

УДК 517.958+532.529.5

## ХАРАКТЕРИСТИКИ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И СИММЕТРИИ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Для кинетической модели движения пузырьков в жидкости найдены обобщенные характеристики и инварианты Римана, сохраняющиеся вдоль характеристик. Получены условия, обеспечивающие гиперболичность системы уравнений пузырькового течения. Показано, что система уравнений движения имеет бесконечное число законов сохранения. Построена бесконечная серия обобщенных симметрий, допускаемых уравнениями. Найдены инвариантные относительно обобщенных симметрий решения, описывающие распространение бегущих и простых волн в жидкости с пузырьками.

При моделировании движения жидкости с пузырьками газа важно учитывать эффекты коллективного взаимодействия пузырьков, так как в определенных режимах течения они могут определять устойчивость или неустойчивость волновых процессов. В ряде работ [1–4] предложен кинетический подход к изучению распространения волн концентрации в пузырьковых жидкостях, основанный на статистическом описании взаимодействия большого числа пузырьков. Кинетические уравнения широко применяются при описании движения и взаимодействия заряженных частиц в физике плазмы, статистическом описании течений жидкости и газа. В отличие от движения заряженных частиц, где основные действующие силы взаимодействия связаны с электрическими и магнитными полями, создаваемыми коллективом частиц, взаимодействие пузырьков связано с гидродинамическими эффектами изменения полей давления и вектора скорости жидкости в окрестности данного пузырька, вызываемого движением остальных пузырьков. В работе Д. Руссо и П. Смереки [1] дан вывод кинетических уравнений для разреженного пузырькового течения, аналогичных уравнениям Власова, используемым в физике плазмы. При выводе модели предполагается, что пузырьки являются жесткими шарами одинакового радиуса, не имеющими массы. Жидкость, в которой движутся пузырьки, считается идеальной и несжимаемой, течение ее в области между пузырьками потенциальное. Кроме того, не учитывается действие массовых сил на жидкость, которая считается покоящейся на бесконечности. В этих условиях движение пузырьков определяется только эффектами их коллективного взаимодействия и начальными условиями. Предположение о «жесткости» пузырьков приближенно выполняется в реальных случаях, когда пузырьки имеют достаточно малый радиус и силы поверхностного натяжения, сохраняющие форму пузырька, существенно превышают вариации гидродинамического давления, влияющие на изменения его формы.

Известно, что кинетическая энергия жидкости, занимающей пространство между движущимися пузырьками, может быть представлена в виде квадратичной формы от скоростей пузырьков [5]. Коэффициенты указанной квадратичной формы вычисляются через специальные потенциалы, описывающие течения, возникающие при движении одного из

---

Работа выполнена при финансовой поддержке программ «Университеты России» (проект 1787) и «Ведущие научные школы» (код проекта 96-15-96283).

пузырьков с единичной скоростью при покоящихся остальных пузырьках. Данные потенциалы приближенно вычислены в работе [1] для разреженной пузырьковой среды асимптотическим разложением решения уравнения Лапласа в ряд по малому параметру — отношению радиуса пузырьков к среднему расстоянию между ними. Это позволило получить систему гамильтоновых обыкновенных уравнений для координат и импульсов пузырьков (импульс пузырька определяется как частная производная от кинетической энергии жидкости по соответствующей скорости). Используя указанные уравнения и метод вывода уравнений Власова, разработанный в теории бесстолкновительных течений плазмы, Д. Руссо и П. Смерека получили следующую систему интегродифференциальных уравнений пузырькового течения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \mathbf{u} = \frac{2}{\tau \rho_l} \mathbf{p} - \frac{3(3\nabla\Phi - \mathbf{j})}{\rho_l},$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}), \quad \Delta\Phi = \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \int \mathbf{p} f d\mathbf{p}.$$

Здесь  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  — одночастичная функция распределения пузырьков по координатам и импульсам;  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\tau$  — импульс, скорость и объем пузырька;  $\rho_l$  — плотность жидкости;  $\Phi(t, \mathbf{x})$  — функция, определяющая самосогласованное поле; операторы  $\nabla$  и  $\Delta$  вычисляются по  $\mathbf{x}$ .

В данной работе рассматривается модель, описывающая одномерные течения. При ее изучении применяется новый теоретический подход, основанный на обобщении теории характеристик и понятия гиперболичности системы уравнений, развитый для некоторого класса интегродифференциальных уравнений [6, 7]. Обнаружен непрерывный спектр характеристических скоростей системы уравнений пузырькового течения и вычислены инварианты Римана, сохраняющиеся вдоль характеристик. Сформулированы условия, обеспечивающие гиперболичность системы уравнений, необходимые для устойчивости течения. В явном виде проинтегрированы уравнения, задающие классы частных решений — бегущие и простые волны.

**1. Гиперболичность уравнений движения пузырьков в жидкости.** В одномерном случае уравнения движения пузырьков имеют вид

$$f_t + u f_x - p u_x f_p = 0, \quad j = \int p f dp, \quad u = \frac{2p}{\tau \rho_l} - \frac{6j}{\rho_l}. \quad (1.1)$$

Функция распределения  $f(t, x, p)$  в дальнейшем считается либо быстроубывающей на бесконечности, либо финитной ( $f = 0$  при  $|p| > B$ ,  $B > 0$ ) по переменной  $p$ . Интеграл по переменной  $p$  вычисляется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  (здесь и далее пределы интегрирования в формулах, содержащих такие интегралы, опущены).

Введем безразмерные переменные  $x'$ ,  $t'$ ,  $p'$ ,  $f'$  соотношениями

$$x = Lx', \quad t = (L/U)t', \quad p = \frac{\tau \rho_l U}{2} p', \quad f = \frac{2}{3\tau^2 \rho_l U} f'$$

( $L$  пропорциональна среднему расстоянию между пузырьками,  $U$  — характерная скорость). В безразмерных переменных уравнения имеют вид

$$f_t + (p - j)f_x + p j_x f_p = 0, \quad j = \int p f dp \quad (1.2)$$

(в обозначениях новых переменных штрихи не принимаются во внимание). Введем лагранжеву переменную  $\lambda$ , сохраняющуюся вдоль интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x'(t) = p - j, \quad p'(t) = p j_x. \quad (1.3)$$

Координатные поверхности  $\lambda(t, x, p)$  строятся следующим образом. В момент  $t = 0$  произвольно выбирается семейство кривых  $\lambda(x, p) = \text{const}$ ,  $\lambda_p \neq 0$ . Затем на поверхности, образованной интегральными кривыми системы (1.3), проходящими через начальную кривую  $\lambda(x, p) = \text{const}$ , полагаем  $\lambda(t, x, p) = \text{const}$ . В переменных  $t, x, \lambda$  из уравнений (1.2) получается система

$$pt + (p - j)p_x - pj_x = 0, \quad ft + (p - j)f_x = 0, \quad j = \int f p p_\lambda d\lambda. \quad (1.4)$$

Если система (1.4) решена и функции  $f(t, x, \lambda)$ ,  $p(t, x, \lambda)$  известны, то из соотношения  $p = p(t, x, \lambda)$  определяется  $\lambda = \lambda(t, x, p)$ . Подстановка этой зависимости в  $f$  дает решение уравнений (1.2)  $f(t, x, p)$ . Уравнения (1.4) можно представить в общей форме

$$U_t + AU_x = 0, \quad U = U(t, x, \lambda), \quad (1.5)$$

где  $A$  — нелокальный оператор по переменной  $\lambda$ :

$$A = \begin{pmatrix} (p - j) + p \int f_\lambda p \dots d\lambda, & -p \int p_\lambda p \dots d\lambda \\ 0, & (p - j) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $T = p \int f_\lambda p \dots d\lambda$  — интегральный оператор, действующий на произвольную функцию  $\varphi$  по правилу  $T(\varphi) = p \int f_\lambda p \varphi d\lambda$ . В [6, 7] понятия характеристик и гиперболичности обобщены на системы с операторными коэффициентами. Пусть  $B$  — банахово пространство вектор-функций, зависящих от переменной  $\lambda$ ;  $U(t, x, \cdot)$ ,  $U_t(t, x, \cdot)$ ,  $U_x(t, x, \cdot) \in B$ ;  $A$  — линейный оператор;  $A : B \rightarrow B$ . В общем случае предполагается, что  $A$  зависит от  $U$  (как операторнозначная функция на  $B$ ),  $x, t, \lambda$ . Согласно [6, 7], для того чтобы найти характеристики системы (1.5), нужно решить задачу на собственные значения

$$(F^\alpha, A\varphi) = k^\alpha(F, \varphi), \quad k^\alpha = k^\alpha(x, t) \quad (1.6)$$

для искомого вектор-функционала  $F^\alpha \in B'$  и собственного значения  $k^\alpha$  ( $\varphi \in B$  — пробная функция,  $(F, \varphi)$  — значение функционала  $F$  на  $\varphi$ ). Характеристика  $x = x(t)$  семейства с номером  $\alpha$  задается решением дифференциального уравнения  $x'(t) = k^\alpha(x, t)$ . Равенство

$$(F^\alpha, U_t + k^\alpha U_x) = 0 \quad (1.7)$$

называется соотношением на характеристике [6, 7]. Система (1.6) называется гиперболической, если все собственные значения  $k^\alpha$  действительны и соотношения на характеристиках (1.7) эквивалентны (1.5). Данные определения обобщают соответствующие аналоги обычной теории гиперболических систем уравнений, относящейся к случаю, когда  $A$  — оператор в конечномерном пространстве. Основное отличие бесконечномерного случая от конечномерного связано с появлением непрерывных спектров характеристических скоростей. Если характеристические скорости ограничены по модулю, то система (1.5) обладает свойством конечности скорости распространения возмущений по направлению оси  $x$ .

Для системы (1.4) задача на собственные значения (1.6) ( $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)^T$ ,  $F = (F_1, F_2)$ ) дает два уравнения для функционалов  $F_1, F_2$ :

$$\begin{aligned} (F_1, (p - j - k)\varphi^1) + \int p f_\lambda \varphi^1 d\lambda(F_1, p) &= 0, \\ (F_2, (p - j - k)\varphi^2) - \int p p_\lambda \varphi^2 d\lambda(F_1, p) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

(использована независимость произвольных функций  $\varphi^1, \varphi^2$ ), которые позволяют найти указанные функционалы:

$$(F_1, \varphi) = - \int \frac{p f_\lambda \varphi d\lambda}{p - k - j}, \quad (F_2, \varphi) = \int \frac{p p_\lambda \varphi d\lambda}{p - k - j},$$

соответствующие дискретным собственным значениям  $k \notin \bar{M}$ ,  $M = \{p - j, p \in \text{supp } f\}$  — корням характеристического уравнения

$$\chi(k + j) = (1 - n) + (k + j)^2 \int \frac{fp\lambda d\lambda}{(p - k - j)^2} = 0. \quad (1.9)$$

Принимая во внимание неравенство  $0 < n < 1$  (для рассматриваемой модели условие разреженности течения означает, что величина  $n$  мала), можно заключить, что уравнение (1.9) не имеет действительных корней, принадлежащих дополнению к множеству  $\bar{M}$  на действительной оси. Для гиперболичности системы (1.4) необходимо, чтобы уравнение (1.9) не имело комплексных корней.

Для того чтобы сформулировать явные условия, гарантирующие отсутствие комплексных корней, рассмотрим аналитические в верхней и нижней полуплоскостях функции  $\chi^\pm(z)$  комплексного аргумента  $z$  и применим принцип аргумента. Если

$$\Delta \arg \chi^+(p) = 0, \quad (1.10)$$

то (1.9) не имеет комплексных корней с  $\text{Im } k > 0$  [8]. Здесь  $\chi^+(p)$  — предельное значение на действительной оси функции  $\chi^+(z)$  из верхней полуплоскости,  $\Delta \arg$  — приращение аргумента комплексной функции на оси  $p \in (-\infty, \infty)$ . Если  $\text{supp } f$  ограничен, то аналогично получаем условие

$$\Delta \arg (\chi^+(p)/\chi^-(p)) = 0 \quad (1.11)$$

( $\chi^-(p)$  — предельное значение из нижней полуплоскости,  $\Delta \arg$  — приращение аргумента на носителе функции  $f$ ). Если условие (1.10) (или (1.11)) не выполнено, то задача Коши для уравнений (1.1) некорректна. Для уравнений, линеаризованных на решении, не зависящем от  $x, t$ , это показано в [1].

Решениями задачи (1.8) являются непрерывное семейство собственных значений  $k^\lambda = p(t, x, \lambda) - j(t, x)$ ,  $\lambda \in R$  и соответствующие  $k^\lambda$  собственные вектор-функционалы  $F^{1\lambda}, F^{2\lambda}$ :  $F^{1\lambda} = (0, \delta(\nu - \lambda))$ ,  $F^{2\lambda} = (F_1^\lambda, F_2^\lambda)$ . Здесь  $F_i^\lambda$  действуют на произвольную гладкую функцию  $\varphi$  по правилу

$$(F_1^\lambda, \varphi) = (n - 1)(\delta(\nu - \lambda), \varphi(\nu)) + p \int \frac{p' f'_\nu (\varphi' - \varphi) d\nu}{p' - p}, \quad (F_2^\lambda, \varphi) = - \int \frac{F_1^\lambda F_2^\lambda \varphi' d\nu}{p' - p},$$

а  $\delta(\nu - \lambda)$  — дельта-функция Дирака. Действуя этими функционалами на систему (1.4), получаем характеристическую форму уравнений

$$f_t + (p - j)f_x = 0, \quad R_t + (p - j)R_x = 0. \quad (1.12)$$

Здесь  $f(t, x, \lambda)$  и

$$R(t, x, \lambda) = \frac{n - 1}{p} + \int \frac{f' p'_\nu d\nu}{p' - p} \quad (1.13)$$

римановы инварианты, сохраняющиеся вдоль характеристик, отвечающих непрерывному характеристическому спектру  $x = x^\lambda(t)$ ,  $(x^\lambda)'(t) = p(t, x, \lambda) - j(t, x)$ ,  $\lambda = \text{const}$ . В (1.13) интеграл вычисляется в смысле главного значения,  $p = p(t, x, \lambda)$ ,  $p' = p(t, x, \nu)$ ,  $f' = f(t, x, \nu)$ ,  $p'_\nu = p_\nu(t, x, \nu)$ . Покажем, что условия (1.10) (или (1.11)) и неравенство  $\chi^\pm(p) \neq 0$  обеспечивают гиперболичность уравнений (1.4). Здесь  $\chi^\pm(p)$  — предельные значения характеристической функции на действительной оси:

$$\chi^\pm(p) = 1 - n + p^2 \int \frac{f'_p d p'}{p' - p} \pm \pi i p^2 f_p. \quad (1.14)$$

Пусть  $\text{supp } f = (-\infty, \infty)$ . Установим свойство полноты семейства функционалов  $F^{1\lambda}$ ,  $F^{2\lambda}$ . Для этого докажем, что если  $(F^{1\lambda}, \varphi) = 0$ ,  $(F^{2\lambda}, \varphi) = 0$  и функция  $\varphi$  удовлетворяет условию Гельдера по независимой переменной, то  $\varphi = 0$ . Из второго соотношения следует равенство  $\varphi^2 = 0$ , с учетом которого первое соотношение можно записать в виде

$$(n-1)\varphi^1 + p \int \frac{p' f_{p'} ((\varphi^1)' - \varphi^1)}{p' - p} dp' = 0.$$

Переходя к переменной интегрирования  $p'$ , получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\left( n-1 - p \int \frac{p' f_{p'} dp'}{p' - p} \right) \varphi^1 + p \int \frac{p' f_{p'} (\varphi^1)'}{p' - p} dp' = 0. \quad (1.15)$$

Сведем данное уравнение к задаче Римана теории аналитических функций [9]. Для этого введем функции  $\Psi^+(z)$ ,  $\Psi^-(z)$ , аналитические в верхней ( $\text{Im } z > 0$ ) и нижней полуплоскости ( $\text{Im } z < 0$ ) соответственно:

$$\begin{aligned} \Psi^+(z) &= \Psi(z), \quad \text{Im } z > 0, \\ \Psi^-(z) &= \Psi(z), \quad \text{Im } z < 0, \end{aligned} \quad \Psi(z) = p \int \frac{p' f_{p'} (\varphi^1)'}{p' - z} dp'.$$

Предельные значения функций  $\Psi^+(z)$ ,  $\Psi^-(z)$  на действительной оси вычисляются по формулам Сохоцкого — Племеля:

$$\Psi^\pm(z) = \pm \pi i p^2 f_p \varphi^1 + p \int \frac{p' f_{p'} (\varphi^1)'}{p' - p} dp'. \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.15) с учетом равенств (1.14), (1.16) получаем следствие

$$\Psi^+ = \frac{\chi^+}{\chi^-} \Psi^-, \quad p \in (-\infty, \infty). \quad (1.17)$$

Возникает задача Римана теории аналитических функций комплексной переменной: требуется определить функции  $\Psi^+(z)$ ,  $\Psi^-(z)$ , аналитические в верхней и нижней комплексных полуплоскостях соответственно, удовлетворяющие условию сопряжения (1.17) на действительной оси и обращающиеся в нуль при  $|z| \rightarrow \infty$ . Функции  $\chi^+(z)$ ,  $\chi^-(z)$  стремятся к постоянной при  $|z| \rightarrow \infty$ , не имеют нулей в верхней и нижней полуплоскости согласно условию (1.10), поэтому данная пара функций задает каноническое решение задачи Римана [9]. Из (1.17) получим задачу о скачке

$$\left( \frac{\Psi}{\chi} \right)^+ = \left( \frac{\Psi}{\chi} \right)^-, \quad p \in (-\infty, \infty)$$

для аналитических функций  $(\Psi/\chi)^+(z)$ ,  $(\Psi/\chi)^-(z)$ , имеющую единственное решение в классе функций, исчезающих на бесконечности [8], поэтому  $\Psi^\pm(z) = 0$ . Из равенств (1.15), (1.16) следует, что  $\text{Re } \chi^+(p) \varphi^1(p) = 0$ ,  $\text{Im } \chi^+(p) \varphi^1(p) = 0$ . Так как  $\chi^\pm(p) \neq 0$  на действительной оси, то необходимо  $\varphi^1 = 0$ . Тем самым установлена полнота системы собственных функционалов и гиперболичность системы уравнений (1.4) при выполнении условий (1.10) и неравенства  $\chi^\pm(p) \neq 0$ .

**2. Законы сохранения и симметрии.** Система (1.2) допускает бесконечное число законов сохранения с плотностями, зависящими полиномиальным образом от моментов функции распределения. Для того чтобы доказать это утверждение, рассмотрим функцию

$$r = \frac{n-1}{\mu} + \int \frac{f' dp'}{p' - \mu}. \quad (2.1)$$

Предположим, что  $f \equiv 0$  при  $|p| > A > 0$  и  $\mu$  — функция, зависящая от  $x, t$  и принимающая достаточно большие значения ( $|\mu| > A$ ) в своей области определения. Из (1.2) получаем следствие

$$r_t + (\mu - j)r_x = \left( \frac{1-n}{\mu^2} + \int \frac{f dp}{(p-\mu)^2} \right) \left( \mu_t + \left( \frac{\mu^2}{2} - \mu j \right)_x \right). \quad (2.2)$$

Пусть в (2.1)  $r$  — постоянная величина,  $r = \xi^{-1}$ ,  $|\xi| > A$ . Тогда (2.1) определяет  $\mu$  как функцию переменных  $t, x, \xi$ :

$$\mu = -\xi + a_1(t, x) + a_2(t, x)\xi^{-1} + a_3(t, x)\xi^{-2} + \dots$$

Согласно (2.2)  $\mu(t, x, \xi)$  является плотностью закона сохранения

$$\mu_t + \left( \frac{\mu^2}{2} - \mu j \right)_x = 0.$$

Раскладывая  $\mu + \xi$  в ряд по степеням  $\xi^{-1}$ , получаем бесконечную серию законов сохранения, для которой коэффициенты ряда являются плотностями законов сохранения. Первые три коэффициента имеют вид  $a_1 = j = A_1$ ,  $a_2 = A_2 - A_1^2$ ,  $a_3 = A_3 - 3A_2A_1 + 2A_1^3$  ( $A_i = \int p^i f dp$ ).

Дифференцируя (2.1), последовательно определяем следующие коэффициенты, зависящие от высших моментов. При доказательстве существования бесконечной серии законов сохранения у системы (1.2) использовалась ограниченность носителя функции  $f$ . Однако, если аппроксимировать произвольную быстроубывающую на бесконечности функцию распределения последовательностью функций с ограниченными носителями, то, осуществляя предельный переход в каждом дивергентном уравнении, получим бесконечную серию законов сохранения для произвольной  $f$ .

Отметим, что система уравнений (1.4) приводится к гамильтоновой форме

$$p_t + \left( \frac{\delta h}{\delta H(\lambda)} \right)_x = 0, \quad H_t + \left( \frac{\delta h}{\delta p(\lambda)} \right)_x = 0, \quad (2.3)$$

если ввести новую искомую функцию  $H(t, x, \lambda) = f(t, x, \lambda)p_\lambda(t, x, \lambda)$  и гамильтониан с плотностью

$$h = \frac{1}{2} \left( \int H p^2 d\lambda - j^2 \right). \quad (2.4)$$

Вариационные производные  $\delta h / \delta H(\lambda)$  и  $\delta h / \delta p(\lambda)$  плотности гамильтониана (2.4) вычисляются в виде

$$\frac{\delta h}{\delta H(\lambda)} = \frac{1}{2} p^2 - pj, \quad \frac{\delta h}{\delta p(\lambda)} = H(p - j).$$

Из существования гамильтониана и бесконечной серии законов сохранения следует, что система (2.3) допускает бесконечное число обобщенных симметрий (однопараметрических групп Ли — Беклунда) [9–11] первого порядка. Если  $a_i$  — плотность закона сохранения, то уравнения

$$p_\tau = \left( \frac{\delta a_i}{\delta H(\lambda)} \right)_x, \quad H_\tau = \left( \frac{\delta a_i}{\delta p(\lambda)} \right)_x \quad (2.5)$$

определяют симметрию для (2.3). Это означает, в частности, что однопараметрическое семейство решений задачи Коши для системы уравнений (2.5)  $p(\tau, t, x, \lambda)$ ,  $H(\tau, t, x, \lambda)$  ( $t$  — параметр), удовлетворяющее начальным условиям  $p(0, t, x, \lambda) = p(t, x, \lambda)$ ,  $H(0, t, x, \lambda) = H(t, x, \lambda)$ , одновременно является однопараметрическим семейством решений системы

уравнений (2.3) ( $\tau$  — параметр), если начальные функции  $p(t, x, \lambda)$ ,  $H(t, x, \lambda)$  удовлетворяли (2.3).

Из (2.5), в частности, получаем уравнения, задающие симметрию, соответствующую плотности  $a_3$  закона сохранения:

$$p_\tau = (p^3 - 3p^2j - 3pA_2 + 6pj^2)_x, \quad H_\tau = (H(3p^2 - 6pj - 3A_2 + 6j^2))_x \quad \left( A_i = \int p^i H d\lambda \right). \quad (2.6)$$

Легко видеть, что система уравнений (1.2) допускает также точечные преобразования переноса по  $t$  и  $x$ :  $t \rightarrow t + a$ ,  $x \rightarrow x + b$  и двухпараметрическое растяжение переменных  $x$ ,  $t$ ,  $p$  и  $f$ :  $t \rightarrow at$ ,  $x \rightarrow bx$ ,  $p \rightarrow ba^{-1}p$ ,  $f \rightarrow ab^{-1}f$ . Уравнения (1.2) инвариантны относительно преобразования Галилея (переход в движущуюся с постоянной скоростью систему координат). Данное обстоятельство объясняется тем, что в основе вывода системы уравнений лежит предположение о равенстве нулю скорости жидкости на бесконечности, что является причиной инвариантности уравнений движения относительно преобразования Галилея.

**3. Бегущие волны.** Решение вида  $f = f(\zeta, p)$ ,  $\zeta = x - Dt$  описывает бегущую волну, распространяющуюся с постоянной скоростью  $D$ . Уравнение бегущих волн

$$(p - j - D)f_\zeta + pj_\zeta f_p = 0 \quad (3.1)$$

удобно преобразовать, взяв в качестве независимой переменной  $j$  (при этом предполагается, что  $j_\zeta \neq 0$ ):

$$(p - j - D)f_j + pf_p = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) интегрируется:

$$f = \Phi(\eta), \quad 2\eta = p^2 - 2(j + D)p. \quad (3.3)$$

Найденное решение принимает постоянные значения на характеристиках  $\eta = \text{const}$  (картина характеристик уравнения (3.2) в плоскости  $p, j$  показана на рис. 1). Рассмотрим задачу Коши

$$f(\zeta_0, p) = f_0(p), \quad j_0 = \int pf_0 dp. \quad (3.4)$$

Условие (3.4) обеспечивает непрерывное примыкание бегущей волны к известному стационарному фону ( $f_0(p)$  — заданная функция распределения), по которому распространяется волна. Обратившись к рис. 1, заключаем, что если  $j_0 + D > 0$ , то решение задачи Коши определяется при  $j \geq j_0$  только в областях  $\Omega_1, \Omega_2$  (дополнение к области  $\Omega_3$  в полуплоскости  $j \geq j_0$ ; кривая  $DAE$ , заданная уравнением  $\eta = 2^{-1}(j_0 + D)^2$ , является границей  $\Omega_3$ ). В области  $\Omega_3$  решение нужно находить, используя дополнительные уравнения. В случае, когда  $j_0 + D > 0$ , задача Коши (3.4) некорректна в направлении убывания переменной  $j$  ( $j \leq j_0$ ). Действительно, каждая характеристика  $\eta = \eta_1 < 0$  пересекает начальную прямую  $j = j_0$  в двух точках  $B$  и  $C$ , тогда начальная функция  $f_0(p)$  не может быть произвольной, она должна принимать одинаковые значения в этих точках. Аналогично при  $j_0 + D < 0$  можно решать задачу Коши (3.4) только в направлении убывания  $j$  ( $j \leq j_0$ ).

Используя (3.3), при  $\zeta = \zeta_0$  определим  $\Phi(\eta)$  для  $p \leq j_0 + D$  и  $p \geq j_0 + D$  (соответствующие функции обозначаются  $\Phi^-$  и  $\Phi^+$ ):

$$\Phi^+(\eta) = f_0(j_0 + D + \sqrt{2\eta + (j_0 + D)^2}), \quad \Phi^-(\eta) = f_0(j_0 + D - \sqrt{2\eta + (j_0 + D)^2}). \quad (3.5)$$

Согласно (3.3) в областях  $\Omega_1, \Omega_2$  бегущая волна определена соотношениями

$$f = \Phi^+(2^{-1}p^2 - (j + D)p), \quad p \geq j + D + \sqrt{(j + D)^2 - (j_0 + D)^2}, \quad (3.6)$$

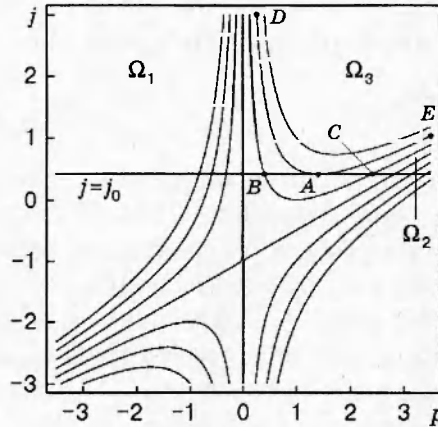


Рис. 1

$$f = \Phi^-(2^{-1}p^2 - (j + D)p), \quad p \leq j + D - \sqrt{(j + D)^2 - (j_0 + D)^2}.$$

Для того чтобы найти функцию распределения в области  $\Omega_3$ , преобразуем равенство

$$j = \int p f dp \tag{3.7}$$

в интегральное уравнение для неизвестной функции  $\Phi(\eta)$ ,  $\eta \in (-(j_1 + D)^2/2, -(j_0 + D)^2/2)$ . Здесь предполагается, что  $j_0 \leq j \leq j_1$  в области  $\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_1$ , занятой бегущей волной. После введения в (3.7) переменной интегрирования  $\eta$  вместо  $p$  получаем интегральное уравнение Абеля

$$\int_s^{s_0} \frac{\Phi(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - s}} = F(s), \tag{3.8}$$

$$F(s) = (2\sqrt{-s})^{-1} \left[ \sqrt{-2s} - D - \int_{s_0}^{\infty} (\Phi^+(\eta) - \Phi^-(\eta)) d\eta - 2\sqrt{-s} \int_{s_0}^{\infty} \frac{(\Phi^+(\eta) + \Phi^-(\eta)) d\eta}{\sqrt{\eta - s}} \right],$$

где  $s = -2^{-1}(j + D)^2$ ,  $s_0 = -2^{-1}(j_0 + D)^2$ . Решение уравнения Абеля имеет вид

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{F(s_0)}{\sqrt{s_0 - \eta}} - \int_{\eta}^{s_0} \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s - \eta}} \right]. \tag{3.9}$$

Заметим, что второе соотношение (3.4) эквивалентно  $F'(s_0) = 0$ , тогда первое слагаемое в формуле (3.9) равно нулю. Формулами (3.8), (3.9) функция распределения задана в области  $\Omega_3$ , где  $-\sqrt{(j + D)^2 - (j_0 + D)^2} \leq p - j - D \leq \sqrt{(j + D)^2 - (j_0 + D)^2}$ . Найденный класс решений зависит от произвольной функции  $j(\zeta)$ . Бегущая волна, распространяющаяся со скоростью  $D < -j_0$ , может быть построена аналогично.

Интегрируя (3.2) по переменной  $p$ , получаем

$$1 - n = (j + D)n_j. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что плотность пузырьков  $n$  растет с ростом  $|j|$  для двух типов бегущих волн. Построенное решение типа бегущей волны описывает проникновение порции пузырьков в невозмущенную область. Для того чтобы показать это, проанализируем картину траекторий.



Траектории пузырьков в системе координат, движущейся вместе с волной, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\zeta}{dt} = p - j - D, \quad \frac{dp}{dt} = j\zeta p.$$

Легко видеть, что  $\eta = \text{const}$  является интегралом системы. Это позволяет пользоваться рис. 1 при анализе картины движения. В областях  $\Omega_1, \Omega_2$  величина  $p - j - D$  в нуль не обращается, и траектории пересекают область бегущей волны в противоположных направлениях ( $p - j - D$  имеет разные знаки в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ). Для частиц с отрицательным параметром  $\eta < s_0$  (область  $\Omega_3$ )  $p - j - D$  изменяет знак при движении частицы вдоль траектории. Эти пузырьки попадают в область бегущей волны через фронт  $\zeta = \zeta_1$ , их относительная скорость меняет знак в некоторой точке траектории (при этом координата  $\zeta$  достигает экстремального для данной траектории значения), а затем пузырек возвращается на фронт  $\zeta = \zeta_1$  и покидает зону бегущей волны. Появление этих пузырьков в области бегущей волны увеличивает плотность  $n$ . На рис. 2 показаны траектории пузырьков в области определения бегущей волны в пространстве  $t, \zeta, p$ .

За счет выбора произвольной функции  $j(\zeta)$  можно построить периодические бегущие волны, солитоны и т. д. Достаточно выбрать  $j$  периодической функцией  $\zeta$  в первом случае либо функцией, удовлетворяющей соотношению  $j(\zeta_0) = j(\zeta_1)$ , во втором. Солитонное решение описывает движение пузырьков, захваченных бегущей волной. В этом случае траектории пузырьков, соответствующие отрицательному параметру  $\eta < s_0$ , остаются в области бегущей волны  $\zeta_0 \leq x - Dt \leq \zeta_1$  для всех значений  $t$ .

Ниже приводятся явные формулы для бегущей волны, распространяющейся по стационарному фону, заданному максвелловским распределением:

$$f_0(p) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-(2T)^{-1}(p - a)^2).$$

Здесь  $n_0, T, a$  — заданные постоянные. Легко проверить, что для данного стационарного распределения  $n = n_0, j = an_0$ . Рассмотрим бегущую волну, распространяющуюся со скоростью  $D = a - j_0$ . Согласно (3.3), (3.5) при  $\zeta = \zeta_0$

$$2\eta = p^2 - 2ap = (p - a)^2 - a^2,$$

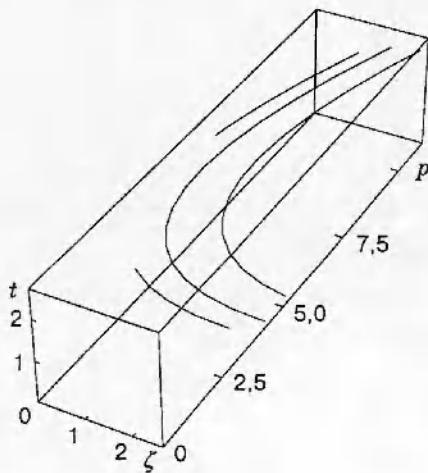


Рис. 2

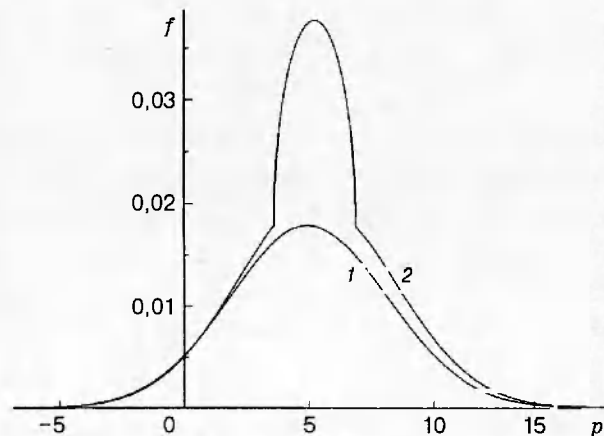


Рис. 3

$$\Phi^+(\eta) = \Phi^-(\eta) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-(2T)^{-1}(2\eta + a^2)), \quad \eta \geq -\frac{a^2}{2}.$$

В областях  $p \geq j + D + \sqrt{(j + D)^2 - a^2}$ ,  $p \leq j + D - \sqrt{(j + D)^2 - a^2}$  функция распределения в соответствии с (3.6) имеет вид

$$f = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T}} \exp(-(2T)^{-1}(p^2 - 2(j + D)p + a^2)). \quad (3.11)$$

Используя формулы (3.5)–(3.9), находим функцию распределения в области  $j + D - \sqrt{(j + D)^2 - a^2} \leq p \leq j + D + \sqrt{(j + D)^2 - a^2}$ :

$$f = \Phi(p^2/2 - (j + D)p), \quad (3.12)$$

$$\Phi(\eta) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T}} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \left( -\frac{a^2 + 2\eta}{2T} \right)^{1/2} \right) \right) \exp \left( -\frac{a^2 + 2\eta}{2T} \right) - (2\eta)^{-1} (1 - n_0) \sqrt{-(a^2 + 2\eta)},$$

$$\eta \leq -a^2/2.$$

Равенствами (3.11), (3.12) бегущая волна определена полностью. При этом  $j = j(\zeta)$  остается произвольной функцией, принимающей значения на полуоси  $(an_0, \infty)$  (случай  $j \geq j_0$ ). На рис. 3 представлены графики функции распределения на переднем фронте (линия 1) и сечении  $\zeta = \text{const}$ ,  $\zeta \in (\zeta_0, \zeta_1)$  (линия 2) в области определения бегущей волны. Видно, что проникновение новой порции пузырьков в невозмущенную область влечет за собой существенное возрастание функции распределения на интервале, соответствующем области  $\Omega_3$ .

**4. Решения, инвариантные относительно обобщенных симметрий.** Как показано в п. 2, система уравнений пузырькового течения допускает обобщенные симметрии, определяемые интегродифференциальными уравнениями. Обобщая методы, развитые в классическом групповом анализе дифференциальных уравнений [9], можно проводить построение решений, инвариантных относительно интегродифференциальных симметрий. В данном пункте будет построено решение, инвариантное относительно симметрии (2.6).

Предварительно выпишем определяющие уравнения для симметрий уравнения (1.2), не обращаясь к системе (2.5). Пусть симметрия задается уравнением

$$f_\tau = F(f, f_x, p, x, t). \quad (4.1)$$

Здесь  $F(f, p, x, t)$  — нелинейный функционал над  $f_x(\cdot, x, t)$ ,  $f(\cdot, x, t) \in B$ , зависящий от  $p$ ,  $x$ ,  $t$ . Введем функционал  $g(f, p) = (1/2)p^2 - pj$ . Уравнения (1.2) записываются в виде

$$f_t + g_p f_x - D_x g f_p = 0, \quad (4.2)$$

где  $D_x$  — обозначение оператора полной производной по переменной  $x$ :

$$D_x g = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\delta g}{\delta f} \langle f_x \rangle + \frac{\delta g}{\delta f_x} \langle f_{xx} \rangle + \dots \quad (4.3)$$

В формуле (4.3)  $\delta g/\delta f$ ,  $\delta g/\delta f_x$  — производные Фреше по аргументам  $f$ ,  $f_x$ . Определяющие уравнения для  $F$  получаются в результате дифференцирования (4.2) по  $\tau$ :

$$D_t F + g_p D_x F - D_x(g) F_p + g_{\tau p} f_x - D_x(g_\tau) f_p = 0. \quad (4.4)$$

Здесь  $D_t$  вводится аналогично (4.3) с заменой  $x$  на  $t$ , а

$$g_\tau = \frac{\delta g}{\delta f} \langle f_\tau \rangle = \frac{\delta g}{\delta f} \langle F \rangle.$$

Уравнение (4.4) должно выполняться на решениях системы (4.2). Если искать  $F$  в специальном виде

$$F = G_p f_x - D_x(G) f_p, \quad G = G(f, p, x, t), \quad (4.5)$$

то из (4.4) получаем определяющее уравнение для функционала  $G$

$$D_t G + g_p D_x G - D_x(g) G_p = g_\tau. \quad (4.6)$$

Как и (4.4), уравнение (4.6) справедливо в силу (4.2) и его следствий. Построенным выше симметриям (2.5) системы (2.3) соответствуют симметрии уравнения (4.2). Используя преобразования, связывающие указанные уравнения, находим класс решений уравнения (4.6):

$$G_i = \frac{\delta a_i}{\delta f} = \sum_{j=1}^i \frac{\partial a_i}{\partial A_j} p^j.$$

В частности, при  $i = 3$  решением (4.6) является функционал

$$G = p^3 - 3A_1 p^2 - 3A_2 p + 6A_1^2 p. \quad (4.7)$$

Инвариантные решения уравнения (4.2) по определению удовлетворяют стационарным уравнениям (4.1):

$$F = G_p f_x - D_x(G) f_p = 0.$$

Отсюда имеем функциональную зависимость  $f = \Phi(G, t)$ . Используя соотношение  $g_\tau = 0$ , верное для инвариантных решений, из (4.6), (4.7) получим систему уравнений для моментов  $A_1, A_2$

$$A_{1t} + A_{2x} - 3A_1 A_{1x} = 0, \quad A_{2t} + 3A_1 A_{2x} + (A_2 - 10A_1^2) A_{1x} = 0. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.2) будут выполнены, если  $\Phi_t = 0$ , а  $f = \Phi(G)$  удовлетворяет равенству

$$j = A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p \Phi(p^3 - 3A_1 p^2 - 3A_2 p + 6A_1^2 p) dp. \quad (4.9)$$

Так как (4.9) при известной функции  $\Phi$  задает связь между  $A_1$  и  $A_2$ , то решение уравнений (4.8) следует искать в классе простых волн. Введем  $B = A_2 A_1^{-2}$ . В области  $B > 1$  система уравнений (4.8) гиперболична и приводится к инвариантам Римана:

$$r_t + A_1 \sqrt{B-1} r_x = 0, \quad l_t - A_1 \sqrt{B-1} l_x = 0, \quad (4.10)$$

$$r = A_1^2 |\sqrt{B-1} - 2^{-1}|^{2/3} (\sqrt{B-1} + 1)^{4/3}, \quad l = A_1^2 |\sqrt{B-1} - 1|^{4/3} (\sqrt{B-1} + 2^{-1})^{2/3}.$$

Из (4.10) следует, что простая волна удовлетворяет либо соотношению  $r = r_0 = \text{const}$ , либо  $l = l_0 = \text{const}$ . В первом случае  $A_1 = \sqrt{r_0} |\sqrt{B-1} - 2^{-1}|^{-1/3} (\sqrt{B-1} + 1)^{-2/3}$ , а функция  $B$  является решением уравнения

$$B_t - \sqrt{r_0} |\sqrt{B-1} - 2^{-1}|^{-1/3} (\sqrt{B-1} + 1)^{-2/3} \sqrt{B-1} B_x = 0. \quad (4.11)$$

Во втором случае  $A_1 = \sqrt{l_0} |\sqrt{B-1} - 1|^{-2/3} |\sqrt{B-1} + 2^{-1}|^{-1/3}$ , а функция  $B$  удовлетворяет уравнению

$$B_t + \sqrt{l_0} |\sqrt{B-1} - 1|^{-2/3} |\sqrt{B-1} + 2^{-1}|^{-1/3} \sqrt{B-1} B_x = 0. \quad (4.12)$$

В дальнейшем считаем, что  $A_1 = A_1(B)$ , где  $A_1(B)$  — одна из двух функций, приведенных выше. Преобразуем (4.9) в интегральное уравнение относительно функции  $\Phi$ . В интеграле (4.9) удобно перейти к переменной интегрирования  $G$ . Так как

$$dG = (3p^2 - 6A_1p + 3(2 - B)A_1^2) dp, \quad (4.13)$$

то соответствие новых и старых переменных взаимно однозначно на интервалах, разделенных корнями квадратного полинома в круглых скобках. Из (4.13) следует, что  $dG/dp > 0$  при  $p > A_1(1 + \sqrt{B-1})$  и  $p < A_1(1 - \sqrt{B-1})$ . При  $p \in (A_1(1 - \sqrt{B-1}), A_1(1 + \sqrt{B-1}))$  производная  $dG/dp$  отрицательна. Функция  $G$  в точке локального минимума ( $p = A_1(1 + \sqrt{B-1})$ ) принимает значение  $G_1(B) = A_1^3(4 - 3B - 2(B-1)^{3/2})$ , а в точке локального максимума — значение  $G_2(B) = A_1^3(4 - 3B + 2(B-1)^{3/2})$  (считаем для определенности, что  $A_1 > 0$ ).

Соотношение (4.9) после замены переменной приобретает вид

$$A_1(B) = \int_{-\infty}^{G_2(B)} \frac{\Phi(G)p_1}{G'(p_1)} dG + \int_{G_1(B)}^{\infty} \frac{\Phi(G)p_3}{G'(p_3)} dG - \int_{G_1(B)}^{G_2(B)} \frac{\Phi(G)p_2}{G'(p_2)} dG. \quad (4.14)$$

Здесь  $p = p_1(G, B)$  — ветвь обратной функции, корня уравнения (4.7) на участке монотонности  $G \in (-\infty, G_2)$ ;  $p = p_3(G, B)$  — аналогичная ветвь, определяемая на участке монотонности  $G \in (G_1, \infty)$ , а ветвь  $p = p_2(G, B)$  определена на участке  $G \in (G_1, G_2)$ . На последнем интервале выполнено неравенство  $p_1 < p_2 < p_3$ . Используя функции  $p_i$ , (4.7) можно представить в форме  $\chi(p) = 0$ ,  $\chi(p) = (p - p_1(G, B))(p - p_2(G, B))(p - p_3(G, B))$ . Поскольку  $\chi'(p_i) = G'(p_i) = \prod_{k \neq i} (p_i - p_k)$ , то легко получить связь между ядрами интегрального уравнения (4.14):

$$-\frac{p_2}{G'(p_2)} - \frac{p_1}{G'(p_1)} + \frac{p_3}{G'(p_3)}.$$

С учетом этой связи (4.14) принимает вид

$$A_1(B) = \int_{-\infty}^{G_1(B)} \frac{\Phi(G)p_1(G, B)}{\chi'(p_1(G, B))} dG + \int_{G_2(B)}^{\infty} \frac{\Phi(G)p_3(G, B)}{\chi'(p_3(G, B))} dG + \\ + 2 \int_{G_1(B)}^{G_2(B)} \Phi(G) \left( \frac{p_1(G, B)}{\chi'(p_1(G, B))} + \frac{p_3(G, B)}{\chi'(p_3(G, B))} \right) dG. \quad (4.15)$$

Покажем, как с помощью уравнения (4.15) можно найти функцию распределения в простой волне небольшой амплитуды. Пусть в области простой волны  $B$  изменяется в интервале  $(B_0, B_1)$ , при этом функция  $G_2(B)$  монотонно изменяется от  $G_{20}$  до  $G_{21}$ , а функция  $G_1(B)$  принимает значения в интервале  $(G_{10}, G_{11})$ ,  $G_{11} < G_{20}$ . Зададим  $\Phi(G)$  вне интервала  $(G_{20}, G_{21})$  произвольным образом, а внутри интервала найдем как решение интегрального уравнения

$$2 \int_{G_{20}}^{G_2(B)} \left( \frac{p_1(G, B)}{\chi'(p_1(G, B))} + \frac{p_3(G, B)}{\chi'(p_3(G, B))} \right) \Phi(G) dG + \int_{G_2(B)}^{G_{21}} \frac{p_2(G, B)}{\chi'(p_3(G, B))} \Phi(G) dG = \\ = A_1(B) - \int_{-\infty}^{G_1(B)} \frac{p_1(G, B)}{\chi'(p_1(G, B))} \Phi(G) dG - \int_{G_{21}}^{\infty} \frac{p_3(G, B)}{\chi'(p_3(G, B))} \Phi(G) dG -$$

$$-2 \int_{G_1(B)}^{G_{20}} \left( \frac{p_1(G, B)}{\chi'(p_1)(G, B)} + \frac{p_3(G, B)}{\chi'(p_3)(G, B)} \right) \Phi(G) dG.$$

Это линейное уравнение первого рода с интегральным оператором вида

$$\int_{G_{20}}^S (K_1(G, S) + K_2(G, S)) \Phi(G) dG + \int_S^{G_{21}} K_3(G, S) \Phi(G) dG = \Psi(S). \quad (4.16)$$

Здесь  $S = G_2(B)$  (соответственно  $B = G_2^{-1}(S)$ ),  $\Psi(S)$  — известная функция,  $K_i(G, S)$  — известные ядра интегральных операторов.

Покажем, что (4.16) сводится к интегральному уравнению второго рода, разрешимому методом итераций. Ядро интегрального оператора  $K_2(G, S)$  не имеет особенностей в области интегрирования, так как  $\chi'(p_3) \neq 0$  ( $G_1(B) < G_{11}$ ). Однако функция  $K_1(G, S)$  обращается в бесконечность при  $G = S$  в силу того, что  $\chi'(p_1) = 0$  при  $G = G_2(B)$ . Выделим главный член особенности ядра  $K_1(G, S)$ . Соотношение (4.7) можно записать в виде

$$(p - p_*)^2 = \frac{G_2(B) - G}{A_1 \sqrt{B - 1}} \left( 1 + \frac{p - p_*}{3A_1 \sqrt{B - 1} - (p - p_*)} \right). \quad (4.17)$$

Здесь  $p_* = A_1(1 - \sqrt{B - 1})$ . Итерированием (4.17) можно получить разложение  $p_i - p_*$  в ряд по степеням  $(G_2(B) - G)^{1/2}$ . Используя первые члены разложения, получим представление

$$\frac{1}{p_2(G, B) - p_1(G, B)} = \frac{2\sqrt{A_1}(B - 1)^{1/4}}{\sqrt{G_2(B) - G}} + K_3(G, S), \quad (4.18)$$

где  $K_3(G, S)$  — непрерывно дифференцируемая функция, имеющая нули первого порядка при  $G = S$ . Второй сомножитель в представлении ядра  $K_1(G, S)$

$$\frac{p_3}{p_3 - p_1} = \frac{1 + 2\sqrt{B - 1}}{3\sqrt{B - 1}} + K_4(G, S) \quad (4.19)$$

особенностей не имеет. Функция  $K_4(G, S)$  обладает теми же свойствами, что и функция  $K_3(G, S)$ . Перемножив выражения (4.18), (4.19), получим

$$K_1(G, S) = \frac{\eta(S)}{\sqrt{S - G}} + \sqrt{S - G} K_5(G, S) + K_6(G, S). \quad (4.20)$$

Здесь  $K_5(G, S)$ ,  $K_6(G, S)$  — непрерывно дифференцируемые функции и  $K_6(G, S) = 0$  при  $G = S$ , а

$$\eta(S) = \frac{2\sqrt{A_1}(1 + 2\sqrt{B - 1})}{3(B - 1)^{1/4}}.$$

Подстановка (4.20) в (4.16) дает интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \int_{G_{20}}^S \frac{\Phi(G)}{\sqrt{S - G}} dG &= \Psi_1(S) = \\ &= \int_{G_{20}}^S (\sqrt{S - G} L_1(G, S) + L_2(G, S)) \Phi(G) dG + \int_S^{G_{21}} L_3(G, S) \Phi(G) dG + (2\eta(S))^{-1} \Psi(S). \end{aligned}$$

с непрерывно дифференцируемыми ядрами  $L_i(G, S)$ .

Обратив интегральный оператор Абеля, приходим к уравнению второго рода

$$\Phi(G) = \frac{1}{\pi} \int_{G_{20}}^G \frac{\Psi'_1(S)}{\sqrt{G-S}} dS, \quad (4.21)$$

однозначно разрешимому методом итераций при малых значениях  $|G_{21} - G_{20}|$ .

Если из (4.21) найдена функция распределения  $\Phi(G)$ , то решение, инвариантное относительно обобщенной симметрии, полностью определяется любым решением  $B = B(x, t)$  уравнения (4.11) (либо (4.12)).

Траектории частиц в найденной простой волне являются интегральными кривыми системы

$$\frac{dx}{dt} = p - j, \quad \frac{dp}{dt} = pj_x. \quad (4.22)$$

В области простой волны траектории удобно искать в неявном виде:  $k(x, t) = k_0(t)$ ,  $p = p_0(t)$ , где  $k = k(x, t)$  — угловой наклон характеристик простой волны. При  $k_x \neq 0$ , разрешая уравнение  $k(x, t) = k_0(t)$  относительно  $x$ , можно найти координату  $x$  частицы  $x = x_0(t)$ . Так как в простой волне функция  $k(x, t)$  удовлетворяет уравнению  $k_t + k k_x = 0$ , то из (4.22) следуют равенства

$$\frac{dk}{dt} = (p - j - k)k_x, \quad \frac{dp}{dt} = pj_k k_x. \quad (4.23)$$

Система (4.23) имеет интеграл  $G(p, k) = \text{const}$  в силу того, что уравнение (4.6) на простой волне принимает вид

$$(p - j - k)G_k + pj_k G_p = 0. \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует, что точкам поворота траекторий в системе координат, движущейся вместе с волной (точкам, где  $p - j - k$  меняет знак), соответствуют экстремумы функции  $G(p)$ . Следовательно, построенное решение  $f = f(p, k)$  описывает течение с критическими слоями: скорость простой волны  $k$  совпадает со скоростью частиц  $p - j$  в определенных точках траекторий.

Отметим, что построенную в п. 3 бегущую волну также можно рассматривать как решение, инвариантное относительно обобщенной симметрии. Для этого решения симметрия задается уравнениями (4.1), (4.5) с функционалом  $G = p^2/2 - (j + D)p$ .

**Заключение.** Установлено, что система кинетических уравнений одномерного движения пузырьков в жидкости, выведенная Д. Руссо и П. Смерекой, обладает рядом интересных свойств. Эти уравнения сводятся к интегродифференциальной системе, являющейся гиперболической (в смысле [6, 7]) в случае выполнения определенных условий. Существует интегральное преобразование неизвестных функций к системе инвариантов Римана, сохраняющихся вдоль характеристик непрерывного характеристического спектра. Система допускает бесконечное число законов сохранения с плотностями, зависящими от моментов функции распределения. Кроме того, уравнения движения допускают запись в гамильтоновой форме. Это позволяет найти бесконечное число обобщенных симметрий системы, задаваемых интегродифференциальными уравнениями специального вида. В работе получены точные решения, инвариантные относительно первых обобщенных симметрий из бесконечной серии. Полностью проинтегрированы уравнения, определяющие бегущие волны. Для одного класса простых волн задача построения решения сведена к линейному интегральному уравнению второго рода, разрешимому методом итераций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Russo G., Smereka P. Kinetic theory for bubble flow I: collisionless case // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56. P. 327–357.
2. Van Wijngaarden L., Kapteyn C. Concentration waves in dilute bubble/liquid mixtures // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 111–137.
3. Кок J. В. The Fokker–Plank equation for bubble flows and the motion of gas bubble pairs // Appl. Sci. Res. 1997/8. V. 58, N 1/4. P. 319–335.
4. Biesheuvel A., Gorissen W. C. M. Void fraction disturbance in a uniform bubble liquid // J. Multiphase Flow. 1990. V. 16. P. 217–231.
5. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
6. Тешуков В. М. О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
7. Тешуков В. М. Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
9. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1985.
11. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

*Поступила в редакцию 21/VIII 1998 г.*

---