

**О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПРИТОКЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНАМ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

*В. А. Максимов (Москва)*

Предполагается, что горизонтальный нефтеносный пласт разделен в плане прямолинейной проницаемой границей на два полубесконечных пласта с различными проводимостями  $\epsilon_1 = k_1 h_1$  и  $\epsilon_2 = k_2 h_2$  ( $k_j$  и  $h_j$  — проницаемости и мощности) и пьезо-проводностями  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Кровля и подошва пласта непроницаемы. Поле давления в пласте  $p_0(x, y)$  в начальный момент  $t = 0$  установившееся. На расстоянии  $\xi$  от границы раздела в полупласте с параметрами  $\epsilon_1, \kappa_1$  находится скважина типа точечного источника, которая начинает действовать с момента  $t = 0$  с постоянным дебитом  $Q$  ( $Q > 0$  при откачке жидкости из пласта и  $Q < 0$  при нагнетании). Требуется найти поле давления  $p(x, y, t)$  при  $t > 0$ .

Введем прямоугольные координаты (фиг. 1) так, чтобы ось  $y$  совпала с границей раздела пластов, а скважина находилась на оси  $x$  в полуплоскости  $x > 0$ .

Функция изменения давления

$$p_1(x, y, t) = p(x, y, t) - p_0(x, y) \tag{1}$$

должна удовлетворять уравнениям упругого режима фильтрации

$$\Delta p_1(x, y, t) = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\kappa_j} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \begin{cases} j = 1 & (x > 0) \\ j = 2 & (x < 0) \end{cases} \tag{2}$$

и очевидным условиям

$$p_1(x, y, 0) = 0, \quad p_1(x, y, t) |_{x=-0} = p_1(x, y, t) |_{x=+0} \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_1(x, y, t)}{\partial x} |_{x=-0} = \nu \frac{\partial p_1(x, y, t)}{\partial x} |_{x=+0} \quad \left( \nu = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \tag{4}$$

$$p_1(x, y, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial p_1(x, y, t)}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{при } (x, y) \rightarrow \infty \tag{5}$$

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_1}{\mu} \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial p_1}{\partial r} \quad (r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}) \tag{6}$$

Здесь  $\mu$  — вязкость жидкости,  $r$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до скважины.

Перейдем от функции  $p_1(x, y, t)$  к ее интегральному преобразованию Лапласа

$$F(x, y, \sigma) = \int_0^\infty p_1(x, y, t) e^{-\sigma t} dt \tag{7}$$

Применяя это преобразование к уравнениям (2) и учитывая условие (3) и то, что  $\text{Re } \sigma > 0$ , найдем, что функция  $F(x, y, \sigma)$  должна удовлетворять уравнениям

$$\Delta F(x, y, \sigma) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{\kappa_j} F(x, y, \sigma) \quad \begin{cases} j = 1 & (x > 0) \\ j = 2 & (x < 0) \end{cases} \tag{8}$$

После преобразования Лапласа условие (6) будет иметь следующий вид:

$$\frac{Q}{\sigma} = \frac{2\pi\epsilon_1}{\mu} \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial F}{\partial r} \tag{9}$$

а вид условий (4), (5) после преобразования не изменится. Из условия (9) вытекает, что функция  $F(x, y, \sigma)$  должна иметь логарифмическую особенность на скважине. Решением уравнения (8), имеющим такую особенность, является функция Бесселя мнимого аргумента и нулевого порядка

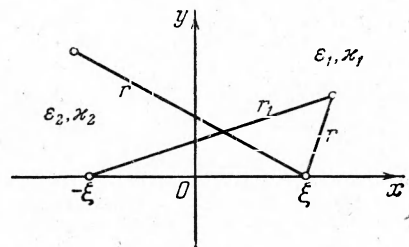
$$F_0(x, y, \sigma) = K_0(r \sqrt{\sigma / \kappa_1}) \tag{10}$$

Искомое решение уравнений (8) представим в виде

$$\begin{aligned} F(x, y, \sigma) &= A_0(\sigma) [F_0(x, y, \sigma) + F_1(x, y, \sigma)] & (x > 0) \\ F(x, y, \sigma) &= A_0(\sigma) F_2(x, y, \sigma) & (x < 0) \end{aligned} \tag{11}$$

Функции  $F_1$  и  $F_2$  должны удовлетворять соответствующим уравнениям (8) и не иметь особенностей в своих полуплоскостях. Величина  $A_0(\sigma)$  найдется из условия (9)

$$-\frac{\mu Q}{2\pi\epsilon_1 \sigma} = -\lim_{r \rightarrow 0} A_0(\sigma) r \frac{\partial F_0}{\partial r} = A_0(\sigma) \lim_{r \rightarrow 0} r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \left( r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \right) = A_0(\sigma) \tag{12}$$



Фиг. 1

Здесь  $K_1$  — функция Бесселя первого порядка [1]

$$K_1(z) = -dK_0(z)/dz = 1/z + O(z \ln z) \quad (z \ll 1)$$

Воспользуемся преобразованием Фурье

$$\Phi_j(x, \eta, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_j(x, y, \sigma) e^{-i\eta y} dy \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (13)$$

Применяя это преобразование к уравнениям (8) и учитывая, что условия (5) сохраняются и для функций  $F_j(x, y, \sigma)$ , найдем, что функции  $\Phi_j(x, \eta, \sigma)$  должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 \Phi_j(x, \eta, \sigma)}{dx^2} = g_j^2 \Phi_j(x, \eta, \sigma), \quad g_j = \sqrt{\eta^2 + \frac{\sigma}{\kappa_j}} \quad \left( \begin{array}{l} j = 0, 1 \text{ при } x > 0 \\ j = 2 \text{ при } x < 0 \end{array} \right) \quad (14)$$

Учитывая, что из первого условия (5) вытекает  $\Phi_j(x, \eta, \sigma) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и считая  $\operatorname{Re} g_j > 0$ , решение этих уравнений возьмем в виде

$$\Phi_1(x, \eta, \sigma) = A(\eta, \sigma) e^{-xg_1}, \quad \Phi_2(x, \eta, \sigma) = B(\eta, \sigma) e^{xg_2} \quad (15)$$

Преобразованием Фурье функции  $F_0(x, y, \sigma)$  (см. [2], формула (5.122)), будет:

$$\Phi_0(x, \eta, \sigma) = \frac{e^{(x-\xi)g_1}}{2g_1} \quad (16)$$

Подставляя это выражение в преобразованные условия (4)

$$A - B = -\Phi_0(0, \eta, \sigma), \quad Avg_1 + Bg_2 = v \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (17)$$

найдем величину  $A(\eta, \sigma)$ , а затем функцию

$$\Phi_1(x, \eta, \sigma) = \frac{v-1}{v+1} \Phi_1^{(1)}(x_1, \eta, \sigma) + \frac{v}{v+1} \Phi_1^{(2)}(x, \eta, \sigma) \quad (18)$$

где

$$\Phi_1^{(1)}(x, \eta, \sigma) = \frac{e^{-(x+\xi)g_1}}{2g_1}, \quad \Phi_1^{(2)}(x, \eta, \sigma) = \frac{(g_2 - g_1) e^{-(x+\xi)g_1}}{(vg_1 + g_2)g_1} \quad (19)$$

Обращением для преобразования Фурье  $\Phi_1^{(1)}(x, \eta, \sigma)$  согласно формуле, примененной для получения (16), будет функция

$$K_0(r_1 \sqrt{\sigma/\kappa_1}) \quad (r_1 = \sqrt{(x+\xi)^2 + y^2}) \quad (20)$$

Здесь  $r_1$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до скважины-изображения, расположенной в точке  $(-\xi, 0)$  симметрично данной скважине (фиг. 1). Учитывая, кроме того, формулу обращения для преобразования Фурье (13)

$$F_j(x, y, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(x, \eta, \sigma) e^{i\eta y} d\eta \quad (21)$$

получим для  $F_1(x, y, \sigma)$  выражение

$$F_1(x, y, \sigma) = \frac{v-1}{v+1} K_0\left(r_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}}\right) + J(x, y, \sigma) \quad (22)$$

где  $J(x, y, \sigma)$  — обращение для функции  $v(v+1)^{-1} \Phi_1^{(2)}(x, \eta, \sigma)$ , равное

$$J(x, y, \sigma) = \frac{2v}{v+1} \int_0^{\eta=\infty} \frac{(g_1' - g_2') \exp[-\sqrt{\sigma}(x+\xi)g_1'] \cos \sqrt{\sigma} \xi y}{(vg_1' + g_2')g_1'} d\xi \quad (23)$$

$$g_j' = \sqrt{\xi^2 + \kappa_j \sigma} \quad (24)$$

(в интеграле сделана замена  $\eta = \xi \sqrt{\sigma}$ ).

Подставляя выражения (22), (10) и (12) для  $F_1(x, y, \sigma)$ ,  $F_0(x, y, \sigma)$  и  $A_0(\sigma)$  в формулу (11) и учитывая, что обращением для изображений Лапласа вида  $\sigma^{-1} K_0(r \sqrt{\sigma/\kappa_1})$  будет [3] функция  $-1/2 \operatorname{Ei}(-r^2/4\kappa_1 t)$  (интегральная показательная функция), получим

$$p_1(x, y, t) = \frac{Q\mu}{4\pi e_1} \left[ \operatorname{Ei}\left(\frac{-r^2}{4\kappa_1 t}\right) + \frac{v-1}{v+1} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r_1^2}{4\kappa_1 t}\right) + \delta_1(x, y, t) \right] \quad (x > 0) \quad (25)$$

Здесь  $\delta_1(x, y, t) = -F^{-1}[2\sigma^{-1} J(x, y, \sigma)]$  — обратное преобразование Лапласа функции  $2\sigma^{-1} J(x, y, \sigma)$ .

Величина  $\delta_1(x, y, t)$  для данной точки пласта с течением времени стремится к постоянному значению, которое проще всего определить, исходя из известной теоремы (см., например, [4]) о том, что если  $F(\sigma)$  — преобразование Лапласа функции  $f(t)$  и существует предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то он равен  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma F(\sigma)$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Применяя указанную теорему к функции  $2J(x, y, \sigma)$  и делая в получающемся интеграле замену

$$u = \sqrt{\theta g_1' - g_2'} / \sqrt{\theta g_1' + g_2'} \quad (\theta = \kappa_1 / \kappa_2)$$

приводящую к интегрированию рациональной дроби, получим предельное значение последнего слагаемого в (25) (26)

$$\delta_{1\infty} = \frac{2\nu}{\nu^2 - 1} \left( 4\nu \sqrt{\frac{\theta - 1}{\nu^2 - \theta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\sqrt{\theta - 1} \nu - \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta + 1} \nu + \sqrt{\theta}}} - \ln \theta \right) \left( \nu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \theta = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)$$

Величина  $\delta_1(x, y, t)$  равна нулю в трех случаях: пласт полностью однородный ( $\theta = 1, \nu = 1$ ), граница раздела является сбросом ( $\varepsilon_2 = 0, \nu = \infty$ ) и граница раздела является контуром питания ( $\varepsilon_2 = \infty, \nu = 0$ ).

В этих случаях формула (25) соответствует хорошо известным решениям [5]. Для точек полупласта с параметрами  $\varepsilon_2, \kappa_2$  (фиг. 1) вычисления дают

$$p_1(x, y, t) = \frac{Q\mu}{4\pi\varepsilon_2} \left[ \frac{2}{1 + \nu} \operatorname{Ei} \left( -\frac{r^2}{4\kappa_2 t} \right) + \delta_2(x, y, t) \right] \quad (27)$$

Здесь  $\delta_2(x, y, t)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к значению

$$\delta_{2\infty} = \frac{1}{\nu} \delta_{1\infty} - \frac{2}{1 + \nu} \ln \theta \quad (28)$$

Исследуем полученные выражения (25), (27). Слагаемые в формуле (25) определяют три рода возмущений поля давления: первое, создаваемое прямой волной, идущей от скважины; второе, создаваемое отраженной от неоднородности (границы раздела) волной, и  $\delta_1(x, y, t)$  — некоторое добавочное отраженное возмущение. Скорость распространения возмущений в каждом полупласте определяется величинами  $\kappa_j$ . Эта скорость определяет, например, порядок времени, когда для данной точки пласта величины  $\delta_j(x, y, t)$  становятся близки предельным значениям. Амплитуда отраженного возмущения зависит от параметров обоих полупластов.

Обратить оба примененных преобразования для получения явного вида  $\delta_j(x, y, t)$  в общем случае не удастся. Однако в некоторых частных случаях, применяя формулу (3.123) справочника [4], это можно сделать.

Учитывая вид получающегося обращения, можно рекомендовать следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} \delta_1^*(x, y, t) &= \delta_{1\infty} \exp \left[ \left( -\frac{r_1^2}{4\kappa_1 t} \right) - \frac{\sqrt{\pi}(x + \xi)}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \exp \left( -\frac{y^2}{4\kappa_1 t} \right) \operatorname{erfc} \frac{x + \xi}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right] \\ \delta_2^*(x, y, t) &= \delta_{2\infty} \left[ \exp \left( -\frac{r^2}{4\kappa_2 t} \right) + \frac{\sqrt{\pi}(x - \xi)}{2\sqrt{\kappa_2 t}} \exp \left( -\frac{y^2}{4\kappa_2 t} \right) \operatorname{erfc} \left( -\frac{x - \xi}{2\sqrt{\kappa_2 t}} \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Эти формулы будут точными решениями уравнений пьезопроводности (2), но при подстановке их в (25), (27) граничные условия (4) удовлетворяются приближенно. Разлагая (25), (27) и (29) на границе раздела в ряды по  $t \gg 1$ , можно получить, что относительное отклонение в условиях (4) будет того же порядка, что и степень точности в разложениях [2]

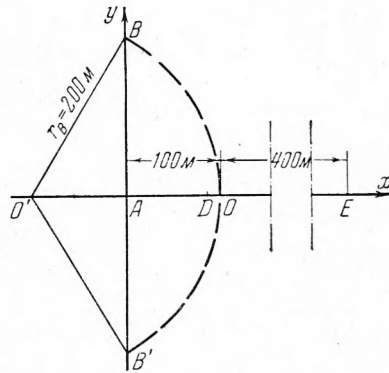
$$\operatorname{Ei} \left( -\frac{r^2}{4\kappa_j t} \right) \approx \ln \frac{r^2}{4\kappa_j t} + 0.5772 - \frac{r^2}{4\kappa_j t} \quad (30)$$

Если желаемая степень точности достигается на границе при значениях  $r_j < R_0$ , с такой же точностью формула (29) применима, например, для вычисления  $\delta_1(x, y, t)$  в сегменте круга  $r_1 < R_0$  полуплоскости  $x > 0$ . Однако область применимости (25), (27) значительно расширяется за счет той части пласта, где порядок  $\delta_{j\infty}$  меньше остальных членов в этих формулах.

Поясним сказанное на примере. Пусть скважина радиуса  $r_c = 10$  см расположена на расстоянии  $\xi = 100$  м от границы раздела (фиг. 2) и действует с дебитом  $Q = 3.6$  м<sup>3</sup>/час в течение  $10^6$  сек  $\approx 11.5$  сут. Параметры пластов возьмем такие

$$k_1 = 0.2 \text{ дарси}, \quad h_1 = 10 \text{ м}, \quad \kappa_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}, \quad \theta = \nu = 4, \quad \mu = 2 \text{ слз}$$

За выбранное время действия скважины величины  $r_B^2/4\kappa_1 t$  в точках  $B, B'$  границы (фиг. 2), для которых  $r_B = 200$  м, становятся меньше 0.01 и формулы (30) применимы на отрезке  $BB'$  границы с точностью более 0.25%.



Фиг. 2

Вычисления дают значения  $\delta_{1\infty} = 0.63$ ,  $\delta_{2\infty} = -0.398$ . В точках  $B$ ,  $B'$  значение  $\delta_{1B}^*$  отличается от  $\delta_{1\infty}$  на 2%, а  $\delta_{2B}^*$  от  $\delta_{2\infty}$  на 9%. Значения же понижений давления  $p_1^+$  и  $p_1^-$  с обеих сторон границы, вычисленные для этих точек по формулам (25), (27) с учетом (29), отличаются, естественно, значительно меньше (всего на 0.3%) и равны  $-p_{1B} = 6.3$  атм.

С точностью 0.3% формулы (25), (29) применимы при вычислении  $p_1(x, y, t)$  в точках правого полупласта, где  $r_1 < r_B = 200$  м. Например, вычисленные по этим формулам понижения давления  $p_{1A}^+$  и  $p_{1A}^-$  в точке  $A$  границы (фиг. 2) практически не отличаются и равны  $-p_{1A} = 8.15$  атм. Вычисленные по формулам (25), (29) понижения давления  $p_{1D}$  в точке  $D$  призабойной зоны на расстоянии  $r_D = 10$  м и на скважине  $O$  равны:  $-p_{1D} = 13$  атм,  $-p_{10} = 18.5$  атм.

Следует отметить, что если при расчете в рассмотренной области не учитывать  $\delta_1(x, y, t)$ , то ошибки будут незначительные (для точки  $A$  — 5.8%, для точки  $D$  — 3.7%, для точки  $O$  — 2.6%).

Рассмотрим еще понижение давления в удаленных точках пласта, где формула (29) может дать лишь возможный порядок величины  $\delta_1(x, y, t)$ . В точке  $E$  на расстоянии 400 м от скважины в сторону от границы раздела ( $r_{1E} = 600$  м) вычисления дают:  $\delta_{1E}^* = 0.485$ ,  $p_{1E} = 4.4$  атм, а если не учитывать  $\delta_{1E}$  или взять эту величину равной  $\delta_{1\infty}$ , ошибка при вычислении  $p_{1E}$  не превосходит 10%. Наконец, в точке  $F$  на расстоянии 2 км от скважины в сторону от границы раздела понижение давления с учетом  $\delta_{1F}^*$  равно  $p_{1F} = 1.05$  атм без учета  $p_{1F} = 1.26$  атм; вычисленное в предположении  $\delta_{1F}^* = \delta_{1\infty}$ , давление  $p_{1F} = 0.76$  атм. Как видно, расхождения в этой точке достигают 40%, правда изменение давления  $p_{1F}$  незначительно.

Суммируя вышесказанное, заключаем, что формулы (25) — (29) дают достаточную точность, там где  $\delta_j^*$  мало отличаются от предельных значений  $\delta_{j\infty}$ . В удаленных частях пласта, где  $\delta_j^*$  сильно отличаются от  $\delta_{j\infty}$ , если, кроме того, эти величины порядка остальных слагаемых в (25), (27), формулы (29) неприменимы для вычисления изменения давления, но дают возможность оценить порядок расстояний  $r_j$ , когда изменением давления можно пренебречь.

Там, где  $\delta_j^* \approx \delta_{j\infty}$ , формулы (25), (27) принимают, учитывая (30), вид

$$p_1(x, y, t) = \frac{Q\mu}{2\pi\varepsilon_2(1+\nu)} \left[ 2 \ln r - \ln t - \ln \kappa_2 - 0.809 + \frac{(1+\nu)}{2} \delta_{2\infty} \right] \quad (x < 0) \quad (31)$$

$$p_1(x, y, t) = \frac{Q\mu}{2\pi\varepsilon_1} \left[ \ln r + \frac{\nu-1}{\nu+1} \ln r_1 - \frac{\nu}{\nu+1} (\ln t + \ln \kappa_1 + 0.809) + \frac{\delta_{1\infty}}{2} \right] \quad (x > 0)$$

Нетрудно видеть, что изменение давления, задаваемое этими формулами, тождественно удовлетворяет условиям (4) на границе раздела  $r = r_1$ . Из формул (31) следует, что в той части пласта, где они применимы, поле давления для каждого момента времени  $t$  представляется гармоническими функциями. Продолжая функции (31) для некоторого момента  $t$  на всю плоскость и полагая при этом давление в некоторой точке с радиусами  $r = R$ ,  $r_1 = R_1$ , равным  $p_k$ , получим поле давления от точечного источника при установившейся фильтрации

$$p(x, y) = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi\varepsilon_1} \left( \ln \frac{r}{R} + \frac{\nu-1}{\nu+1} \ln \frac{r_1}{R_1} \right) \quad (x > 0) \quad (32)$$

$$p(x, y) = p_k + \frac{Q\mu}{\pi\varepsilon_2} \frac{1}{1+\nu} \ln \frac{r}{R} \quad (x < 0)$$

что соответствует формулам, полученным в работе [6].

Автор признателен Г. И. Баренблатту за проявленное внимание к работе.

Поступила 30 XI 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. И. Теория бесселевых функций. Ч. I. М., ИИЛ, 1960.
2. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
4. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
5. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. О притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде. ДАН СССР, 1942, т. 34, № 2.