

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ
В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

В. С. Никифоровский

(Новосибирск)

Задача, рассматриваемая в статье, является продолжением работ по изучению динамического напряженного состояния упругого изотропного полупространства под воздействием поверхностной нагрузки.

Основные результаты, полученные в задаче о воздействии вертикальной сосредоточенной силы на полупространство, изложены в [1, 2]; там же приведена библиография основных работ этого направления. Однако практическое значение имеет нагрузка, распределенная по некоторой площадке. Постановка задачи, аналогичная [1, 2], но с распределенной нагрузкой на поверхности, дает возможность провести более полное исследование напряженного состояния упругого полупространства и уточнить механизм нагружения последнего.

1.1. На границе покоящегося при $t < 0$ полупространства $z \geq 0$ (фиг. 1) с параметрами Ляме λ, μ и плотностью ρ включается нестационарная распределенная, линейно возрастающая по времени (со скоростью возрастания m) нагрузка [1]

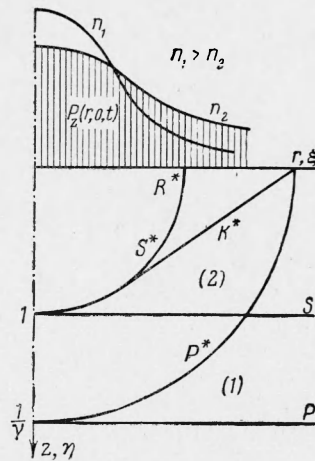
$$P_z(r, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{n^2}{(1+n^2r^2)^{3/2}} f(t), \quad f(t) = mt\varepsilon(t) \quad \left(\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \right) \quad (1.1)$$

Там же выписано решение задачи для конечных значений параметра n , но исследование его произведено только для предельного значения $n \rightarrow \infty$. Решение для возрастающего граничного сигнала по времени с постоянной скоростью нарастания, названное фундаментальным решением задачи, можно записать для распределенной нагрузки в следующем безразмерном виде

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \frac{k}{t^*} \Sigma_i'(\xi, \eta, l, \gamma) & (1.2) \\ k &= \frac{m}{2\pi\lambda_1 V_s}, \quad t^* = \frac{tV_s}{\lambda_1} \\ l &= \frac{1}{tV_s n}, \quad \lambda_1 = TV_s, \quad \xi = \frac{r}{tV_s} \\ \eta &= \frac{z}{tV_s}, \quad \gamma = \frac{V_s}{V_p} \end{aligned}$$

Величины Σ_i и Σ_i' обозначают в случае осесимметричной задачи любую из четырех компонент $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ тензора напряжений; ξ, η, l, t^* — безразмерные координаты, параметр распределенной нагрузки и время; V_p и V_s — скорости распространения продольных и поперечных волн; λ_1 — длина волны; T — длительность фазы сжатия граничного сигнала [1, 2].

Запись (1.2) показывает, что в случае распределенной нагрузки решение не обладает автомодельностью (формально зависит еще от одного



Фиг. 1

безразмерного параметра l), это приводит к необходимости рассмотрения полей напряжений в различные моменты времени.

В случае конечного n — распределенной нагрузки — волновая картина будет значительно отличаться от обычной волновой картины для сосредоточенного воздействия. На фиг. 1 изображено граничное воздействие и соответствующее ему расположение плоских волновых фронтов: P — фронт продольной волны (сжатия), S — фронт поперечной волны (сдвига); кроме этого, на фигуре указаны фронты волн P^* , S^* , K^* и R^* , соответствующие предельному значению $n \rightarrow \infty$ ($l = 0$), т. е. случаю сосредоточенного воздействия. При непрерывном переходе $l \rightarrow 0$ волновая картина непрерывным образом переходит из одной в другую; это следует из непрерывности всех теоретических соотношений.

1.2. Наиболее эффективным методом исследования характерных для задач динамической теории упругости двукратных интегралов решения, хотя и довольно громоздким, будет метод сведения к вещественным интегралам и конечному числу элементарных функций. Ниже будут представлены составляющие $\Sigma_{0R, p}$ безразмерной функции Σ'_z компоненты σ_z , отвечающие статическому, релеевскому слагаемым и вещественным интегралам. Отметим также, что разделение волновой картины на две области (1) и (2), обусловленное различной скоростью распространения волн, приводит к различному в них математическому описанию компонент напряжений. Так, если в области (1) напряжения описываются только продольным потенциалом ϕ , то в области (2) они представлены суммой двух слагаемых от продольного ϕ и поперечного ψ потенциалов

$$\Sigma_{0\phi} = -\frac{1}{R^5} \left[\frac{1-6\gamma^2+3\gamma^4}{2(1-\gamma^2)^2} \eta_1^3 + \frac{1-3\gamma^4}{2(1-\gamma^2)^2} \eta_1 \xi^2 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} l (2\eta_1^2 - \xi^2) \right] - \frac{1}{R^7} \frac{1}{1-\gamma^2} \eta_1 (2\eta_1^2 - 3\xi^2) \quad (1.3)$$

$$\Sigma_{0\phi} + \Sigma_{0\psi} = -\frac{1}{R^5} [3\eta_1^3 - l(2\eta_1^2 - \xi^2)], \quad R^2 = \eta_1^2 + \xi^2, \quad \eta_1 = \eta + l$$

$$\Sigma_{R\phi} + \Sigma_{R\psi} = \quad (1.4)$$

$$= \frac{(2-\vartheta^2)^2}{2\vartheta^3 c_0} \frac{1}{\sqrt{R_\gamma(\vartheta)}} \sin \frac{\Omega_\gamma(\vartheta)}{2} - \frac{2\sqrt{1-\vartheta^2} \sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{\vartheta^3 c_0} \frac{1}{\sqrt{R_1(\vartheta)}} \sin \frac{\Omega_1(\vartheta)}{2}$$

$$c_0 = \frac{\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{\sqrt{1-\vartheta^2}} + \gamma^2 \frac{\sqrt{1-\vartheta^2}}{\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}} - 2 + \vartheta, \quad \frac{R_\gamma^2 = A_\gamma^2 + 4\vartheta^2(\eta\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + l)^2}{A_\gamma = \vartheta^2 - \xi^2 - (\eta\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + l)^2} \quad (1.5)$$

$$\sin \left(\frac{1}{2} \Omega_\gamma \right) = -\sqrt{\frac{1}{2} (R\gamma + A\gamma) / R\gamma}$$

Отсюда при $\gamma = 1$ имеем соотношения для функций R_1 и Ω_1 .

Третье слагаемое Σ'_z , содержащее вещественные интегралы и отвечающее продольному потенциалу, имеет вид ¹

$$\Sigma_{p\phi} = \frac{8}{\pi} \int_1^{1/\gamma} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda^2 P(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{R_\gamma(\lambda)}} \sin \frac{\Omega_\gamma(\lambda)}{2} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{1/\gamma}^{\infty} \frac{(2-\lambda^2)^2}{\lambda^2 Q(\lambda)} \left[\frac{1}{\sqrt{R_\gamma^-(\lambda)}} \cos \frac{\Omega_\gamma^-(\lambda)}{2} - \frac{1}{\sqrt{R_\gamma^+(\lambda)}} \cos \frac{\Omega_\gamma^+(\lambda)}{2} \right] d\lambda \quad (1.6)$$

¹ Отметим опечатку в формулах (2.5) работы [1] для $\Sigma_{p\phi}$ — знак «минус» указан неверно, следует взять плюс; числовой расчет произведен правильно.

Здесь

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2 - \lambda^2)^4 + 16(\lambda^2 - 1)(1 - \gamma^2\lambda^2) \\ Q(\lambda) &= (2 - \lambda^2)^2 + 4\sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{\gamma^2\lambda^2 - 1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (R_\gamma^\pm)^2 &= (A_\gamma^\pm)^2 + 4l^2(\lambda \pm \eta\sqrt{\gamma^2\lambda^2 - 1})^2, \quad A_\gamma^\pm = (\lambda \pm \eta\sqrt{\gamma^2\lambda^2 - 1})^2 - \xi^2 - l^2 \\ \sin \frac{1}{2}\Omega_\gamma^\pm &= -\left(\frac{R_\gamma^\pm + A_\gamma^\pm}{2R_\gamma^\pm}\right)^{1/2}, \quad \cos \frac{1}{2}\Omega_\gamma^\pm = \left(\frac{R_\gamma^\pm - A_\gamma^\pm}{2R_\gamma^\pm}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Функции $R_\gamma(\lambda)$, $\Omega_\gamma(\lambda)$ вычисляются по формулам (1.5) с заменой ϑ на λ . Вещественные интегралы, отвечающие поперечному потенциалу

$$\begin{aligned} \Sigma_{p\varphi} &= \frac{1}{\pi} \int_1^{1/\gamma} \left\{ -\frac{4(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2\lambda^2}}{\lambda^2 P(\lambda)} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\Omega_{1^+}(\lambda)}{\sqrt{R_{1^+}(\lambda)}} + \frac{\sin \frac{1}{2}\Omega_{1^-}(\lambda)}{\sqrt{R_{1^-}(\lambda)}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{16(\lambda^2 - 1)(1 - \gamma^2\lambda^2)}{\lambda^2 P(\lambda)} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}\Omega_{1^+}(\lambda)}{\sqrt{R_{1^+}(\lambda)}} - \frac{\cos \frac{1}{2}\Omega_{1^-}(\lambda)}{\sqrt{R_{1^-}(\lambda)}} \right] \right\} d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{1/\gamma}^{\infty} \frac{4\sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{\gamma^2\lambda^2 - 1}}{\lambda^2 Q(\lambda)} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}\Omega_{1^+}(\lambda)}{\sqrt{R_{1^+}(\lambda)}} - \frac{\cos \frac{1}{2}\Omega_{1^-}(\lambda)}{\sqrt{R_{1^-}(\lambda)}} \right] d\lambda \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для вычисления $R_{1^\pm}(\lambda)$ и $\Omega_{1^\pm}(\lambda)$ следует воспользоваться (1.8), заменяя в последних γ на 1.

На оси симметрии и на границе полупространства все соотношения для компонент напряжений значительно упрощаются. Так на оси симметрии для σ_z получим

$$\begin{aligned} \frac{l^*}{k} \sigma_z &= \frac{(2 + \xi_a^2)^2}{\xi_a^2 R(\xi_a)} \varepsilon \left(\frac{1}{\gamma} - \eta \right) - \frac{4\alpha(\xi_b)\beta(\xi_b)}{\xi_b^2 R(\xi_b)} \varepsilon (1 - \eta) \\ \delta_a' &= \frac{\gamma^2 \xi_a \eta}{\alpha(\xi_a)} - 1, \quad \delta_b' = \frac{\xi_b \eta}{\beta(\xi_b)} - 1 \\ \xi_a &= \frac{l + \eta \sqrt{1 - \gamma^2 \eta^2 + \gamma^2 l^2}}{1 - \gamma^2 \eta^2}, \quad \xi_b = \frac{l + \eta \sqrt{1 - \eta^2 + l^2}}{1 - \eta^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$R(\xi) = (2 + \xi^2)^2 - 4\alpha\beta, \quad \alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \xi^2}, \quad \beta = \sqrt{1 + \xi^2}$$

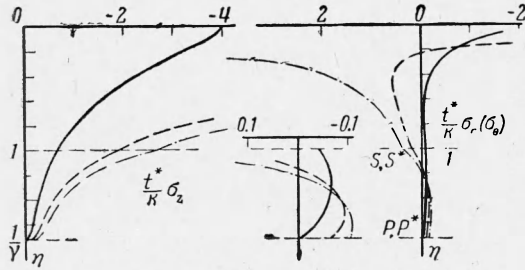
На поверхности компонента σ_z равна граничному воздействию

$$\Sigma_0 = \frac{(1/l)^2}{[1 + \xi^2/l^2]^{1/2}}, \quad \Sigma_R = \Sigma_p = 0 \quad (1.11)$$

Формулы (1.3) — (1.11) представляют собой точное решение динамической задачи воздействия распределенной нагрузки на границе упругого полупространства для σ_z -компоненты. Для остальных трех компонент поля напряжений могут быть даны аналогичные формулы. Они очень удобны для счета на цифровых вычислительных машинах и не требуют для этого специальной подготовки.

2.1. Численному исследованию подвергалось поле напряжений в среде, близкой по характеристикам к твердым горным породам ($\gamma = 1/\sqrt{3}$, $V_p = 4500$ м/сек). Рассмотрим сначала теоретические осциллограммы и изобары (линии равных значений) фундаментального решения поля напряжений.

Для того чтобы составить полное представление о напряженном состоянии полупространства, необходимо построить теоретические осциллограммы, а также картины изобар компонент тензора напряжений для различных величин безразмерного параметра l . Большие значения этого параметра соответствуют «пологим» распределениям нагрузки по границе, с уменьшением $l \rightarrow 0$ в пределе переходим к сосредоточенной силе на границе и соответствующему напряженному состоянию полупространства. Проследим этот процесс изменения поля напряжений с изменением граничного сигнала и одновременно отметим характерные черты отдельных компонент.



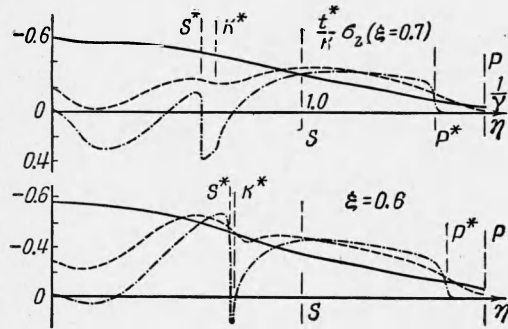
Фиг. 2

2.2. На фиг. 2 в координатах $\sigma_z(\eta)t^*/k$ показаны напряжения σ_z , $\sigma_r = \sigma_\theta$ на оси симметрии для значений параметра $l = 0.5, 0.1, 0.001$ сплошной, штриховой и штрих-пунктирной линиями соответственно. Область в окрестности оси симметрии будет областью сравнительно простого изменения возмущений, как и в случае сосредоточенного воздействия в этой области имеют значение только прямые продольная и поперечная волны. На оси симметрии напряжения σ_z , сжимающее для одноименного воздействия на границе, начинает плавно нарастать с приходом продольной волны P от нуля в зоне покоя до некоторого значения перед фронтом поперечной волны, приход последней в точку отмечается разрывом производной, слабым для «пологих» распределений (l велико); на границе σ_z совпадает со значением граничного сигнала. С уменьшением параметра l наблюдается более интенсивное изменение компоненты σ_z , появление четких фронтов. Фронты P, P^* и S, S^* на оси симметрии совпадают (фиг. 1), поэтому нет дополнительных усложнений картины, связанных с перестроением фронтов. Очень характерны в этом отношении эпюры $\sigma_z t^*/k$ по η для $\xi = 0.6, 0.7$ (фиг. 3), здесь сохранены обозначения фиг. 1 и 2. Следует отметить возникновение и развитие областей растягивающих напряжений, более интенсивное изменение компоненты, но уменьшение максимальных значений по сравнению со значениями на оси симметрии.

По эпюрам для $\xi = \text{const}$ (типа фиг. 3) могут быть построены изобары компонент напряжений. Такие изобары представлены на фиг. 4а, б, в для наиболее характерных значений параметра $l = 0.5, 0.1, 0.001$. На фигуре нанесены также плоские волновые фронты P и S ; для некоторых значений параметра l показаны для сравнения имеющие место в случае сосредоточенного воздействия сферические и конический фронты продольной и поперечных волн (P^*, S^*, K^*). Сплошными, штриховыми и штрих-пунктирными линиями обозначены соответственно изобары сжимающих, растягивающих и нулевых напряжений (сжимающая нагрузка на поверхности). На графиках даны изобары безразмерных функций $\sigma_i t^*/k$ в условных единицах, совпадающих с [1, 2].

Имея такие картины для некоторого набора параметров l , можно получить для определенной нагрузки (n зафиксировано) поля напряжений в различные моменты времени. Следует учесть, что для найденных моментов времени вся картина должна быть перестроена в соответствующих размерных координатах $z = \eta t V_s$, $r = \xi t V_s$, а величины напряжений должны быть уменьшены в t^*/k раз. По этой причине максимально возможные для зафиксированной нагрузки растягивающие напряжения могут возникать в полупространстве не в начале процесса, а в последующие за начальным моменты времени.

Из рассмотрения последовательных картин изобар следует, что со временем картина стремится к предельному случаю сосредоточенного воздействия. Это понятно, так как распределенность нагрузки по площадке вызывает местный эффект, который быстро сглаживается с переходом в отдаленные точки.

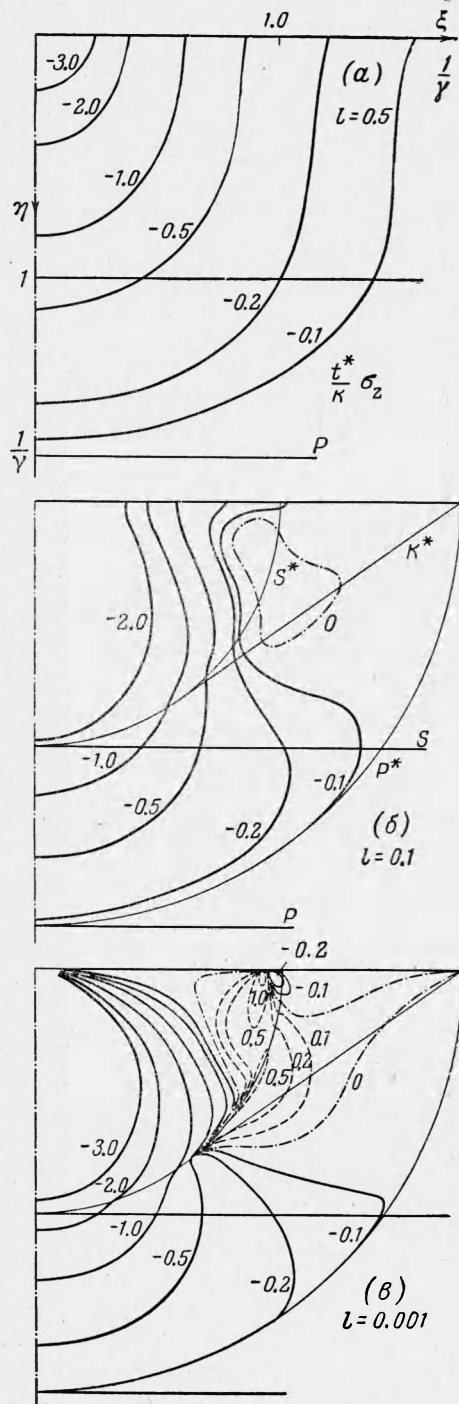


Фиг. 3

С другой стороны, для одного и того же момента времени имеется набор изобар для различных распределений нагрузок, причем картина для $l = 0.001$ уже достаточно точно совпадает с картиной¹ для сосредоточенного воздействия [2].

Решение задачи о воздействии распределенной нагрузки можно получить в рамках теории упругости путем суперпозиции решений для сосредоточенных сил [1, 2] разной интенсивности, приложенных соответствующим образом. С изменением параметра l , связанным с течением времени для определенной нагрузки $n = \text{const}$ или с рассмотрением разных нагрузок, взятых в один и тот же момент времени $t = \text{const}$, относительная интенсивность каждого отдельного источника будет изменяться с сохранением суммарной интенсивности всей системы источников. Уменьшение l , т. е. переход к сосредоточенному воздействию, тождественно такому перераспределению интенсивностей источников, при котором вклад близлежащих к оси симметрии возрастает при ослаблении вклада отдаленных источников. Этим объясняется увеличение амплитуды колебаний около оси симметрии и уменьшение вдали от нее. Кроме того, так как основной вклад возмущения для малых l приходит в исследуемую точку не с поверхности над нею, а от источников, группирующихся в окрестности оси симметрии, то замечается запаздывание прихода колебания в точку (формирование новых волновых фронтов). На картинах изобар (фиг. 4) видны появления характерных «перезитков» линий и резких градиентов в районе фронтов P^* , S^* , K^* и R^* .

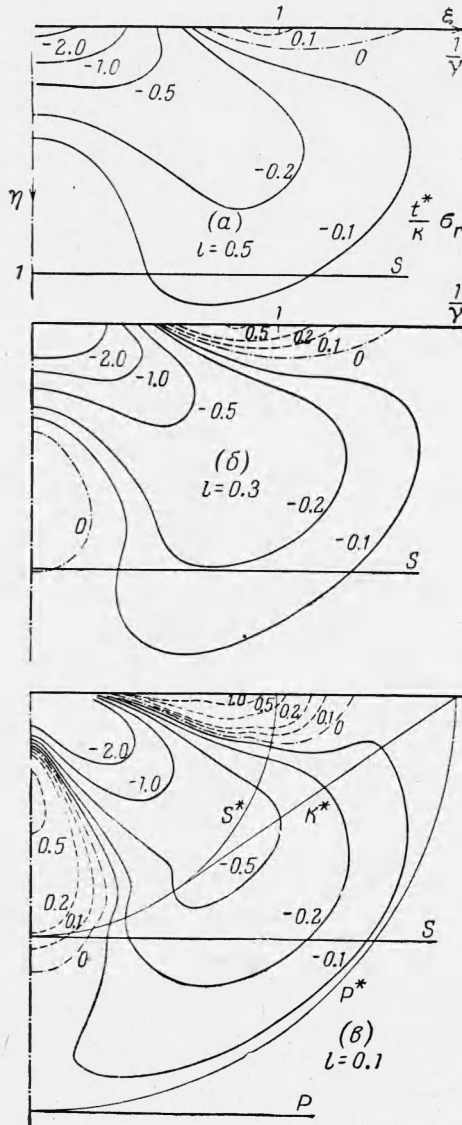
2.3. Обратимся к обсуждению изобар σ_z -компоненты тензора напряжений (фиг. 5). Радиальная компонента характеризуется отсутствием четких волновых фронтов и довольно плавным изменением на оси симметрии (фиг. 2б). Для «пологих» распределений граничной нагрузки напряжения σ_r всюду остаются сжимающими, но довольно быстро с изменением l меняют знак сигнала около поверхности (фиг. 6а), а затем и на оси симметрии. Появляются разрывы производных в районе фронтов, а позже и разрывы самих напряжений при предельном переходе $l \rightarrow 0$. Появление этих разрывов хорошо видно на фиг. 2б на оси симметрии на фронтах продольной P (разрыв напряжения) и поперечной S волн (угловая точка — разрыв производной). Напряжение на поверхности претерпевает более значительные изменения. Вообще в случае распределенной нагрузки типа (1.1) волны вдоль поверхности не распространяются, поэтому на эпюрах σ_r для «больших» значений l



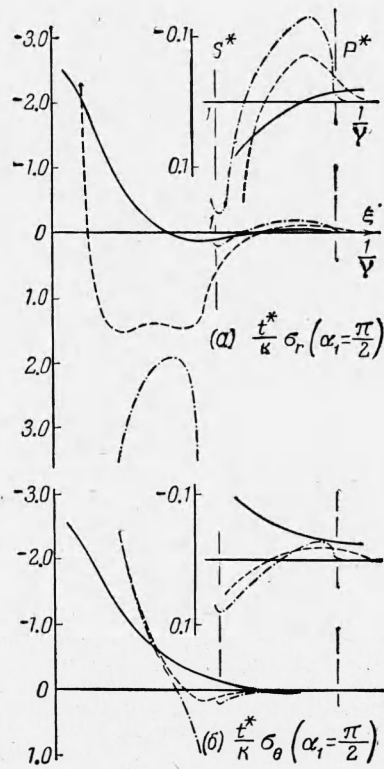
Фиг. 4

¹ В работе [2] на фиг. 1 ошибочно изображена картина изобар τ_{rz} (см. фиг. 6 там же) вместо картины изобар компоненты σ_z .

(см. эпюру σ_r для $l = 0.5$ на фиг. 6а) не наблюдается никаких следов волн. С уменьшением l можно проследить возникновение фронтов, которые имеют место в предельном случае сосредоточенного воздействия. На картинах (наиболее характерны картины для $l = 0.5, 0.3, 0.1$) изобар σ_r -компоненты (фиг. 5) хорошо видны появление и развитие двух зон растягивающих напряжений вдоль поверхности в глубине фронта поперечных S^* и K^* волн и в окрестности оси симметрии также за фронтом поперечной волны S , причем около поверхности достигаются большие максимальные значения растягивающих напряжений, чем во второй области, и на границе первой имеют место большие градиенты. Область между указанными выше двумя областями растягивающих напряжений в течение всего процесса нагружения занята значительными сжимающими напряжениями, претерпевающими резкие изменения только в окрестности сферических фронтов волн и на границе с областями растягивающих напряжений.



Фиг. 5

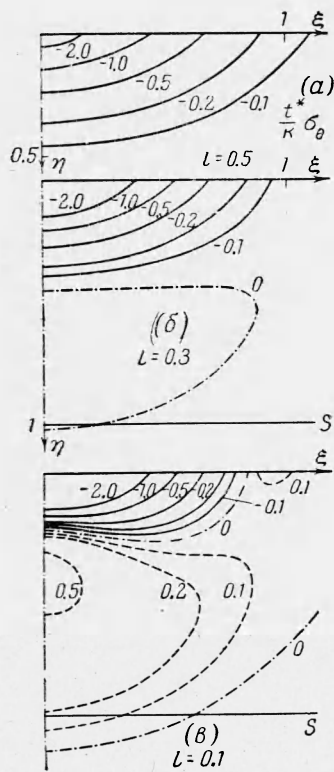


Фиг. 6

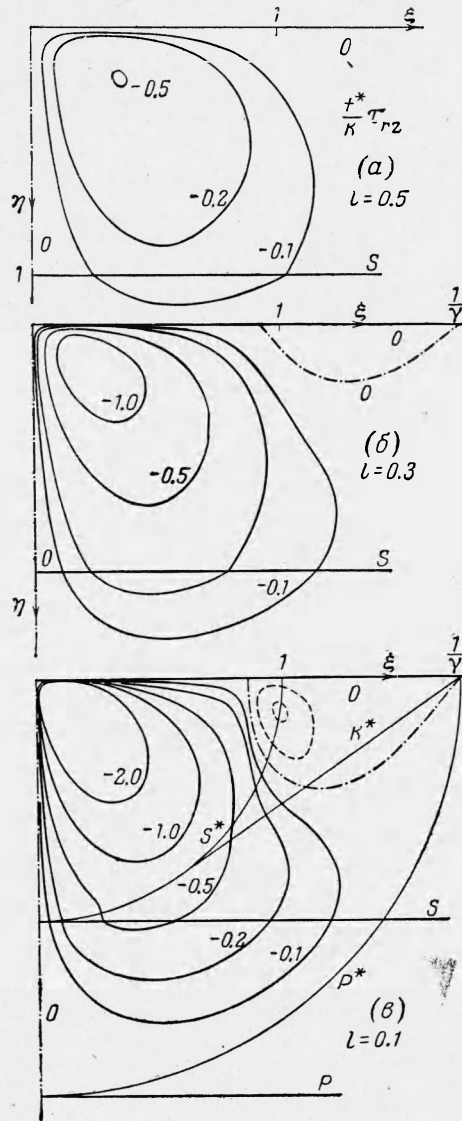
2.4. Все сказанное в предыдущем пункте об изменении компоненты σ_r на оси симметрии и ее окрестности относится к совпадающей с ней σ_θ -компоненте. Именно в этой области σ_θ в первую очередь становится растягивающим, развитие этой обширной области можно проследить на фиг. 7, где представлены изобары для значений параметра $l = 0.5, 0.3, 0.1$. С двух сторон эта область окаймляется нулевыми изобарами и областями сжимающих напряжений. Изменение σ_θ вдоль поверхности менее значительно, чем изменение σ_r (фиг. 6б), однако и здесь отчетливо видны появление растягивающих напряжений и формирование новых волновых фронтов.

Следует также отметить, что из всех нормальных напряжений σ_θ -компонента наиболее плавно меняющаяся.

2.5. Знак касательного напряжения τ_{rz} , изобары которого изображены на фиг. 8, не имеют такого значения, как знак нормальных напряжений. В этом случае нас будут в первую очередь интересовать области больших градиентов и изобары нулевых касательных напряжений, которые являются местом смены знака, а также линией, областью главных нормальных напряжений σ_z , σ_r и σ_θ . Изобары τ_{rz} представляют собой систему концентрических торов, близко подходящих к оси симметрии и поверхности, где во все время нагружения $\tau_{rz} = 0$. При уменьшении параметра $l \rightarrow 0$ около них группируется все больше изобар, создавая таким образом места значительных градиентов. Поэтому, если при больших l нормальные напряжения были главными



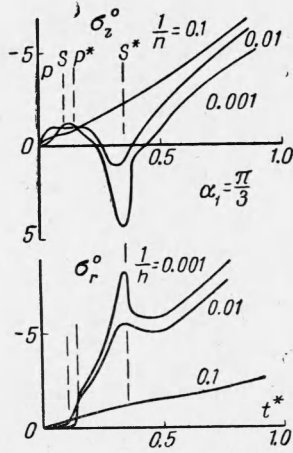
Фиг. 7



Фиг. 8

или близкими к ним в довольно обширной окрестности поверхности и оси симметрии, то со временем она все больше сужается. В этих областях элементы среды находятся в простом напряженном состоянии. Так на оси симметрии элемент все время сжат по вертикали, в радиальном же направлении с некоторого момента времени сжатие сменяется растяжением, причем растягивающие напряжения достигают сравнительно больших значений. Вдоль поверхности при незначительном сжатии по вертикали элемент среды сначала сжат в азимутальном направлении и растянут в радиальном, в последующие моменты времени, а следовательно, в более отдаленных от оси симметрии точках элемент среды сначала находится в состоянии растяжения по обоим из указанных направлений, а позже подвергается растяжению в азимутальном и сжатию в радиальном направлениях.

С некоторых моментов времени нулевые изобары и области их сгущений появляются внутри среды, опережая



Фиг. 9

несколько появление области растягивающих напряжений σ_z . Вдоль линии $\tau_{rz} = 0$, проходящей вблизи конической поперечной волны K^* , которая соответствует сосредоточенному воздействию, создаются условия для «выдавливания» элемента среды, подверженного радиальному сжатию и вертикальному растяжению при слабом азимутальном растяжении, по направлению перемещения частиц вперед от оси симметрии и вверх. В глубине фронта сферической поперечной волны S^* по обе стороны линии $\tau_{rz} = 0$ имеют место вблизи поверхности значительные сгущения изобар, кроме того, в те же моменты времени элемент среды подвергается всестороннему растяжению. Отметим, что максимальные касательные напряжения находятся вблизи точки $\alpha_1 = 40 \div 50^\circ$ ($\alpha_1 = \text{arctg } \xi / \eta$) из точки $r = z = 0$.

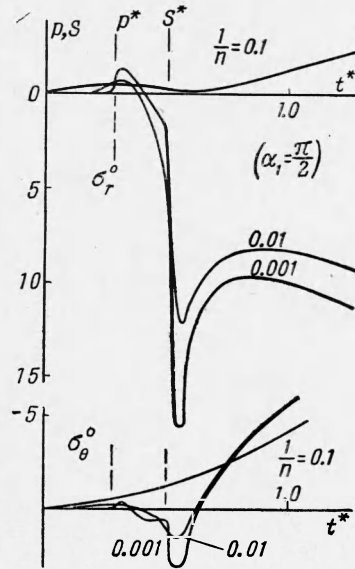
2.6. Совместное рассмотрение изобар всех компонент тензора напряжений (фиг. 4, 5, 7, 8) дает нам следующие сведения о механизме нагружения упругого полупространства при воздействии на него распределенной нагрузки. В первые моменты времени нагруженная часть полупространства сжата, нет зон, областей растягивающих напряжений. Затем на разных компонентах в разные моменты времени и сначала на компоненте σ_r (фиг. 5а) появляется вблизи поверхности незначительная зона растягивающих напряжений. Вместе с развитием этой первой области появляется область на компонентах σ_r и σ_θ на оси симметрии в глубине фронта поперечной волны (фиг. 5б, 7б) и одновременно появляется область смены, знака касательного напряжения (фиг. 8б). Позже всего зона растягивающих напряжений появляется на σ_z -компоненте (см. фиг. 5б). На σ_θ -компоненте область растягивающих напряжений распространяется по направлению к поверхности, в самый последний момент около поверхности также возникает аналогичная область, они смыкаются, образуя одну общую область (фиг. 7е). На остальных компонентах возникшие области так и остаются, детализируются, возрастают по величине и абсолютным значениям напряжений. Вся картина стремится к предельному случаю сосредоточенного воздействия.

Рассматривая подобную картину напряжений в условиях хрупкой среды, можно сделать следующие предположения о разрушении последней. Обратим главное внимание на появление и развитие областей растягивающих напряжений. В связи с этим следует в первую очередь ожидать появление кольцевых «трещин» на поверхности, в дальнейшем — также кольцевых трещин, распространяющихся вглубь вдоль оси симметрии, затем беспорядочное растрескивание и появление радиальных трещин на поверхности и, наконец, откол и «выдавливание» элементов среды по нулевым изобарам касательных напряжений с образованием «воронок» разрушения, близких к коническим с характерными «плато».

3.1. Решение для произвольного воздействия получим интегрированием фундаментального решения при помощи интеграла Дюамеля

$$\Sigma_f = [f(0) \delta(t - t_0) + f'(0) \varepsilon(t - t_0)] \Sigma_m + \int_{t_0}^t f''(t - \tau) \Sigma_m d\tau \quad (3.4)$$

где $\Sigma_m(r, z, t)$ и $\Sigma_f(r, z, t)$ — фундаментальное решение задачи и искомое решение для произвольного изменения во времени граничного сигнала $f(t)$; $\delta(t)$ и $\varepsilon(t)$ — дельта-функция Дирака и единичная функция Хевисайда; t_0 — момент прихода возмущения в рассматриваемую точку.



Фиг. 10

В случае достаточно гладких граничных воздействий ($f(0) = f'(0) = 0$) первые два слагаемых отсутствуют, вместе с тем будут отсутствовать и разрывы на фронтах. Полупериод функции

$$f(t) = A \sin^2 \beta_1 t V_s \quad (3.2)$$

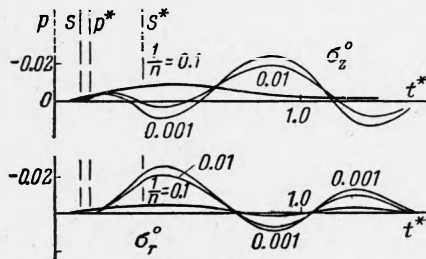
представляет собой симметричный купол (см. [1], линия 1, фиг. 4), хорошо аппроксимирующий нагрузку ударного типа. Выбираем β_1 так, чтобы длительность полупериода — фазы сжатия — $T = 10^{-4}$ сек. Имея в виду качественные результаты, оставим коэффициент A произвольным.

Фундаментальное решение Σ_m должно быть подготовлено для интегрирования следующим образом. Выбираем точку исследования (r, z) и для нее рассчитываем в каждый момент времени t безразмерный параметр l и координаты ξ, η ; этого достаточно для определения напряжений по изложенным выше формулам для σ_z и аналогичным формулам для остальных компонент. Каждая картина изобар может дать только одну точку эпюры фундаментального решения.

На фиг. 9, 10 даны

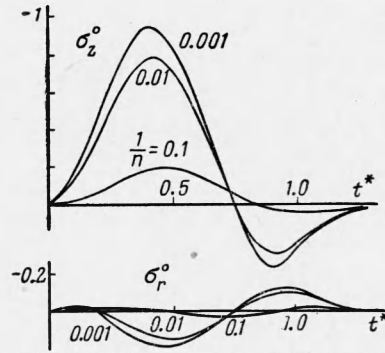
$$\sigma_z^\circ = \sigma_z / k\lambda_1, \quad \sigma_r^\circ = \sigma_r / k\lambda_1, \quad \sigma_\theta^\circ = \sigma_\theta / k\lambda_1 \quad (\sqrt{r^2+z^2} = 1 / 2\lambda_1)$$

для точек среды на луче $\alpha_1 = 60^\circ$ и на поверхности на расстоянии полдлины волны от точки $r = z = 0$. Эти точки будут наиболее характерными точками поля напряжений, а эпюры обладают описанными особенностями. Возрастание напряжений почти линейное при больших t^* объясняется линейным нарастанием граничного сигнала.



Фиг. 12

вами производных, но и самих напряжений на волновых фронтах. Это свойство среды «дифференцировать» граничный сигнал в прифронтных областях отмечалось ранее [1] и является, по-видимому, причиной возникновения растягивающих напряжений в среде только при смене нагрузки разгрузкой (производная меняет знак) и отсутствии растягивающих напряжений в граничном воздействии. Фиг. 11, 12, на которых изображены величины $\sigma_z^\circ = \sigma_z / k\lambda_1 \ddot{f}_{\max}$ и $\sigma_r^\circ = \sigma_r / k\lambda_1 \ddot{f}_{\max}$, дают представление об изменении напряжений в точках оси симметрии и луча $\alpha_1 = 60^\circ$, отстоящих от начала координат на расстоянии полдлины волны. Следует еще раз отметить важный факт появления значительных растягивающих напряжений. Для «пологих» распределений имеют место слабые колебания среды, последние с переходом $l \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) усиливаются и достигают наибольших значений в предельном случае сосредоточенного воздействия. Остальные качественные особенности были описаны ранее [1].



Фиг. 11

3.2. При распределенной нагрузке на границе в полупространстве получается сложная картина: отметим возникновение растягивающих напряжений уже на участке нарастания граничного воздействия. В случае изменения знака граничного воздействия в результатах следует взять противоположные знаки, по этой причине можно наблюдать в среде перераспределение зон, возникновение новых областей растягивающих напряжений. Важен факт формирования четких фронтов не только с разрывами

Поступила 2 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоровский В. С. Исследование динамического поля напряжений в упругом полупространстве в окрестности точки приложения поверхностной нагрузки. ПМТФ, 1962, № 2.
2. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Изобары компонент тензора напряжений в упругом полупространстве при сосредоточенном вертикальном динамическом воздействии на поверхности. ПМТФ, 1962, № 3.