ПМТФ, № 1, 1966

К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(Москва)

В ряде работ, посвященных получению точных решений уравнений нерелятивистского моноэнергетического пучка заряженных частиц (см., например, [1,2]), высказывается мнение, что метод разделения переменных является перспективным, но при отыскании систем с разделяющимися переменными могут возникнуть определенные трудности. В частности, при исследовании регулярных электростатических течений широкое распространение получил прием, состоящий в переходе к системе координат, связанной с траекторией. В такой системе вектор скорости имеет лишь одну компоненту, например $\mathbf{V} = \{v_{x^1}, 0, 0\}$, так что течение осуществляется в x^1-направлении (x^1-течение). Такой поток будем называть также однокомпонентным [3]. Полагают (см., например, [4]), что описанный прием может оказаться эффективным для отыскания широкого класса течений. Вопрос о системах координат, допускающих потоки в x^1-направлении, является задачей более частной, чем общая задача разделения переменных.

В § 1 обсуждается понятие x^1-течения с точки зрения его полезности при получении решений уравнений регулярного электростатического пучка. Оказалось, что переход к системе координат, связанной с траекторией, оправдан лишь для четырех ортогональных систем: декартовой, цилиндрической, спиральной цилиндрической и сферической. Для случая двумерных систем на плоскости с конформной метрикой показано, что необходимое условие возможности x^1-течения и условия эвклидовости пространства могут быть эффективно использованы для установления факта существования в заданном классе координатных систем x^1-течения, не берущего начало с реального эмиттера (§ 2). В работе используются обычные тензорные обозначения.

§ 1. Следуя [5], будем называть регулярным течение, для которого обобщенный импульс является потенциальным вектором. При отсутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{H} = 0$ (электростатический пучок) это условие выражается формулами

$$e^{ikl} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} = 0, \qquad v_i = \frac{\partial W}{\partial x^i}$$

Здесь W — действие, отнесенное к массе частицы, v_i — ковариантные компоненты скорости. Моноэнергетический регулярный нерелятивистский пучок одноименно заряженных частиц в стационарном случае при $\mathbf{H} = 0$ описывается, как известно [3, 6], одним нелинейным дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно W. В произвольной криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$), метрика в которой задается соотношением

$$dS^{(2)} = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{1.1}$$

это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ g^{mn} \frac{\partial W}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sqrt{g}\, g^{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \right) \right] \right\} = 0 \tag{1.2}$$

В случае течения в x^1-направлении уравнение (1.2) [3, 7] имеет вид

$$f(x)\, w^{1/2} \frac{d^2 w}{(dx^1)^2} + \frac{\partial f(x)}{\partial x^1} w^{1/2} \frac{dw}{dx^1} + f(x)\, h(x)\, w^{3/2} = F(x^2, x^3) \tag{1.3}$$

$$f(x) = \left[\frac{g_{22} g_{33}}{(g_{11})^5} \right]^{1/2}, \qquad h(x) = \frac{(g_{11})^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial g^{11}}{\partial x^k} \right), \qquad w = (v_1)^2 = \left(\frac{dW}{\partial x^1} \right)^2$$

Здесь $F(x^2, x^3)$ — некоторая функция, возникающая в результате интегрирования по x^1, а $f(x) = f(x^1, x^2, x^3)$.

Получению необходимых и достаточных условий возможности однокомпонентного течения в x^1-направлении, при выполнении которых (1.3) становится обыкновенным дифференциальным уравнением относительно $w(x^1)$, посвящен ряд работ [7-12]. Достаточные условия x^1-течения выписаны в [7] в виде

$$f(x) = \Phi(x^1) F(x^2, x^3), \qquad h(x) = \Psi(x^1) \tag{1.4}$$

В работах [8, 9] приведены примеры решений, для которых (1.4) не выполняются. В [8] — это плоское течение по гиперболическим траекториям с постоянной плотностью пространственного заряда, рассмотренное впервые в [13], для которого

$$f(x) = 4[(x^1)^2 + (x^2)^2], \qquad h(x) = [(x^1)^2 + (x^2)^2]^{-1} \tag{1.5}$$

$$x^1 = {}^1/_2 (x^2 - y^2), \qquad x^2 = xy, \qquad W = x^1$$

Здесь x, y — декартовы координаты. В [9] показано, что для плоского периодического течения, описанного в [14]

$$f(x) = 16[1 - 2\exp(x^2)\cos x^1 + \exp(2x^2)] \tag{1.6}$$

$$x^1 = \operatorname{Re}(2i \ln \operatorname{sc} z), \qquad x^2 = \operatorname{Im}(2i \ln \operatorname{sc} z), \qquad W = x^1, \qquad z = x + iy$$

Решения (1.5), (1.6) соответствуют течениям, которые не могут брать начало с реального эмиттера. В [9] указано также решение, определяющее ограниченную пространственным зарядом эмиссию с плоскости $y = 0$

$$x^1 = e^{\alpha x} Y(y), \qquad x^2 = x - \int \frac{\alpha Y}{dY/dy} dy, \qquad W = x^1 \quad (\alpha = \text{const}) \tag{1.7}$$

Здесь Y — функция, удовлетворяющая некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению [1]; решение (1.7) найдено методом разделения переменных. Заметим, что как (1.7), так и другие решения вида $W = K(x^1) L(x^2)$ являются инвариантными решениями [15]. Метрика системы (1.7) также не удовлетворяет условиям (1.4).

В работах [16, 17] показано, что при выполнении (1.4) однокомпонентные течения возможны лишь в четырех ортогональных системах координат: декартовой x, y, z, цилиндрической R, ψ, z, спиральной цилиндрической q_1, q_2, z, сферической r, θ, ψ. В [17] рассматривался более широкий класс координатных систем по сравнению с [16]. Оказалось, что траекториями могут быть прямые, окружности или спирали. Постараемся выяснить, чем объясняется столь небольшое число возможных траекторий: недостаточной общностью условий (1.4) или другими причинами.

Всякое регулярное течение, без сомнения, может быть представлено как однокомпонентное, если в качестве одной из координатных осей выбрать траекторию частицы и положить $x^1 = W$. В такой системе координат ковариантная компонента скорости равна единице $v_1 = 1$ $(v_2 = v_3 = 0)$, и из уравнения (1.3) следует необходимое условие x^1-течения в виде [8]

$$f(x) h(x) = F(x^2, x^3) \tag{1.8}$$

Весь вопрос в том, оказывается ли понятие однокомпонентного пучка полезным при описании произвольного регулярного течения.

С математической точки зрения, переход от описания потока в некоторой системе координат к описанию в системе координат, связанной с траекторией, означает попытку свести уравнение в частных производных (1.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению. В [17] показано, что это задача более частная, чем задача о разделении переменных в уравнении (1.2). Тот факт, что переменные для данного уравнения разделяются в конечном числе координатных систем, не вызывает удивления.

Примеры, приведенные в [8, 9], стимулировали получение более общих, с формальной точки зрения, достаточных условий x^1-течения [10–12]. В [11] они были выписаны в виде

$$f(x) = \Phi(x^1)F(x^2, x^3) + G(x), \qquad f(x)h(x) = \Psi(x^1)F(x^2, x^3) + H(x) \tag{1.9}$$

причем функции $G(x)$, $H(x)$ и $w(x^1)$ связаны соотношением

$$G(x)\frac{d^2w}{(dx^1)^2} + \frac{\partial G(x)}{\partial x^1}\frac{dw}{dx^1} + H(x)w = 0$$

В [17] показано, что условия (1.4), (1.9) относятся к двум качественно различным классам течений. Выполнение (1.9) приводит к понижению порядка уравнения для w, вследствие чего два условия на эмиттере не могут быть удовлетворены за счет этого дифференциального уравнения. Разумеется, в принципе существует возможность их удовлетворения за счет метрики системы координат, в которой течение представляется однокомпонентным, так как $\varphi = {}^1/_2\, g^{11}w$. Однако эта возможность не имеет практической ценности, как и необходимое условие (1.8), так как координаты с указанными специальными свойствами метрического тензора могут быть определены лишь после нахождения соответствующего решения другим способом (без привлечения понятия однокомпонентности). Поэтому решения, для которых имеет место (1.9) и которые можно надеяться найти, используя понятие x^1-течения, являются вырожденными и не могут описывать течения с реального эмиттера.

Таким образом, могут представиться следующие три случая.

(1) Задачи об определении системы координат, допускающей однокомпонентное течение, и интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего это течение, решаются отдельно одна от другой. Этот случай имеет место при подходе, осуществленном в [17], и здесь понятие однокомпонентного течения оказывается полезным.

(2) Кроме решений $W = W(x^1)$, исследованных в [17], существуют решения [18] более общего вида $W = K(x^1)L(x^2)M(x^3)$; для них система координат, в которой течение может быть представлено как однокомпонентное, определяется после решения обыкновенного дифференциального уравнения, как это имеет место для (1.7) и всех других инвариантных решений.

(3) Система координат, в которой течение осуществляется в x^1-направлении, может быть найдена после решения исходного уравнения (1.2) в частных производных.

Ясно, что как во втором, так и в третьем случаях понятие x^1-течения не имеет практической ценности.

§ 2. Покажем, что, используя необходимое условие (1.8), можно получить некоторые положительные результаты. Ограничимся рассмотрением плоских однокомпонентных течений в системах координат с конформной метрикой

$$x^1 = \operatorname{Re} k(z), \qquad x^2 = \operatorname{Im} k(z), \qquad g_{11} = g_{22} = \sqrt{g} \quad (z = x + iy) \tag{2.1}$$

Условие (1.8) в этом случае принимает вид

$$\frac{1}{4g^3}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^2\right] = F(x^2) \tag{2.2}$$

Кроме выполнения (2.2), необходимо, чтобы метрика была эвклидовой. Это требование выражается равенством нулю тензора Римана—Кристоффеля

$$R^p_{\cdot rst} = 0$$

или шестью тождествами Ляме, из которых в плоском случае пять удовлетворяются автоматически, а последнее при учете (2.1) имеет вид (см. [17])

$$\frac{\partial^2 g}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 g}{(\partial x^2)^2} = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^2\right] \tag{2.3}$$

1°. Выясним прежде всего, существуют ли системы координат, для которых $g = \alpha\ (x^1)\beta\ (x^2)$ и которые допускают x^1-течения. Решение (2.2), (2.3) дает

$$g = a \exp (bx^2) \qquad (a, b = \text{const}) \tag{2.4}$$

Формула (2.4) определяет координаты $x^1 = \psi$, $x^2 = \ln R$ и показывает возможность течения в ψ-направлении. Учитывая, что для решений рассматриваемого в этом параграфе типа

$$v_{x^1} = (g^{11})^{1/2}, \qquad \varphi = {}^1/_2\, g^{11}, \qquad \rho = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik}\frac{\partial g^{11}}{\partial x^k}\right)$$

получаем следующие выражения для физической компоненты скорости v_ψ, потенциала φ, плотности пространственного заряда ρ и действия W

$$v_\psi = R^{-1}, \qquad \varphi = {}^1/_2\, R^{-2}, \qquad \rho = 2R^{-4}, \qquad W = \psi \tag{2.5}$$

На существование решения (2.5) указано в [10]. Формулы (2.5) выписаны для безразмерных параметров, определяющих течение.

2°. Посмотрим, существуют ли x^1-течения в системах координат, для которых

$$g = [\alpha\ (x^1) + \beta\ (x^2)]^{-1} \tag{2.6}$$

Уравнения (2.2), (2.3) дают для этого случая

$$\alpha'' = \alpha_0, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 = (\alpha + \beta)(\alpha_0 + \beta''), \qquad \alpha_0 = \text{const} \tag{2.7}$$

Формулы (2.7) имеют место, если

$$(1)\ \beta\beta'' - \beta'^2 + \alpha_0\beta = \text{const}, \quad \beta'' = \text{const}; \quad (2)\ \alpha = \text{const}$$

Можно показать, что при $\alpha = \text{const}$ решение приводит к выражению (2.4). В первом случае имеем

$$\alpha\ (x^1) = {}^1/_2\, \alpha_0\, (x^1)^2, \quad \beta\ (x^2) = {}^1/_2\, \alpha_0\, (x^2)^2, \quad g = \{{}^1/_2\alpha_0\, [(x^1)^2 + (x^2)^2]\}^{-1} \tag{2.8}$$

Формула (2.8) для g с точностью до постоянного множителя совпадает с (1.5). Таким образом, это решение является единственным решением с метрикой, определяемой выражением вида (2.6).

3°. Пусть теперь детерминант метрического тензора задается формулой

$$g = [\alpha\ (x^2) + \beta\ (x^1)\gamma\ (x^2)]^{-1} \tag{2.9}$$

Используя (2.2), (2.3), получаем

$$\beta''\gamma + \beta\gamma'' = 4F - \alpha''$$
$$(\alpha + \beta\gamma)(\beta''\gamma + \beta\gamma'' + \alpha'') = \beta'^2\gamma^2 + (\alpha' + \beta\gamma')^2 \tag{2.10}$$

Из первого уравнения (2.10) сразу следует, что $\gamma'' = \pm a^2\gamma$. Оказывается, что случай, когда $\gamma'' = -a^2\gamma$, не имеет смысла. Следовательно,

$$\gamma = A \operatorname{ch} ax^2 + B \operatorname{sh} ax^2, \qquad \beta = C \cos ax^1 + D \sin ax^1 + E / a^2 \tag{2.11}$$

$$(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ a = \text{const})$$

Подставляя (2.11) во второе уравнение (2.10), приходим к единственно возможному решению

$$\alpha(x^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \exp(2ax^2) - \exp(ax^2), \qquad \gamma(x^2) = \exp(ax^2)$$
$$\beta(x^1) = C\cos ax^1 + D\sin ax^1 + 1, \qquad C^2 + D^2 = 4\alpha_0\alpha_1$$

Окончательно получаем

$$g = [\alpha_0 + \alpha_1 \exp(2ax^2) + A\cos(ax^1 + \delta)\exp(ax^2)]^{-1} \tag{2.12}$$

Система координат, приводящая к (2.12), задается выражениями (2.1) при

$$k(z) = a^{-1}(2i \ln \operatorname{sc} z + b) \tag{2.13}$$

Видно, что (2.13) с точностью до действительного множителя a^{-1} и комплексной постоянной $b = \delta + i\varkappa$ совпадает с $k(z)$, определенной формулой (1.6).

Можно показать, что для уравнений (2.2), (2.3) не существует решений с $g = [\alpha(x^1)\beta(x^2) + \gamma(x^1)\delta(x^2)]^{-1}$, отличных от выражений (2.8), (2.12), а также с $g = \alpha(x^1)\beta(x^2) + \gamma(x^1)\delta(x^2)$.

Из примеров, рассмотренных выше, видно, что условие (1.8) и условие эвклидовости пространства могут быть эффективно использованы для установления факта существования в заданном классе координатных систем однокомпонентного течения, не берущего начало с реального эмиттера.

Поступила 28 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirstein P. T., Kino G. S. Solution to the Equations of Space-Charge Flow by the Method of the Separation of Variables. J. Appl. Phys., 1958, vol. 29, No. 12.
2. Kino G. S., Harker K. J. Space-Charge Theory for Ion Beams. Electrostatic Propulsion. Academic Press, 1961, New York — London.
3. Meltzer B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space-Charge Conditions. J. Electr., 1956, vol. 2, No. 2.
4. Meltzer B. Dense Electron Beams. Brit. J. Appl. Phys., 1959, vol. 10, No. 9.
5. Gabor D. Dynamics of Electron Beams. Proc. IRE, 1945, vol. 33, No. 11.
6. Spangenberg K. Use of the Action Function to Obtain the General Differential Equations of Space Charge Flow in More Than One Dimension. J. Franklin Inst., 1941, vol. 232, No. 4.
7. Lucas A. R., Meltzer B., Stuart G. A. A General Theorem for Dense Electron Beams. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 2.
8. Meltzer B., Lucas A. R. Sufficient and Necessary Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 5.
9. Kirstein P. T. Comments on «A General Theorem for Dense Electron Beams» by A. R. Lucas, B. Meltzer, and G. A. Stuart. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 5.
10. Mueller W. M. Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electr. Contr., 1959, vol. 5, No. 6.
11. Mueller W. M. Comments on Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electr. Contr., 1960, vol. 8, No. 2.
12. Rosenblatt J. Three-Dimensional Space-Charge Flow. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 8.
13. Meltzer B. Electron Flow in Curved Paths Under Suace-Charge Conditions. Proc. Phys. Soc. B, 1949, vol. 62, No. 355.
14. Kirstein P. T. The Complex Formulation of the Equations of Two-Dimensional Space-Charge Flow. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 5.
15. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
16. Овчаров В. Т. О потенциальном движении заряженных частиц. Радиотехн. и электр., 1959, т. 4, № 10.
17. Сыровой В. А. Об однокомпонентных пучках одноименно заряженных частиц. ПМТФ, 1964, № 3.
18. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1963, № 3.