ЛИТЕРАТУРА

1. **Гапонов С. А., Маслов А. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках.— Новосибирск: Наука, 1980.
2. **Жигулев В. Н., Тумин А. М.** Возникновение турбулентности.— Новосибирск: Наука, 1987.
3. **Маслов А. А., Семенов Н. В.** Излучение акустических колебаний сверхзвуковым пограничным слоем // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1987.— № 7, вып. 2.
4. **Маслов А. А., Семенов Н. В.** Возбуждение собственных колебаний пограничного слоя внешним акустическим полем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 3.
5. **Косинов А. Д., Маслов А. А., Шевельков С. Г.** Экспериментальное исследование волновой структуры сверхзвукового пограничного слоя // ПМТФ.— 1986.— № 5.
6. **Косинов А. Д., Маслов А. А.** Развитие искусственно вызванных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 5.

г. Новосибирск *Поступила 3/I 1989 г.*

УДК 532.517.4

Г. А. Кузьмин, А. З. Паташинский

О ГИДРОДИНАМИКЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ПАКЕТОВ

Чтобы описать турбулентность как хаос когерентных структур [1], нужно установить типы этих структур. К настоящему времени накоплена некоторая экспериментальная информация о структурах, масштаб которых l порядка или больше основного масштаба турбулентности L. Известны модели, в которых элементами движения служат вихревые кольца и нити либо сдвиговые слои [1, 2].

Экспериментальные данные о характерных структурных элементах малых масштабов $l \ll L$ очень скудны. Известно лишь, что мелкомасштабные движения обладают сильной перемежаемостью; они сосредоточены в областях с малыми относительными объемами. Можно предположить, что мелкомасштабным движениям присуща некоторая организованность. Сочетание сильной нелинейности движений внутри малого объема с вытягивающим и ориентирующим воздействием крупномасштабной скорости может привести к значительному упорядочению движений в этом объеме. Такое упорядочение в особенности вероятно для движений из интервала диссипации энергии, в котором происходит релаксация движений, порожденных инерционным интервалом.

В настоящей работе показано, что свойства турбулентности в интервале диссипации энергии определяются квазиодномерными пакетами гидродинамических гармоник. Найдены уравнения, описывающие эволюцию пакетов во времени и определены характерные свойства решений, существенные для понимания нелинейной динамики пульсаций в диссипативной области масштабов.

Свойства турбулентности в интервале диссипации энергии. Локальная структура развитой турбулентности определяется масштабами длины — масштабами задачи L и диссипации Колмогорова η. В инерционном интервале масштабов $\eta \ll l \ll L$ происходит нелинейная передача энергии от больших масштабов к малым, а вязкость не играет существенной роли. Напротив, в области $l < \eta$ вязкость существенна, поскольку в ней происходит диссипация энергии, поступающей из инерционного интервала. Выявление роли нелинейности в области $l < \eta$ требует специального исследования.

Предположение о слабости нелинейности диссипирующих гармоник приводит к выводу об экспоненциальном убывании спектра турбулентности в области волновых чисел $k \gg \eta^{-1}$ [2]

$$E(k) \sim \exp\,[-(\eta k)^2]. \tag{1}$$

Более подробный теоретический анализ выявляет возможные причины более медленного убывания $E(k)$, чем (1). Первая причина — флуктуации параметра η, которые вызваны флуктуациями притока энергии из инерционного интервала. Осреднение E по флуктуациям η может привести к более медленному убыванию $E(k)$, чем (1) [3. 4]. Рассмотрение статистических свойств мелкомасштабных структур выходит за рамки настоящей работы. Другая причина состоит в сильной нелинейности диссипирующих гармоник. Учет ее в рамках методов теории поля позволяет вычислить спектр турбулентности при $\eta k \gg 1$ [5—7]

$$E(k) \sim \exp(-\eta k). \tag{2}$$

К асимптотике (2) приводит решение простых динамических моделей — нелинейного уравнения Ланжевена, уравнения Бюргерса, модели Лоренца [4]. Величина η связана с расстоянием до ближайшей к действительной оси особенности флуктуирующей функции. Если флуктуации ограничены, то асимптотика (2) сохранится и при осреднении по флуктуациям. Применение данной методики к гидродинамической турбулентности лимитировано многомерностью задачи.

Покажем, что динамика пульсаций в области $\eta k \gg 1$ квазиодномерна. Уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в представлении Фурье по пространственным координатам имеют вид

$$(\partial/\partial t + \nu k^2)\, u_i(\mathbf{k}, t) = -\, i/2 P_{ijl}(\mathbf{k}) \int d^3 q u_j(\mathbf{q}, t)\, u_l(\mathbf{k}-\mathbf{q}, t); \tag{3}$$

$$\mathbf{k}\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = 0 \tag{4}$$

$$(P_{ijl}(\mathbf{k}) = k_j \Delta_{il}(\mathbf{k}) + k_l \Delta_{ij}(\mathbf{k}),\ \Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2).$$

Естественно предположить, что характерная амплитуда гармоник при $\eta k \gg 1$ экспоненциально зависит от волнового числа

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) \sim \exp[-(\eta k)^\gamma] \tag{5}$$

($\gamma > 0$). Подстановка (5) в правую часть (3) показывает, что при $\gamma < 1$ основной вклад вносит область, где $q \ll |\mathbf{k} - \mathbf{q}| \sim k$ либо $|\mathbf{k} - \mathbf{q}| \ll q \sim k$. Это означает, что происходит прямая перекачка энергии из гармоник масштаба η в гармоники $\mathbf{u}(\mathbf{k})$. Уравнения (3) линеаризуются и приводят к спектру (1) [2], который не согласуется с предположением $\gamma < 1$. При $\gamma > 1$ наиболее существен вклад от области $q \sim |\mathbf{k}-\mathbf{q}| \sim k/2$. Правая часть (3) имеет порядок величины $P_{ijl}(\mathbf{k}) u^2(\mathbf{k}/2) k^3 \sim \exp[-(\eta k)^\gamma 2^{1-\gamma}]$. В пределе $\eta k \to \infty$ правая и левая части уравнения совпадают по порядку величины лишь при $\gamma = 1$. В этом случае наибольший вклад в интеграл вносит область, в которой волновые векторы $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$ почти коллинеарны. Вклад точно коллинеарных векторов $\mathbf{q}, \mathbf{k}$ обращается в нуль из-за наличия множителя $P_{ijl}(\mathbf{k})$, а неколлинеарных $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$ экспоненциально мал по поперечным отклонениям. Фазы гармоник $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ должны быть коррелированы. Вклад некогерентной компоненты в правую часть (3) мал из-за быстрых осцилляций.

Отсюда делаем вывод, что свойства турбулентности в крайне коротковолновой области $\eta k \gg 1$ определяются когерентными нелинейными пакетами гармоник с почти коллинеарными волновыми векторами. Ниже выводятся приближенные одномерные уравнения для пакета гармоник, которые следуют из полных уравнений гидродинамики (3), (4) после разложения по малой неколлинеарности.

Динамические уравнения для пакета гармоник. Полная информация о пакете гармоник с почти коллинеарными волновыми векторами $\mathbf{k}$ содержится в наборе линейных моментов функции $\mathbf{u}(\mathbf{k})$:

$$\theta^i_{i_1 \ldots i_n}(p) = \int_\sigma \varkappa_{i_1} \varkappa_{i_2} \ldots \varkappa_{i_n} u_i(p\mathbf{e} + \boldsymbol{\varkappa})\, d^2\varkappa, \tag{6}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\mathbf{e}$ — единичный вектор в направлении оси пакета; $\boldsymbol{\varkappa}$ — компонента волнового вектора, перпендикулярная этой оси; p — продольная проекция волнового вектора. Интегрирование выполняется в плоскости σ, перпендикулярной оси пакета.

Ниже учитываются моменты нулевого и первого порядков, несущие основную информацию о структуре пакета. Моменты более высокого порядка описывают тонкую структуру пакета. Они определяют вклад в эффективную вязкость и во взаимодействие, несущественные в диссипативной области масштабов.

Динамические уравнения для θ^i, $\theta_\mu{}^i$ получаем из (3), (4) после их интегрирования в плоскости σ с весовыми множителями 1, $\varkappa_\mu$. Под знаком интеграла можно разложить функцию P_{ijl} в ряд по отклонениям $\varkappa = \mathbf{k} - p\mathbf{e}$:

$$(7)\qquad \begin{aligned} P_{ijl}(\mathbf{k}) &= P_{ijl}(p\mathbf{e}) + \partial P_{ijl}(\mathbf{k})/\partial k_\alpha|_{\varkappa=0}\varkappa_\alpha + \ldots = \\ &= pP_{ijl}(\mathbf{e}) + \varkappa_j[\Delta_{il}(\mathbf{e}) - e_i e_l] + \varkappa_l[\Delta_{ij}(\mathbf{e}) - e_i e_j] - \\ &\quad -2\varkappa_i e_j e_l + \ldots \end{aligned}$$

Использование (7) позволяет заменить уравнения (3), (4) системой уравнений для линейных моментов $\theta^i_{i_1\ldots i_n}$.

Из уравнений несжимаемости (4) следует набор кинематических соотношений

$$(8)\qquad pe_j\theta^j_{i_1\ldots i_n} + \theta^j_{j,i_1,\ldots,i_n} = 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если пренебречь моментами выше первого порядка, то

$$(9)\qquad pe_j\theta^j(p) + \theta^j_j(p) = 0,\ e_j\theta^j_i = 0.$$

Аналогичное интегрирование уравнений (3) в плоскости σ дает динамические уравнения для θ^i, $\theta^i{}_m$:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \partial\theta^i(p)/\partial t + \nu p^2\theta^i(p) &= -ip/2P_{ijl}(\mathbf{e})\int dq\theta^j(q)\,\theta^l(p-q) - \\ &- i\int dq\,\{[\theta^j_j(q)\,\theta^l(p-q) + \theta^j(q)\,\theta^l_j(p-q)]\,[\Delta_{il}(\mathbf{e}) - e_ie_l] - \\ &- 2\theta^j_i(q)\,\theta^l(p-q)\,e_je_l\} + \ldots; \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} \partial\theta^i_m(p)/\partial t + \nu p^2\theta^i_m(p) &= -ip/2\int dq\,[\theta^i_m(q)\,\theta^l(p-q) + \\ &+ \theta^j(q)\,\theta^l_m(p-q)]\,[e_j\Delta_{il}(\mathbf{e}) + e_l\Delta_{ij}(\mathbf{e})]. \end{aligned}$$

Уравнения (10), (11) сведутся к системе дифференциальных уравнений в одномерном пространстве, если выполнить обратное преобразование Фурье по продольному волновому числу. Если в качестве оси пакета выбрать ось x и ввести обозначения

$$(12)\qquad f(x) = e_j\int \exp(ipx)\,\theta\ (p)\,dp = u_x(x, 0, 0);$$

$$(13)\qquad h_i(x) = \Delta_{im}(\mathbf{e})\int \exp(ipx)\,\theta^m(p)\,dp = \Delta_{im}(\mathbf{e})\,u_m(x, 0, 0);$$

$$(14)\qquad g_{im}(x) = -i\Delta_{il}(\mathbf{e})\int \exp(ipx)\,\theta^l_m(p)\,dp = \Delta_{il}(\mathbf{e})\,\Delta_{mn}(\mathbf{e})\frac{\partial u_l}{\partial x_n}(x, 0, 0),$$

то система (9)—(11) приобретет вид

$$(15)\qquad g_{jj} = \partial f/\partial x;$$

$$(16)\qquad \partial f/\partial t + f\partial f/\partial x = \nu\partial^2 f/\partial x^2;$$

$$(17)\qquad \partial g_{im}/\partial t + \partial(fg_{im})/\partial x = \nu\partial^2 g_{im}/\partial x^2;$$

$$(18)\qquad \partial h_i/\partial t + \partial(fh_i)/\partial x = \nu\partial^2 h_i/\partial x^2 + g_{ij}h_j + g_{jj}h_i.$$

Свойства решений уравнений для моментов. Полное решение (16)—(18) можно найти последовательным решением уравнений (16), (17), (18). Вначале определим продольную скорость (12), которая удовлетворяет уравнению Бюргерса (16). При известной функции f уравнение (17) линейно относительно тензора g_{im}. Если решение и этого уравнения найдено, то остается решить линейное уравнение (18).

Единственное нелинейное уравнение системы — уравнение Бюргерса интегрируется аналитически [8]. Для его решений характерна тенденция к образованию ударных фронтов. Положение и интенсивность фронтов определяется особенностями аналитической функции $f(x)$ в комплексной плоскости переменной $x = \zeta_1 + i\zeta_2$ [4]. Ближайшая к действительной оси особенность определяет асимптотику гармоник Фурье в области больших волновых чисел.

Тензор g_{im} удовлетворяет уравнению переноса (17). Правая часть уравнения описывает диффузионное действие вязкости, слагаемое $\partial(fg_{im})/\partial x$ — конвективный перенос g_{im} полем f. Для решений g_{im} характерна тенденция к росту модуля компонент в точках, в которых производная $\partial f/\partial x$ отрицательна. Противоположная тенденция — диффузионное расплывание узких пиков из-за действия вязкости.

Согласно (15), след тензора g_{ij} находится дифференцированием по x функции f. Поэтому остается найти бесследную компоненту $g'_{im} = g_{im} - \delta_{im}g_{jj}/3$. Симметричная компонента $(g'_{im} + g'_{mi})/2$ — тензор деформаций, а антисимметричная выражается через продольную завихренность $(g_{im} - g_{mi})/2 = \Delta_{il}(\mathbf{e})\Delta_{mn}(\mathbf{e})e_{lnj}\omega_j$. Поперечная скорость (13) удовлетворяет уравнению (18). Последние два слагаемых в правой части (18) дают конвективный приток поперечного импульса на ось пакета.

Из (16)—(18) легко видеть, что есть частные решения системы, в которых любые компоненты f, g_{im}, h_i тождественно равны нулю. Поскольку нелинейность существенна лишь при $f \neq 0$, основной интерес представляет эволюция продольной скорости f. Данный вывод противоречит часто принимаемому предположению, что асимптотика спектра при $\eta k \to \infty$ определяется эффектом растяжения вихревых линий — слагаемым $\partial(fg_{im})/\partial x$ в левой части уравнения (17). Если по случайным причинам область значительной завихренности попадает внутрь фронта функции f, то произойдет усиление продольной завихренности. Однако из сказанного выше следует, что это второстепенный эффект с точки зрения вычисления асимптотики спектра при $\eta k \to \infty$.

Полученные уравнения справедливы, если число Рейнольдса Re пакета невелико. Их формальное применение к пакетам гармоник с большим Re приводит к инерционному интервалу уравнения Бюргерса со спектром k^{-2}, который отличается от спектра Колмогорова — Обухова. Неприменимость уравнений (16)—(18) для пакетов с большим Re связана с тем, что такие пакеты неустойчивы относительно генерации гармоник с большой поперечной компонентой волнового вектора и быстро разрушаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hussain A. K. M. F.** Coherent structures — reality and myth // Phys. Fluids.— 1983.— V. 26, N 10.
2. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967.
3. **Келлер Б. С., Яглом А. М.** О влиянии флуктуации диссипации энергии на форму спектра в крайне коротковолновой области // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 3.
4. **Frisch U., Morf R.** Intermittency in nonlinear dynamics and singularities at complex times // Phys. Rev. A: Gen. Phys.— 1981.— V. 5, N 6.
5. **Kraichnan R. H.** The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1959.— V. 5, N 6.
6. **Кузьмин Г. А., Паташинский А. З.** Коротковолновая асимптотика спектра турбулентности // ЖЭТФ.— 1979.— Т. 76, № 6.
7. **Дубовиков М. М., Татарский В. И.** О вычислении асимптотики спектра локально-изотропной турбулентности в вязком интервале // ЖЭТФ.— 1987.— Т. 93, № 6.
8. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.

г. Новосибирск *Поступила 26/XII 1988 г.*