

**РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ  
ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ  
И ДЕФОРМАЦИЯМИ**

***Н. Ф. Какосимиidi, И. Е. Прокопович***

*(Одесса)*

Решение плоской контактной задачи теории ползучести при линейной зависимости между напряжениями и деформациями приведено в [1], при нелинейной — в [2].

Пространственная контактная задача для упруго-вязких тел, при простейших законах деформирования и без учета явления старения, рассмотрена в работе [3]. В настоящей статье показано распространение решения [1] на случай пространственной задачи и приведены расчетные формулы, учитывающие ползучесть и старение при помощи функции, вводимой в решение упруго-мгновенной задачи и независящей от геометрии поверхностей контакта.

При построении решения считается, что коэффициент поперечного расширения при деформациях ползучести  $v^*(t, \tau)$  равен коэффициенту поперечного расширения при упруго-мгновенных деформациях  $v(t)$  и постоянен во времени, т. е.

$$v^*(t, \tau) = v(t) = v = \text{const} \quad (0.1)$$

Как известно [4], это равенство при линейной зависимости между напряжениями и деформациями приводит к равенству между упруго-мгновенными напряжениями, вызванными поверхностными силами и соответствующими напряжениями, вычисленными с учетом ползучести.

Экспериментальные и теоретические исследования показали, что принятие допущения (0.1) может привести при определении напряжений, например в бетонных конструкциях, к погрешностям, не превышающим 5%, т. е. к погрешностям, допустимым в технических расчетах. Для обычного бетона  $v = 1/6$ ,  $0 < v^* \ll 1/6$ .

**1.** Известно, что вертикальные перемещения границы упругого полупространства  $v(t)$ , находящегося под действием переменных во времени нормальных сил  $p(t)$ , распределенных по некоторой площади  $F$ , могут быть определены по формуле

$$v(t) = \frac{1 - v^2}{\pi E(t)} \iint_F \frac{p(t) dF}{R} \quad (1.1)$$

где  $E(t)$  — модуль упруго-мгновенных деформаций полупространства;  $R$  — расстояние между перемещающейся точкой полупространства и элементом давлений  $p(t) dF$ . Перемещение  $v(t)$  и давление  $p(t)$  являются функциями не только времени  $t$ , но и геометрических координат.

Принимая зависимости между напряжениями и деформациями в виде [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^*(t) &= \frac{\sigma_x^*(t)[1 + v(t)] - v(t)S^*(t)}{E(t)} - \\ &- \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta^*(t, \tau)] - S^*(\tau) \frac{\partial \delta^*(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy}^*(t) = 2 \left\{ \frac{[1 + v(t)] \tau_{xy}^{(t)}}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{xy}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta^*(t, \tau)] d\tau \right\} \quad (xyz)$$

и допущение (0.1), можно записать формулу для определения вертикальных перемещений границы полупространства с учетом ползучести

$$v^*(t) = \frac{1 - v^2}{\pi E(t)} \omega(t) - \frac{1 - v^2}{\pi} \int_{\tau_1}^t \omega(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1.3)$$

Здесь

$$\omega(t) = \iint_F \frac{p(t) dF}{R} \quad (1.4)$$

Кроме того, здесь  $\tau_1$  — момент времени приложения нагрузки,  $\delta(t, \tau)$  — полная относительная нормальная деформация к моменту времени  $t$  от единичного напряжения, приложенного в момент  $\tau$ ,  $\delta^*(t, \tau)$  — полная деформация поперечного расширения,  $S^*(t) = \sigma_x^*(t) + \sigma_y^*(t) + \sigma_z^*(t)$ .

Основное уравнение контактной задачи теории упругости, как известно [5], имеет вид

$$v_1(t) + v_2(t) = \alpha(t) - f_1 - f_2 \quad (1.5)$$

в котором  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  и  $f_1$ ,  $f_2$  представляют, соответственно, вертикальные упругие перемещения и уравнения поверхностей сжимаемых тел,  $\alpha(t)$  — суммарное неупругое перемещение. Уравнение (1.5) справедливо и для случая, когда сжимаемые тела обладают свойством ползучести.

Подставив в (1.5) значения  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ , записанные согласно (1.3), получим такое интегральное уравнение

$$\vartheta(t) \omega^*(t) - \frac{1}{\pi} \int_{\tau_1}^t \omega^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - v_1^2) \delta_1(t, \tau) + (1 - v_2^2) \delta_2(t, \tau)] d\tau = \alpha(t) - f_0 \quad (1.6)$$

Здесь

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - v_1^2}{E_1(t)} + \frac{1 - v_2^2}{E_2(t)} \right], \quad f_0 = f_1 + f_2 \quad (1.7)$$

Причем

$$\omega^*(t) = \iint_F \frac{p^*(t) dF}{R} \quad (1.8)$$

где  $p^*(t)$  — контактное давление, определенное с учетом ползучести.

Таким образом, решение пространственной контактной задачи для тел, обладающих ползучестью, в указанной здесь постановке сводится к решению интегрального уравнения (1.6).

Интегральное уравнение (1.6) можно переписать в форме

$$\omega^*(t) - \frac{1}{\pi \vartheta(t)} \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \omega^*(\tau) d\tau = \frac{\alpha(t) - f_0}{\vartheta(t)} \quad (1.9)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - v_1^2) \delta_1(t, \tau) + (1 - v_2^2) \delta_2(t, \tau)] \quad (1.10)$$

Поэтому решение основного уравнения (1.6), из которого определяются неизвестные контактные усилия  $p^*(t)$ , сводится к совместному решению двух связанных между собой интегральных уравнений (1.8) и (1.9), причем первое из них соответствует уравнению упруго-мгновенной задачи, второе учитывает влияние ползучести.

Следуя [1], представим решение уравнения (1.9) в виде

$$\omega^*(t) = \gamma^*(t) - H(t) f_0 \quad (1.11)$$

где  $\gamma^*(t)$  и  $H(t)$  — решения при правых частях, равных соответственно  $\alpha(t)/\vartheta(t)$  и  $1/\vartheta(t)$ . Тогда уравнение (1.8) может быть записано так

$$\iint_F \frac{p^*(t) dF}{R} = \gamma^*(t) - H(t) f_0 \quad (1.12)$$

Для определения  $H(t)$ , на основании (1.9) и (1.11), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\vartheta(t) H(t) - \frac{1}{\pi} \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) H(\tau) d\tau = 1 \quad (1.13)$$

с ядром  $K(t, \tau)$  согласно (1.10). К полученным уравнениям (1.12) и (1.13) необходимо прибавить условие равновесия сжимаемых тел

$$\iint_F p^*(t) dF = P(t) \quad (1.14)$$

Из (1.13) следует, что

$$\vartheta(t) H(t) = 1 \quad \text{при } \tau_1 = t \quad (1.15)$$

и (1.12) обращается в уравнение упруго-мгновенной задачи

$$\iint_F \frac{p(t) dF}{R} = \gamma^x(t) - \frac{f_0}{\vartheta(t)} \quad (1.16)$$

Из сравнения уравнений (1.16) и (1.12) очевидно, что если записать решение уравнения упруго-мгновенной задачи (1.16) в виде

$$p(t) = p^x(t) + p_0(t), \quad (1.17)$$

где первый член зависит от  $\gamma^x(t)$ , второй от  $f_0$ , то решение задачи с учетом ползучести, т. е. решение уравнения (1.12), может быть представлено так

$$p^*(t) = p^x(t) + p_0(t) H(t) \quad (1.18)$$

причем  $H(t)$  определяется из интегрального уравнения (1.13).

Как видно из (1.13), (1.10) и (1.7), коэффициент  $H(t)$  зависит от характеристики деформативности сжимаемых тел, но не зависит от их геометрии.

Таким образом, если известно решение упруго-мгновенной контактной задачи, то для тел, характеризующихся линейной зависимостью между напряжениями и деформациями и допускающих применение предпосылки (0.1), решение контактной задачи теории ползучести может быть записано по формуле (1.18).

2. Следуя<sup>[4,6]</sup>, примем для полных относительных деформаций выражения

$$\begin{aligned} \delta_1(t, \tau) &= \frac{1}{E_1(\tau)} \{1 + \psi_1(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]\} \\ \delta_2(t, \tau) &= \frac{1}{E_2(\tau)} \{1 + \psi_2(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\psi_1(\tau)$  и  $\psi_2(\tau)$  — так называемые предельные характеристики ползучести сжимаемых тел<sup>[7]</sup>, равные отношению полной деформации ползучести к упруго-мгновенной деформации,  $\gamma$  — некоторая постоянная. (Предполагается, что скорости ползучести сжимаемых тел одинаковы.)

Тогда решение интегрального уравнения (1.13) можно выразить в квадратурах следующим образом:

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)} - \gamma B(\tau_1) \psi_1(\tau_1) \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\eta(\tau)}}{\vartheta(\tau)} d\tau \quad (2.2)$$

Здесь

$$\eta(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} [1 + B(z) \psi_1(z)] dz, \quad B(\tau) = \frac{d_1 m_y(\tau) + d_2 m_n(\tau)}{d_2 + d_1 m_y(\tau)} \quad (2.3)$$

$$m_y(\tau) = \frac{E_2(\tau)}{E_1(\tau)}, \quad m_n(\tau) = \frac{\psi_2(\tau)}{\psi_1(\tau)}, \quad d_1 = \frac{1 - v_1^2}{\pi}, \quad d_2 = \frac{1 - v_2^2}{\pi} \quad (2.4)$$

На основании (2.2) записаны расчетные формулы для нижеследующих случаев.

1) Между характеристиками деформативности двух тел имеют место постоянные зависимости:

$$m_y(\tau) = m_y = \text{const}, \quad m_n(\tau) = m_n = \text{const}$$

2) Сжимаемые тела выполнены из одного и того же материала:

$$E_1(\tau) = E_2(\tau), \quad \psi_1(\tau) = \psi_2(\tau)$$

3) Модули упруго-мгновенных деформаций тел постоянны во времени:

$$E_1(\tau) = E_1 = \text{const}, \quad E_2(\tau) = E_2 = \text{const}$$

В случае 1) функция  $B(\tau)$  примет вид

$$B(\tau) = \frac{d_1 m_y + d_2 m_n}{d_2 + d_1 m_y} = b \quad (2.5)$$

В работе [6] показано, что функция  $\psi_1(\tau)$  может быть, например для бетона, достаточно хорошо аппроксимирована в виде двух ветвей  $\psi_{11}(\tau)$  и  $\psi_{12}(\tau)$ , а именно:

$$\psi_{11}(\tau) = \vartheta_{01} - \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_1 + \tau} \quad \text{при } 0 < \tau < t_1 \quad (2.6)$$

$$\psi_{12}(\tau) = \vartheta_{02} + \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_2 + \tau} \quad \text{при } t_1 < \tau < \infty \quad (2.7)$$

где  $t_1$  — возраст бетона, при котором функция  $\psi_1(\tau)$  достигает максимума, а  $\vartheta_{01}$ ,  $\vartheta_{11}$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_{02}$ ,  $\vartheta_{12}$  и  $\vartheta_2$  — постоянные коэффициенты, определяемые на основании экспериментальных данных.

Учитывая (2.6) и (2.7) и принимая для модуля упруго-мгновенных деформаций  $E_1(\tau)$  выражение [4]

$$E_1(\tau) = E_1(1 - \beta e^{-\alpha \tau}) \quad (2.8)$$

из решения (2.2) получим следующие расчетные формулы:

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)} \left[ 1 - \frac{\gamma b}{E_1(\tau_1)} \left( \vartheta_{01} - \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_1 + \tau_1} \right) F_1(t, \tau_1) \right] \quad \text{при } 0 < \tau_1 < t < t_1 \quad (2.9)$$

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)} \left\{ 1 - \frac{\gamma b}{E_1(\tau_1)} \left( \vartheta_{01} - \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_1 + \tau_1} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ F_1(t_1, \tau_1) + e^{-r_1(t_1 - \tau_1)} \left[ \frac{\vartheta_1 + t_1}{\vartheta_1 + \tau_1} \right]^{p_1} F_2(t, t_1) \right] \right\} \quad \text{при } 0 < \tau_1 < t_1 < t \quad (2.10)$$

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)} \left[ 1 - \frac{\gamma b}{E_1(\tau_1)} \left( \vartheta_{02} + \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_2 + \tau_1} \right) F_2(t, \tau_1) \right] \quad \text{при } t_1 < \tau_1 < t \quad (2.11)$$

Функции  $F_1(t, \tau_1)$  и  $F_2(t, t_1)$  определяются по формулам [6]

$$F_1(t, \tau_1) = E_1 \frac{e^{\bar{r}_1 \tau_1}}{(\vartheta_1 + \tau_1)^{p_1}} \left\{ -\frac{4}{\bar{r}_1} [e^{-r_1 t} (\vartheta_1 + t)^{p_1} - e^{-r_1 \tau_1} (\vartheta_1 + \tau_1)^{p_1}] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\bar{r}_1 + \alpha} [e^{-(r_1 + \alpha)t} (\vartheta_1 + t)^{p_1} - e^{-(r_1 + \alpha)\tau_1} (\tau_1 + \vartheta_1)^{p_1}] + \right. \\ \left. + \frac{p_1 \beta e^{r_1 \theta_1}}{\bar{r}_1^{1+p_1}} [\Phi[r_1(\vartheta_1 + t), 1 - p_1] - \Phi[r_1(\vartheta_1 + \tau_1), 1 - p_1]] - \right. \\ \left. - \frac{p_1 \beta e^{(r_1 + \alpha)\theta_1}}{(\bar{r}_1 + \alpha)^{1+p_1}} [\Phi[(r_1 + \alpha)(\vartheta_1 + t), 1 - p_1] - \Phi[(r_1 + \alpha)(\vartheta_1 + \tau_1), 1 - p_1]] \right\} \quad (2.12)$$

$$F_2(t, t_1) = E_1 e^{r_2 t_1} (\vartheta_2 + t_1)^{p_2} \left\{ \frac{e^{r_2 p_2}}{\bar{r}_2^{1-p_2}} [\Phi[r_2(\vartheta_2 + t), p_2] - \Phi[r_2(\vartheta_2 + t_1), p_2]] - \right. \\ \left. - \frac{\beta e^{\theta_2(r_2 + \alpha)}}{(r_2 + \alpha)^{1-p_2}} [\Phi[(\vartheta_2 + t)(r_2 + \alpha), p_2] - \Phi[(\vartheta_2 + t_1)(r_2 + \alpha), p_2]] \right\} \quad (2.13)$$

где через  $\Phi$  обозначены так называемые неполные гамма-функции [4]

$$\Phi(\xi, p) = \int_0^\xi \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau \quad (2.14)$$

Кроме того

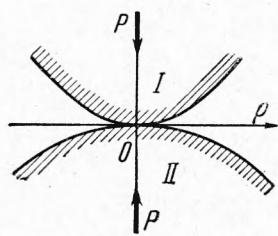
$$r_1 = \gamma(1 + b\vartheta_{01}), \quad p_1 = \gamma b\vartheta_{11}, \quad r_2 = \gamma(1 + b\vartheta_{02}), \quad p_2 = \gamma b\vartheta_{12} \quad (2.15)$$

Расчетные формулы для случая 2) получаются путем подстановки в (2.19) — (2.11) и (2.15) значения  $b = 1$ .

В случае 3) функция  $H(t)$  выражается формулой:

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)} \left\{ 1 - \gamma b \left( \vartheta_{02} + \frac{\vartheta_{12}}{\theta_2 + \tau_1} \right) e^{r_2(\theta_2 + \tau_1)} (\theta_2 + \tau_1)^{p_2} \times \right. \\ \left. \times r_2^{-(1-p_2)} [\Phi[r_2(\theta_2 + t), p_2] - \Phi[r_2(\theta_2 + \tau_1), p_2]] \right\} \quad (2.16)$$

3. В качестве примера рассмотрим решение осесимметричной контактной задачи теории ползучести, т. е. задачи о сжатии двух упругих тел, обладающих ползучестью и ограниченных некоторыми поверхностями вращения (фиг. 1).



Фиг. 1

Поскольку в этом случае область контакта будет кругом (фиг. 2), а следовательно

$$R = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos \varphi}, \quad dF = s ds d\varphi$$

интегральное уравнение (1.12) примет вид

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{a(t)} \frac{p^*(s, t) s ds d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos \varphi}} = \gamma^*(t) - H(t) f_0(\rho), \quad (3.1)$$

где  $a(t)$  — переменный во времени радиус области контакта.

Используя результаты И. Я. Штаермана [5], полученные для упругомгновенной задачи, решение интегрального уравнения (3.1) можно, согласно (1.18), записать в квадратурах следующим образом:

а) когда область контакта задана и на ее границе, при  $\rho = a$ , имеют место особенности

$$p^*(\rho, t) = \frac{\gamma^*(t)}{\pi^2 \sqrt{a^2 - \rho^2}} + H(t) \frac{1}{\pi^2} \int_{\rho}^a du \int_0^u \frac{f_0'(s) + sf_0''(s)}{V(u^2 - \rho^2)(u^2 - s^2)} ds \quad (3.2)$$

б) когда область контакта не задана и контакт происходит по плавным поверхностям

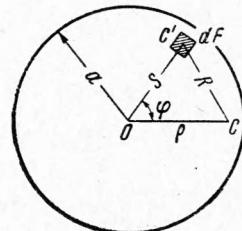
$$p^*(\rho, t) = H(t) \frac{1}{\pi^2} \int_{\rho}^{a(t)} du \int_0^u \frac{f_0'(s) + sf_0''(s)}{V(u^2 - \rho^2)(u^2 - s^2)} ds \quad (3.3)$$

В первом случае для определения  $\gamma^*(t)$  используется условие равновесия

$$P(t) = 2\pi \int_0^a p^*(\rho, t) \rho d\rho \quad (3.4)$$

Во втором случае  $a(t)$  определяется из аналогичного условия

$$P(t) = 2\pi \int_0^{a(t)} p^*(\rho, t) \rho d\rho \quad (3.5)$$



Фиг. 2

4. Запишем расчетные формулы для некоторых частных случаев осесимметричной контактной задачи теории ползучести.

1°. Контакт происходит по поверхностям вращения, удовлетворяющим уравнению  $f_0(\rho) = A\rho^2$ . Область контакта задана.

При помощи формулы (3.2) получим

$$p^*(\rho, t) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - \rho^2}} [\gamma^\times(t) - 4A(a^2 - \rho^2)H(t)] \quad (4.1)$$

Удовлетворив условие (3.4), найдем

$$\gamma^\times(t) = \frac{\pi P(t)}{2a} - \frac{4}{3} Aa^2 H(t) \quad (4.2)$$

Отсюда

$$p^*(\rho, t) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - \rho^2}} \left[ \frac{\pi P(t)}{2a} + 4A \left( \frac{2}{3} a^2 - \rho^2 \right) H(t) \right] \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) очевидно, что в данном случае функция  $H(t)$  характеризует перераспределение нормальных контактных усилий за счет ползучести, т. е. является коэффициентом перераспределения.

2°. Контакт происходит по тем же поверхностям, что и в случае 1°. Область контакта не задана. Согласно формуле (3.3) имеем

$$p^*(\rho, t) = H(t) \frac{4A}{\pi^2} \sqrt{a^2(t) - \rho^2} \quad (4.4)$$

Из условия (3.5) находим переменный во времени радиус области контакта

$$a(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi P(t)}{AH(t)} \right)^{1/3} \quad (4.5)$$

Так как (например, из (2.2)),

$$H(t) < H(\tau_1) = 1/\vartheta(\tau_1)$$

то из (4.4) и (4.5) вытекает, что

$$p^*(\rho, t) < p(\rho, \tau_1), \quad a(t) > a(\tau_1)$$

Следовательно, в случае 2° ползучесть приводит к уменьшению контактных усилий из-за увеличения области контакта, а функция  $H(t)$  является коэффициентом затухания напряжений.

3°. Жесткий цилиндрический штамп вдавливается в упругое полупространство. Область контакта — круг радиуса  $a$ .

В этом случае во всей области контакта функция  $f_0(\rho)$  равна нулю, поэтому второй член в выражении (3.2) обращается в нуль

$$p^*(\rho, t) = \frac{\gamma^\times(t)}{\pi^2 \sqrt{a^2 - \rho^2}} \quad (4.6)$$

Учитывая (3.4), приходим к формуле

$$p^*(\rho, t) = \frac{P(t)}{2\pi a \sqrt{a^2 - \rho^2}} \quad (4.7)$$

совпадающей с известной формулой теории упругости.

Таким образом, в случае 3° ползучесть не оказывает влияния на распределение контактных усилий [8].

5. Ниже приведены численные результаты решения конкретных примеров осесимметричной контактной задачи.

а) Два бетонных тела соприкасаются по плавным поверхностям, удовлетворяющим условию  $f_0(\rho) = \rho^2/2R_0$ , причем  $R_0 = 2000 \text{ см}$ . В возрасте бетона  $\tau_1 = 15$  суток (с момента укладки) к телам приложены сжимающие усилия, равные  $P(t) = 500 \text{ кг}$  и постоянные во времени.

Принято

$$E_1(\tau) = E_2(\tau), \quad \psi_1(\tau) = \psi_2(\tau)$$

причем [5]:

$$t_1 = 52 \text{ сутки}, \quad E_1 = E_2 = 2,695 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad v_1 = v_2 = 1/6$$

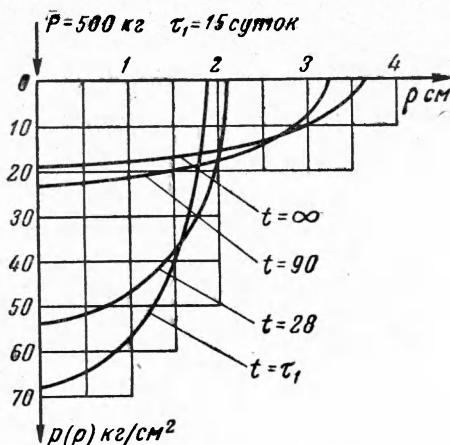
Кроме того

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.101, & \vartheta_{01} &= 2.838^*, & \vartheta_{02} &= 1.644^* \\ \beta &= 0.785, & \vartheta_{11} &= 15.97^*, & \vartheta_{12} &= 19.92^* \\ \gamma &= 0.014, & \theta_1 &= 11.10, & \theta_2 &= -30.85 \end{aligned}$$

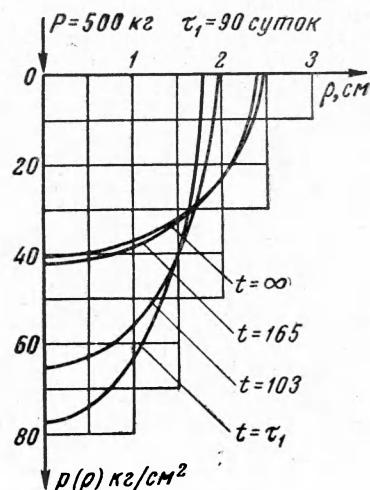
Здесь значения, отмеченные звездочкой, приняты с поправочным коэффициентом 0.6, учитывающим масштабный фактор.

На фиг. 3 представлены эпюры контактных напряжений, соответствующие различным моментам времени  $t$ .

Из фигуры видно, что ползучесть вызывает значительное увеличение площади контакта и уменьшение контактных усилий, возникающих в момент приложения нагрузки. Максимальное напряжение (в точке  $\rho = 0$ ) к моменту времени  $t = \infty$  уменьшилось примерно в 4 раза за счет увеличения радиуса области контакта в 2 раза.



Фиг. 3



Фиг. 4

б) Условия те же, что и в предыдущем случае, но сжимающие усилия приложены в возрасте бетона  $\tau_1 = 90$  суткам.

Эпюры контактных напряжений в различные моменты времени  $t$  показаны на фиг. 4.

Из сравнения фигур 3 и 4 отчетливо видно влияние возраста бетона в момент приложения нагрузки на величину радиуса круга, по которому происходит контакт, и интенсивность контактных усилий.

Авторы благодарят М. Г. Крейна за советы при выполнении работы.

Поступила 24 IV 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, 1956, т. XX, вып. 6.
2. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
3. Lee E. H., Radok J. R. M. Stress analysis in linearly visco-elastic materials. Actes. IX Congr. internat. mechan. appl. T. 5. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.-Л., 1952.
5. Штэрман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.-Л., 1949.
6. Прокопович И. Е. К теории ползучести бетона. Научные доклады высшей школы, серия «Строительство», 1958, № 4.
7. Александровский С. В. Температурные напряжения в массивных блоках от экзотермии цемента. Сб. НИИ по строительству. Массивные и стержневые конструкции. Минмашстрой, М., 1952.
8. Слезкин Н. А. О погружении диска в вязко-сжимаемую среду. ПММ, 1945, т. IX, вып. 3.