikJ), \quad (2.5)$$

где

$$I = \int_0^t u ds; \quad J = \int_0^t u ds. \quad (2.6)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием

$$\vartheta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, t) e^{-ikx} dk; \quad \alpha(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(k, t) e^{-ikx} dk, \quad (2.7)$$

получаем

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = & \int_0^t \left[-u\vartheta_s - \kappa \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_s + \frac{I\vartheta_s}{2\kappa(t-s)} \right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-s)}} e^{-\frac{(I+x)^2}{4\kappa(t-s)}} ds + \\ & + \int_0^t ds \int_0^{\infty} \frac{Q}{c\rho} W(y, s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-s)}} e^{-\frac{(I+x-y)^2}{4\kappa(t-s)}} dy + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{\infty} \vartheta(y, 0) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{(J+x-y)^2}{4\kappa t}} dy; \quad (2.8)$$

$$\alpha(x, t) = - \int_0^t u\alpha_s \delta(x+I) ds + \int_0^t ds \int_0^{\infty} W(y, s) \delta(x+I-y) dy + \int_0^{\infty} \alpha(y, 0) \delta(y-x-J) dy. \quad (2.9)$$

С учетом основных свойств дельта-функции, $\delta(x-x')$ [4], (2.9) может быть преобразовано к виду

$$\alpha(x, t) = -\frac{\alpha_s}{2} + \int_0^t W(x+I, s) ds + \alpha(x+J, 0). \quad (2.10)$$

Уравнения (2.8) и (2.9) эквивалентны (1.1) и (1.2) с граничными и начальными условиями (1.3), (1.4) и определяют нестационарные поля температуры и концентрации в к-фазе.

При $x=0$ функции, стоящие в правых частях (2.8) и (2.10), терпят конечный разрыв непрерывности. Поэтому при вычислении граничных значений температуры ϑ_s и концентрации α_s левые части умножаются на 1/2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vartheta_s = & \int_0^t \left[-u\vartheta_s - \kappa \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_s + \frac{I\vartheta_s}{2\kappa(t-s)} \right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-s)}} e^{-\frac{I^2}{4\kappa(t-s)}} ds + \\ & + \int_0^t ds \int_0^{\infty} \frac{Q}{c\rho} W(y, s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-s)}} e^{-\frac{(I-y)^2}{4\kappa(t-s)}} dy + \\ & + \int_0^{\infty} \vartheta(y, 0) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{(J-y)^2}{4\kappa t}} dy; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\alpha_s = \int_0^t W(I, s) ds + \alpha(J, 0). \quad (2.12)$$

Соотношения (2.11) и (2.12) обладают незначительным преимуществом перед дифференциальными уравнениями (1.1) и (1.2) в задаче о нестационарной скорости горения, поскольку наличие в подынтегральных выражениях функции источника W все же требует определения поля концентрации и поля температуры, правда, в ограниченной части к-фазы (реакционной зоне).

Рассмотрим далее приближенное представление функции источника, включающее в себя параметры, определенные на границе к-фазы.

3. Приближенное решение

Как правило, функция $W(\vartheta, \alpha)$ имеет сильную зависимость от температуры, поэтому наибольший вклад в величину интегралов, содержащих эту функцию, оказывают наиболее нагретые слои к-фазы, прилежащие к поверхности горения. Следовательно, возможно приближенное перестроение функции $W(\vartheta, \alpha)$ в $W(x, t)$ с использованием первых

членов разложений температуры и концентрации в ряды Тейлора по координате

$$\vartheta \approx \vartheta_s + f_s x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right)_s x^2; \quad \alpha \approx \alpha_s + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_s x, \quad (3.1)$$

где индекс s относится к поверхности к-фазы ($x=0$).

Первая производная концентрации и вторая производная температуры могут быть найдены из уравнений (1.1) и (1.2), причем значения $\frac{\partial \vartheta_s}{\partial t}$ и $\frac{\partial \alpha_s}{\partial t}$ определяются дифференцированием (2.11) и (2.12) по времени и являются непрерывными функциями времени, если зависимость давления от времени — гладкая функция. Удобно использовать в (3.1) вместо $\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right)_s$ величину $2a$, эквивалентную первой в уравнении

$$2a = -\frac{Q}{\lambda} W(T, \beta) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t},$$

полученном из (1.1) пренебрежением члена, содержащего первую производную температуры по координате. Это аналогично методу Я. Б. Зельдовича — Д. А. Франк-Каменецкого [5] в стационарной теории и позволяет распространить единый способ аппроксимации на все положительные значения Q : $0 \leq Q \leq c_p(T_s - T_0)$.

Рассмотрим два простейших способа аппроксимации: метод эквивалентного градиента температуры, имеющей стационарный аналог [6], и метод квадратного трехчлена. В первом случае эквивалентный градиент температуры на границе к-фазы f_e определяем из соотношения

$$f_e = f_s + a/f_s,$$

и во внутреннем интеграле K уравнения (2.11) опустим член с y^2 в экспоненте. Тогда для идущих в к-фазе химических реакций, подчиняющихся закону Аррениуса, нулевого и первого порядка (n) имеем

$$W = z(1 - \alpha_s - gx)^n \exp \left[-\frac{E}{RT_s} \left(1 - f_e \frac{x}{T_s} \right) \right]; \quad g = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_s, \quad (3.2)$$

$$K = \frac{Q}{c_p} z \exp \left[-\frac{E}{RT_s} - \frac{I^2}{4\kappa(t-s)} \right] / h; \quad -h = \frac{E}{RT_s^2} f_e + \frac{2I}{4\kappa(t-s)}; \quad n = 0, \quad (3.3)$$

$$K = \frac{Q}{c_p} z \exp \left[-\frac{E}{RT_s} - \frac{I^2}{4\kappa(t-s)} \right] \cdot [(1 - \alpha_s)/h - g/n^2]; \quad n = 1. \quad (3.4)$$

Здесь z — предэкспонент, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная.

После подстановки (3.2) уравнение (2.12) примет вид

$$\alpha_s = \int_0^t z [1 - \alpha_s - gI]^n \exp \left[-\frac{E}{RT_s} (1 - f_e I/T_s) \right] ds + \alpha(J, 0). \quad (3.5)$$

Во втором случае аппроксимация температурной зависимости скорости химической реакции от температуры производится с помощью квадратного трехчлена:

$$W = z [1 - \alpha_s - gx]^n \exp \left[-\frac{E}{RT_s} (1 - f_s x/T_s - ax^2/T_s) \right], \quad (3.6)$$

$$K = \frac{Q}{c_p} z \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} e^{\Delta^2} \cdot \operatorname{erfc} \Delta \cdot e^{-E/RT_s}; \quad \sigma = -\frac{aE}{2RT_s^2}; \quad \Delta = -f_s/\sqrt{\sigma}; \quad n = 0, \quad (3.7)$$

$$K = \frac{Q\sqrt{\pi}(1-\alpha_s)}{2\sqrt{\sigma}\cdot c\rho} z e^{-E/RT_s} e^{\Delta^2} \operatorname{erfc} \Delta - \frac{Qz}{c\rho\sigma} e^{-E/RT_s} \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Delta \cdot e^{\Delta^2} \operatorname{erfc} \Delta \right]; \quad n=1, \quad (3.8)$$

$$\alpha_s = \int_0^t z(1-\alpha_s - gI)^n \exp\left[-\frac{E}{RT_s}(1-f_s/T_s - aI^2/T_s)\right] ds + \alpha(J, 0); \quad (3.9)$$

В результате таких преобразований интегральные уравнения приобретают более удобную для вычислений форму, которая не требует определения полей температуры и концентрации. Точность полученных уравнений зависит от частоты и амплитуды изменения давления (внешнего параметра). Ее оценку можно дать на основе аналитических соотношений линейного приближения задачи.

4. Линейное приближение

Для малых изменений давления (внешнего параметра) справедлива следующая постановка задачи (1.1) — (1.5) в линейном приближении [2]

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + \delta e^{-\theta} \beta^n \theta_1 - n \delta e^{-\theta} \beta^{n-1} \theta_1 + \nu \varphi, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi} + \gamma e^{-\theta} [\beta^n (v + \theta_1) - n \beta_1 \beta^{n-1}], \quad (4.2)$$

$$v[k-1-q(k+s+b)] = \frac{k}{\theta_0} \theta_{s1} + \frac{k}{\theta_0} \varphi_{s1} + \{q[k(\eta + \varepsilon) - v(s+b)] - v\} \pi_1, \quad (4.3)$$

$$\frac{\beta_{s1}}{1-\beta_{s0}} [k-1-q(k+s+b)] = -\frac{s}{\theta_0} \theta_{s1} - \frac{s}{\theta_0} \varphi_{s1} + [\eta + (1-q)(vs - \eta k) + q(\eta b - s\varepsilon)] \pi_1, \quad (4.4)$$

Здесь $\tau = \frac{u_0^2 t}{\kappa}$; $\xi = \frac{u_0 x}{\kappa}$; $\varphi = \frac{d\theta}{d\xi}$; $\theta_0 = \frac{E}{RT_{s0}^2} (T_{s0} - T_0)$; $\theta = \frac{E}{RT_{s0}^2} (T_{s0} - T)$;

$$\delta = \frac{\kappa Q z \cdot E}{u^2 c R T_{s0}^2} \exp\left(-\frac{E}{RT_{s0}}\right); \quad \gamma = (1-\beta_{s0}) \frac{\delta}{q\theta_0}; \quad v = \frac{u}{u_0} - 1; \quad \pi_1 = \frac{p}{p_0} - 1;$$

$$k = \left(\frac{\partial \ln u}{\partial T_0}\right)_p \cdot (T_{s0} - T_0); \quad s = -\left(\frac{\partial \beta_s}{\partial T_0}\right)_p \frac{T_{s0} - T_0}{1-\beta_{s0}}; \quad q = Q(1-\beta_{s0})/c \times$$

$$\times (T_{s0} - T_0); \quad b = \left(\frac{dQ}{dT_0}\right)_p (1-\beta_{s0})/cq; \quad \nu = \left(\frac{\partial \ln u}{\partial \ln p}\right)_{T_0}; \quad \eta = -\frac{1}{1-\beta_{s0}} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \beta_{s0}}{\partial \ln p}\right)_{T_0}; \quad \varepsilon = \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \ln p}\right)_{T_0};$$

0,1 — индексы начальных значений и малых отклонений от них соответственно.

Предполагаются заданными $\pi_1(\tau)$ и начальные профили температуры и концентрации в к-фазе. Произведем переход от (4.1) и (4.2) к интегральным соотношениям способом, изложенным выше, для определенности считая $n=1$ (вариант с $n=0$ получается тогда предельным переходом $\beta_{s0} \rightarrow 1$).

$$\frac{1}{2} \theta_{s1} = - \int_0^{\tau} \left(\frac{1}{2} \theta_{s1} + \varphi_{s1} \right) \frac{1}{2 \sqrt{\pi(\tau-s)}} e^{-\frac{\tau-s}{4}} ds + \int_0^{\tau} ds + \int_0^{\infty} [v\varphi(u) +$$

$$+ \delta e^{-\theta(u)} \beta(u) \theta_1(u, s) - \delta e^{-\theta(u)} \beta_1(u, s)] \frac{1}{2 \sqrt{\pi(\tau-s)}} e^{-\frac{(\tau-s-u)^2}{4(\tau-s)}} du, \quad (4.5)$$

$$\beta_{s1} = \int_0^{\tau} \gamma \beta(\tau-s) e^{-\theta(\tau-s)} [v(s) + \theta_1(\tau-s, s)] ds -$$

$$- \int_0^{\tau} \gamma e^{-\theta(\tau-s)} \beta_1(\tau-s, s) ds. \quad (4.6)$$

Применяя к (4.5) и (4.6) интегральное преобразование Лапласа

$$L[F(\tau)] \equiv \bar{F}(p) = \int_0^{\infty} F(\tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

получаем, согласно [8].

$$\left(\frac{1}{2} + z \right) \bar{\theta}_{s1} = - \bar{\varphi}_{s1} + \int_0^{\infty} [\bar{v}\varphi(u) + \delta e^{-\theta(u)} \beta(u) \bar{\theta}_1(u, p) -$$

$$- \delta e^{-\theta(u)} \bar{\beta}_1(u, p)] \exp \left[u \left(\frac{1}{2} - z \right) \right] du; \quad z = \sqrt{p + \frac{1}{4}}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\bar{\beta}_{s1}}{\gamma} = \bar{v} \cdot L[\beta(\tau) e^{-\theta(\tau)}] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \bar{\theta}_1^{(n)} \cdot L[\tau^n \beta(\tau) e^{-\theta(\tau)}] + \bar{\beta}_1^{(n)} \cdot L[\tau^n e^{-\theta(\tau)}] \}. \quad (4.8)$$

В результате использования метода эквивалентного градиента приходим к уравнениям

$$a_{j1} \bar{\theta}_{s1} + a_{j2} \bar{\varphi}_{s1} + a_{j3} \bar{\beta}_{s1} + a_{j4} \bar{v} = 0; \quad j=1; 2,$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} + z - \frac{\delta}{d} \left[\beta_{s0} - \left(\frac{\beta_{s0}}{2} - \frac{g}{d} \right) \frac{\delta - p}{\varphi_e d} \right] - \delta \gamma \beta_{s0} / (\varphi_e + d)^2,$$

$$a_{12} = 1 - (1 - 1/2\varphi_e) (\beta_{s0} - 2g/d),$$

$$a_{13} = \frac{\delta}{d} (1 + p/d) + \delta_j / (d + \varphi_e)^2,$$

$$a_{14} = \left(\varphi_s + \frac{\delta}{\varphi_e - 1} \right) / \left(\frac{1}{2} + z \right) + \frac{\delta}{d(\varphi_e - 1)} +$$

$$+ \frac{\varphi_s}{\varphi_e d} \left(\frac{\beta_{s0}}{2} - \frac{2g}{d} \right) - \frac{\delta \gamma \beta_{s0}}{(d + \varphi_e)^2}, \quad (4.9)$$

$$a_{21} = \frac{\beta_{s0}}{m} \left(1 - \frac{\delta - p}{2\varphi_e m} \right) - \frac{g}{m^2} \left(1 - \frac{\delta - p}{\varphi_e} \right) + \beta_{s0} \gamma / (\varphi_e + m)^2,$$

$$a_{22} = \frac{1}{m_2} (1 - 1/2\varphi_e) (\beta_{s0} - 2g/m),$$

$$a_{23} = -1/\gamma - \frac{1}{m} \left(1 + \frac{p}{m} \right) - \gamma / (\varphi_e + m)^2,$$

$$a_{24} = \frac{\beta_{s0}}{m} \left(1 - \frac{\varphi_s}{2\varphi_e m} \right) - \frac{g}{m_2} \left(1 - \frac{\varphi_s}{\varphi_e m} \right) + \beta_{s0} \gamma / (\varphi_e + m)^2,$$

$$d = \varphi_e - \frac{1}{2} + z; \quad m = \varphi_e + p.$$

Уравнения (4.9) совместно с (4.3) и (4.4), в которых неизвестные функции времени и функция $\pi_1(\tau)$ заменяются их изображениями по Лапласу, составляют систему линейных алгебраических уравнений, однозначно определяющих $\bar{\theta}_{s1}$, $\bar{\varphi}_{s1}$, $\bar{\beta}_{s1}$ и \bar{v} . В результате решения системы с помощью определителей каждая из этих функций $f_j (j=1 \div 4)$ может быть представлена в виде

$$\bar{f}_j = \bar{\pi}_1(z) \cdot F_j(z) / F(z), \quad (4.10)$$

где $F_j(z)$, $F(z)$ — полиномы от z , причем степень первого не больше степени второго, не превышающей восьмой.

Путем разложения \bar{f}_j в ряд Тейлора по p с удержанием двух первых членов определяем изображения искомых функций при медленных изменениях параметра π_1 . Оригинал содержит два слагаемых, зависящих от мгновенного значения параметра π_1 и его производной по времени

$$f_j = \left(\frac{\partial \ln f_j}{\partial \ln p} \right)_{T_0} \cdot \pi_1 + A_j \frac{d\pi_1}{d\tau}, \quad j = 1 \div 4, \quad (4.11)$$

где A_j — множитель в линейном относительно p члене разложения \bar{f}_j в ряд.

В соответствии с правилами нахождения оригиналов функций [7] получаем для переходного процесса горения

$$f_j = \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \pi_1(\tau - \eta) G(\eta) d\eta; \quad G(\eta) = \frac{e^{-\eta/4}}{\sqrt{\pi\eta}} \int_0^\infty e^{-u^2/4\eta} \Phi_j(u) du, \quad (4.12)$$

где $\Phi_j(u)$ — оригинал функции $Y_j(p) = F_j(p) / F(p)$ (форма записи здесь означает, что в полиномах произведена формальная замена z на p).

В свою очередь

$$\Phi_j(\tau) = \sum_{i=1}^m i \frac{p_i F_j(p_i)}{(p_i - 1/2) F'(p_i)} \cdot e^{p_i \tau} + \frac{F_j\left(\frac{1}{2}\right)}{2F\left(\frac{1}{2}\right)} e^{\tau/2}. \quad (4.13)$$

Здесь p_i — корни полинома $F(p)$, имеющие $\text{Re } p_i \geq 0$, $F'(p)$ — производная F по p . Сравнение значений корней функции $F(p)$ с результатами расчета, проведенными в [2], показывает, что только пара комплексно сопряженных корней реальна, остальные — паразитные.

В первом приближении реальные значения корней можно определить, находя корни квадратного трехчлена, полученного из $F(p)$, отбрасыванием членов со старшими степенями p . В последующих приближениях необходимо учитывать все члены. Интересно отметить, что при $q=s=b=0$ полученный трехчлен идентичен с таковым в расчете переходного процесса в модели нестационарного горения, не учитывающей инерционности процессов, протекающих в реакционной зоне к-фазы [1]. Поэтому второй из них можно рассматривать как первое приближение при этих значениях параметров.

Подстановка (4.13) в (4.12) дает соотношение для вычисления $G(\eta)$, имеющее формальное сходство со своим аналогом в [1]

$$G(\eta) = \frac{1}{2} \frac{F_j\left(\frac{1}{2}\right)}{F\left(\frac{1}{2}\right)} \text{erfc}\left(-\frac{\sqrt{\eta}}{2}\right) + \frac{(DF - CM)}{B(E^2 + M^2)} 2e^{-\lambda\eta} \cos \omega\eta - \\ - e^{-\eta/4} U(B\sqrt{\eta}, A\sqrt{\eta}) - \frac{CE + DK}{B(E^2 + M^2)} [2e^{-\lambda\eta} \sin \omega\eta + \\ + e^{-\eta/4} V(B\sqrt{\eta}, A\sqrt{\eta})], \quad (4.14)$$

где при значениях корней полинома $F(p)$ $p_{1,2} = A \pm Bi$;

$$C \pm Di = (A \pm Bi) \cdot F_j(A \pm Bi); \quad E + Mi = \frac{F(A + Bi)}{(p_1 - A \mp Bi)(p_2 - A \mp Bi)};$$

$\lambda = -\operatorname{Re}(p_{1,2}^2 - 1/4)$ — декремент затухания; $\omega = |\operatorname{Im}(p_{1,2}^2 - 1/4)|$ — частота колебаний, функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ определяют составляющие интеграла вероятности от комплексного аргумента

$$U(x, y) + iV(x, y) = W(w); \quad w = x + iy;$$

$$W(w) = e^{-w^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-t^2} dt \right).$$

Как показывают расчеты, декремент затухания λ и частота ω , вычисленные по значениям корней $p_{1,2}$ полинома $F(p)$ с точностью порядка $1/\theta_0$, соответствуют значениям λ и ω , полученным методом, предусматривающим определение полей концентрации и температуры в k -фазе [2].

При гармонических колебаниях давления (внешнего параметра) по закону $\pi_1 = v \exp i\chi\tau$ со временем устанавливаются гармонические колебания скорости горения и связанных с нею параметров на границе k -фазы, изображения которых, согласно (4.10), определяются равенствами

$$\bar{f}_j = \frac{v}{z^2 - i\chi - 1/4} F_j(z)/F(z),$$

что при $\tau \rightarrow \infty$ (установившийся режим) приводит к соотношениям

$$f_j = v F_j(z_1) e^{i\chi\tau} / F(z_1); \quad z_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + i\chi}; \quad \operatorname{Re} z_1 > 0. \quad (4.15)$$

В выражениях (4.15) амплитуды колебаний нестационарных параметров, имеющие резонансную зависимость от частоты, максимальны при $\chi = \omega$.

Аналогично решается задача и при использовании для аппроксимации зависимости скорости химической реакции от концентрации и температуры квадратного трехчлена в подэкспоненциальном выражении. В этом случае осуществляется подстановка в (4.5) и (4.6) приближенного соотношения

$$\beta(\xi) e^{-\theta(\xi)} = (\beta_{s0} - g\xi) \exp(-\varphi_{s0}\xi - a\xi^2),$$

в интегралах удерживаются два члена в разложении $\beta_1(\xi)$ и три — в $\theta_1(\xi)$. Тогда коэффициенты в (4.9) приобретают следующие значения

$$a_{11} = \left(\frac{1}{2} + z \right) \delta - \beta_{s0} H_{11} + (g - \gamma\beta_{s0}) H_{21} - \beta_{s0} (p - \delta\beta_{s0}) H_{31}/2 + g(p - \delta\beta_{s0}) H_{41}/2,$$

$$a_{12} = 1/\delta - \beta_{s0} H_{21} + (\beta_{s0}/2 + g) H_{31} + g H_{41}/2,$$

$$a_{13} = H_{11} + (p + \gamma) H_{21} - \delta\beta_{s0} H_{31} + \delta g H_{41}/2,$$

$$a_{14} = -(\varphi_5 + \delta H_{11})/\delta \left(\frac{1}{2} + z \right) + \beta_{s0} \varphi_{s0} H_{31}/2 - g \varphi_{s0} H_{41}/2 - \gamma \beta_{s0} H_{21},$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \beta_{s0} H_{12} + (\gamma \beta_{s0} - g) H_{22} + \beta_{s0} (p - \delta \beta_{s0}) H_{32} / 2 - g (p - \delta \beta_{s0}) H_{42} / 2, \\
a_{22} &= \beta_{s0} H_{22} - \beta_{s0} H_{32} / 2 + g H_{42} / 2, \\
a_{23} &= -1/\gamma - H_{12} - (p + \gamma) H_{22} + \delta \beta_{s0} H_{32} / 2 - \delta g H_{42} / 2, \\
a_{24} &= \beta_{s0} H_{12} + (\gamma \beta_{s0} - g) H_{22} - \beta_{s0} \varphi_{s0} H_{32} + g \varphi_{s0} H_{42} / 2, \\
H_{1l} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{x^2/4a} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a}}; \quad H_{2l} = (1 - xH_{1l})/2a, \\
H_{3l} &= \left(1 + \frac{x^2}{2a}\right) H_{1l} / 2a - x/4a^2; \quad H_{4l} = (1 + x^2/4a)/2a^2 + xH_{1l}(3 - x^3/2a)/4\sqrt{a}.
\end{aligned}$$

При $l=1$ $x = \varphi_{s0} - 1/2 + z$, при $l=2$ $x = \varphi_{s0} + p$.
В остальном порядок вычислений сохраняется, поскольку F_j и F , как нетрудно в этом убедиться, — целые функции комплексного аргумента.

5. Оценка точности. Ступенчатое изменение давления

В связи с тем, что рассмотренные приближенные методы расчета нестационарной скорости горения предусматривают использование первых членов разложений в ряды Тейлора концентрации и температуры в k -фазе для вычисления скорости химической реакции, их применение возможно, если зависимость давления (внешнего параметра) от времени — непрерывная функция, или вне начального отрезка времени, сравнимого с временем релаксации процессов в реакционной зоне k -фазы при включении внешнего воздействия с конечным разрывом непрерывности.

Как следует из структуры интегралов, входящих в уравнения (2.11) и (2.12), отброшенные члены более высокого порядка могли бы оказать максимальный эффект при малых значениях комплекса $(t-s)$ в первом уравнении и при больших значениях времени во втором. Поэтому для оценки погрешности сверху достаточно сравнить значения

$$\int_0^\infty W(y, t) dy \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t W(I, s) ds$$

при точном и приближенном задании функции $W(x, t)$.

Помимо естественного пути нахождения точных значений этих интегралов, требующего численного определения полей концентрации и температуры в реакционной зоне k -фазы, возможно их определение с малой погрешностью при использовании достаточно большого числа членов разложения в окрестности точки $x=0$. Старшие члены рядов получаются с помощью последовательного дифференцирования (1.1) и (1.2) по x в точке $x=0$. При этом мгновенные значения концентрации, температуры и ее градиента на границе, а также скорости горения можно рассматривать как суммы стационарных величин и переменных во времени, вычисленных с помощью линейных соотношений (4.15). Следовательно, множители при соответствующих степенях x оказываются зависящими от частоты и амплитуды колебаний внешнего параметра.

Важно ограничиться порядковыми номерами членов разложения, обеспечивающими ограниченное изменение концентрации с увеличением x и сходимость интегралов. В области реальных значений основных параметров ($\theta_0 > 2$, $\beta_{s0} > 0,2$) достаточно взять члены с производной температуры по координате пятой степени и производной концентрации третьей степени. В результате оцененная таким путем погрешность за-

висит от частоты и амплитуды колебаний внешнего параметра. Как показывают расчеты, погрешность вычисления скорости горения — менее $1/2\theta_0$ при условии, что $\chi A \leq \theta_0$, где A — амплитуда колебаний скорости горения, χ — частота. Данная оценка пригодна и для произвольного изменения внешнего параметра во времени при условии, что установлены амплитуды колебаний частот, входящих в разложение Фурье зависимости внешнего параметра от времени.

При ступенчатом единичном изменении внешнего параметра $\pi_1(\tau) = 1(\tau)$ (разрывное включение) поведение скорости горения, а также θ_{s1} , φ_{s1} и β_{s1} в начале переходного процесса (малые τ) могут быть установлены из записанной системы уравнений, включающей в себя (4.3), (4.4) и два соотношения, которые получаются из (4.7) и (4.8) при условии $\rho \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho} \bar{\theta}_{s1} &= -\bar{\varphi}_{s1} + (\bar{v}\bar{\varphi}_{s0} + \delta\beta_{s0}\bar{\theta}_{s1} - \delta\bar{\beta}_{s1})/\sqrt{\rho}, \\ \bar{\beta}_{s1} &= \gamma[\beta_{s0}(\bar{v} + \bar{\theta}_{s1}) + \bar{\beta}_{s1}]/\rho.\end{aligned}$$

Если концентрация вещества на поверхности к-фазы постоянна ($\beta_{s1} = s = \eta = 0$),

$$v = -\theta_{s1} = -\frac{2E_1}{C_1} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}; \quad \varphi_{s1} = -\frac{E_1}{C_1} \left[1 + 2 \left(1 + \frac{1}{C_1} \right) \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right],$$

где $E_1 = \frac{q[k(\eta + \varepsilon) - v(s + b)] - \gamma}{k - 1 - q(k + s + b)}$; $C_1 = \frac{k/\theta_0(1 - \beta_{s0})}{k - 1 - q(k + s + b)}$, разрыв непрерывности претерпевает лишь градиент температуры на поверхности к-фазы. В случае переменной концентрации вещества на поверхности к-фазы, для малых τ

$$v = (E_2 C_1 - E_1 C_2) [1 - \tau(\delta\beta_{s0} + \gamma + C_1 \gamma / C_2)] / C_2;$$

$$\theta_{s1} = -\frac{2E_1}{C_2} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}; \quad \beta_{s1} = \frac{\gamma\beta_{s0}}{C_2} (E_2 C_1 - E_1 C_2) \tau;$$

$$\varphi_{s1} = \frac{E_2}{C_2} \left[1 - \left(\frac{C_1 \gamma \beta_{s0}}{C_2} + \delta\beta_{s0} + \gamma \right) \tau \right] - [\varphi_{s0} (E_2 C_1 - E_1 C_2) + E_1 \gamma \beta_{s0}] \frac{\tau}{C_2},$$

где

$$E_2 = \frac{\eta + (1 - q)(vs - \eta k) + q(\eta b - \varepsilon \varepsilon)}{k - 1 - q(k + s + b)}; \quad C_2 = \frac{-s/\theta_0(1 - \beta_{s0})}{k - 1 - q(k + s + b)}.$$

Скачком изменяется не только градиент температуры, но, при условии $(E_2 C_1 - E_1 C_2) \neq 0$, и скорость горения пороха. Поскольку $E_2 C_1 - E_1 C_2 = \frac{(vs - \eta k)/\theta_0(1 - \beta_{s0})}{k - 1 - q(k + s + b)}$ — величина, на которую мгновенно изменяется скорость горения, определяется сочетанием параметров, определяющих кинетические, теплофизические и реологические свойства поверхностных слоев к-фазы горящего пороха.

Подведем краткие итоги проведенной работы.

1. Получены интегральные соотношения для модели инерционной конденсированной фазы в феноменологической теории нестационарного горения пороха.

2. Построены приближенные методы решения и предложен способ определения погрешности при их использовании. На их основе по-

лучены приближенные аналитические соотношения, с помощью которых можно установить зависимость основных параметров горящего пороха в функции времени в нестационарном режиме.

Поступила в редакцию
19/VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Новожилов. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М., «Наука», 1973.
2. О. Я. Романов. ФГВ, 1975, 11, 2.
3. Ю. А. Гостинцев, А. А. Суханов, П. Ф. Похил. ПМТФ, 1971, 5.
4. Д. Иваненко, А. Соколов. Классическая теория поля. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
5. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
6. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1964, 6.
7. В. А. Диткин, А. П. Прудников. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

УДК 662.221.1

О ВЛИЯНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ГРУПП В МОЛЕКУЛЕ ИНГИБИТОРА НА ГОРЕНИЕ ГЕКСОГЕНА

*А. П. Глазкова, Э. Г. Розанцев, О. К. Андреев,
В. К. Боболев*

(Москва)

Проведенные ранее исследования позволили установить наиболее мощные ингибиторы горения гексогена [1—3], к числу которых относятся соединения ароматического ряда. В настоящей работе приведены результаты дальнейших исследований по выяснению влияния химической природы ингибитора на его эффективность при горении гексогена. Из соединений ароматического ряда в качестве ингибиторов были выбраны карбоновые кислоты с различным содержанием карбо- и оксигрупп, полициклические соединения и некоторые красители. Эффективность действия добавок оценивалась, как и ранее [1], коэффициентом ингибирования. Опыты проводились в бомбе постоянного давления в атмосфере азота, в интервале давлений от 1 до 100 ат по фотографической методике [4], добавки вводились в количестве 10% по весу.

В табл. 1 приведены результаты опытов по влиянию карбоновых кислот на горение гексогена. Как было установлено в работе [2], при добавлении к гексогену бензойной кислоты скорость его горения уменьшалась при 12 ат в 2,86 раза. Введение в молекулу кислоты оксигруппы, как это видно из табл. 1, уменьшило ингибирующее действие добавки до 2,3, а введение двух и более карбоксильных групп привело к уменьшению эффекта ингибирования до 2,0. Интересно отметить, что введение в молекулу кислоты трех оксигрупп (галловая кислота) не повлияло на ингибирующий эффект добавки. Наименьшую эффективность дает карбоновая кислота жирного ряда — шавелевая (дигидрат).

С ростом давления эффективность ингибирующего действия падала. В табл. 2 приведены результаты опытов по влиянию некоторых ароматических соединений на скорость горения гексогена. Как было