

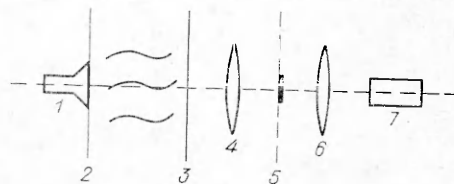
О ВОССТАНОВЛЕНИИ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО ВРЕМЕННЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ СИГНАЛА ТЕНЕВОГО ПРИБОРА

Ю. И. Копилевич

(Ленинград)

При исследовании турбулентности с помощью теневого прибора с фотоэлектрической регистрацией статистические характеристики снимаемого с прибора сигнала используются для получения информации о статистике исследуемой среды [1, 2]. В ситуациях, когда исследуемая среда движется относительно прибора перпендикулярно его оси (например, при экспериментах в гидро- и аэродинамических трубах), удобно использовать временные характеристики сигнала. В данной работе исследуется связь временной корреляционной функции и частотного спектра сигнала теневого прибора с энергетическим спектром оптических неоднородностей в среде; указывается метод восстановления спектра неоднородностей по корреляционной функции или временному спектру сигнала.

1. Связь временной корреляционной функции сигнала с четвертым моментом светового поля. Общая схема теневого прибора приведена на фигуре. Когерентный монохроматический световой пучок от осветителя 1 проходит слой исследуемой среды толщиной L , расположенный между плоскостями 2 и 3, и отображается линзой 4 на ее фокальную плоскость 5. В плоскости 5 (теневого плоскости) расположена теньевая диафрагма; прошедший теньевую плоскость свет собирается линзой 6 на фотоэлектронный умножитель 7. В дальнейшем под «сигналом прибора» будет пониматься интенсивность света, падающего на ФЭУ (а не ток ФЭУ).



Введем декартовы координаты x, y, z так, чтобы ось z была направлена вдоль оси распространения света; плоскости 2 соответствует $z = 0$, плоскости 3 — $z = L$. Пусть $u(x, y, L, t) \equiv u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x, y)$ — случайное распределение поля на плоскости 3 в момент времени t . Тогда мгновенное значение сигнала прибора $E(t)$ есть [3]

$$(1.1) \quad E(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 \int d\mathbf{x} u(\mathbf{x}_1, t) \bar{u}(\mathbf{x}_2, t) e^{i\mathbf{x}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \chi(\mathbf{x}),$$

где координаты $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ на плоскости 5 связаны с координатами $\mathbf{x} = (x, y)$ соотношением $\mathbf{x} = (2\pi/\lambda f)\mathbf{x}$ (λ — длина волны света, f — фокусное расстояние линзы); $\chi(\mathbf{x})$ — функция пропускания по интенсивности теневого диафрагмы. Для корреляционной функции отклонений величины сигнала прибора от его среднего значения

$$K(t_1, t_2) \equiv \langle (E(t_1) - \langle E(t_1) \rangle)(E(t_2) - \langle E(t_2) \rangle) \rangle$$

(угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций случайной среды) из (1.1) получим

$$(1.2) \quad K(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 \int dx_4 \int d\kappa_1 \int d\kappa_2 \chi(\kappa_1) \chi(\kappa_2) \times \\ \times e^{i\kappa_1(x_1-x_2)} e^{i\kappa_2(x_3-x_4)} \hat{\Gamma}(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2),$$

где

$\hat{\Gamma}(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2) \equiv \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2) - \Gamma(x_1, x_2; t_1)\Gamma(x_3, x_4; t_2);$
 $\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2) \equiv \langle u(x_1, t_1)\bar{u}(x_2, t_1)u(x_3, t_2)\bar{u}(x_4, t_2) \rangle$ — четвертый двухвременной момент поля u на плоскости $z = L$; $\Gamma(x_m, x_n; t) \equiv \langle u(x_m, t)\bar{u}(x_n, t) \rangle$ — второй одновременной момент. Величину $\hat{\Gamma}(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2)$ будем называть центрированным двухвременным четвертым моментом поля u на плоскости $z = L$.

Случайное поле оптических неоднородностей в среде будем предполагать стационарным; при этом одновременные моменты не зависят от времени, а двухвременные зависят только от модуля разности своих временных аргументов

$$\Gamma(x_1, x_2; t_1) \equiv \Gamma(x_1, x_2), \quad \Gamma(x_3, x_4; t_2) \equiv \Gamma(x_3, x_4),$$

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2) \equiv \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4; \tau),$$

$$\hat{\Gamma}(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2) \equiv \hat{\Gamma}(x_1, x_2, x_3, x_4; \tau), \quad K(t_1, t_2) \equiv K(\tau),$$

где $\tau = |t_1 - t_2|$.

2. Вычисление центрированного двухвременного четвертого момента светового поля. Используем следующие предположения о случайной среде. Поле диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, будем считать стационарным, статистически однородным и изотропным. Флуктуации диэлектрической проницаемости предполагаются малыми

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \langle \epsilon \rangle (1 + \epsilon'(\mathbf{r}, t)), \quad |\epsilon'(\mathbf{r}, t)| \ll 1,$$

$\langle \epsilon \rangle$ — среднее значение диэлектрической проницаемости — не зависит от координат и времени в силу принятых предположений.

Поле $u_0(\mathbf{x})$ на плоскости Z зададим в виде

$$u_0(\mathbf{x}) = A \exp \{-x^2/2a^2\},$$

где a — эффективный радиус пучка; A — амплитуда на оси пучка.

Будем пользоваться также обычными предположениями

$$l \gg \lambda, \quad a \gg \lambda, \quad l \ll L,$$

где l — размер наименьших неоднородностей в среде. Воспользуемся результатами, полученными в работе [4]. Видно, что интересующее нас выражение для центрированного двухвременного четвертого момента светового поля на плоскости Z может быть получено из формулы для центрированного одновременного четвертого момента [4] заменой двумерного спектра турбулентности $\Phi(\boldsymbol{\eta})$ на двумерное преобразование Фурье $\Phi_1(\boldsymbol{\eta}; \tau)$ временной корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$\sigma_1(\mathbf{r}; \tau) \equiv \epsilon'(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}, t + \tau)\epsilon'(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle:$$

$$(2.4) \quad \Phi_1(\boldsymbol{\eta}; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\mathbf{r}; \tau) e^{i(\eta_x x + \eta_y y)} dx dy dz.$$

Таким образом, получаем

$$(2.2) \quad \hat{\Gamma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; \tau) = \Gamma_{1001} + \Gamma_{0110} + \Gamma_{1010} + \Gamma_{0101} + O(\varepsilon'^3),$$

$$\Gamma_{lmnp} \equiv \langle V_l(\mathbf{x}_1, t) \bar{V}_m(\mathbf{x}_2, t) V_n(\mathbf{x}_3, t + \tau) \bar{V}_p(\mathbf{x}_4, t + \tau) \rangle,$$

где $V_i(\mathbf{x}, t)$ — i -й член борновского разложения поля $u(\mathbf{x}, t)$ на плоскостях \mathcal{S} [5];

$$(2.3) \quad \Gamma_{1001} = \Gamma_{0000} \frac{k^2}{4} \int_0^L dp \int d\eta \Phi_1(\eta; \tau) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\eta^2 \frac{(L-p)^2}{k^2 a^2 |B(L)|^2} + i\beta(p) \mathbf{x}_1 \cdot \eta - i\bar{\beta}(p) \mathbf{x}_4 \cdot \eta \right\};$$

$$(2.4) \quad \Gamma_{1010} = -\Gamma_{0000} \frac{k^2}{4} \int_0^L dp \int d\eta \Phi_1(\eta; \tau) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\eta^2 \frac{(L-p)^2}{k^2 a^2 |B(L)|^2} - i\eta^2 \left(1 + \frac{pL}{k^2 a^4} \right) \frac{L-p}{k |B(L)|^2} + \right.$$

$$\left. + i\beta(p) \mathbf{x}_1 \cdot \eta - i\beta(p) \mathbf{x}_3 \cdot \eta \right\},$$

Γ_{0110} и Γ_{0101} получаются из Γ_{1001} и Γ_{1010} соответственно операцией комплексного сопряжения и перестановкой \mathbf{x}_1 с \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 с \mathbf{x}_4 . В (2.3), (2.4) сохранены обозначения работы [4]:

$$B(z) \equiv 1 + iz/ka^2, \quad \beta(p) \equiv B(p)/B(L).$$

3. Корреляционная функция и частотный спектр сигнала теневого прибора. Подставляя (2.3), (2.4) в (2.2), получим четвертый момент $\hat{\Gamma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; \tau)$. Теперь из (1.2) имеем

$$(3.1) \quad K(\tau) = k^2 A^4 a^8 \int d\eta \Phi_1(\eta; \tau) P(\eta),$$

где

$$(3.2) \quad P(\eta) = \frac{1}{4} e^{-a^2 \eta^2} \int_0^L dp |\Psi(\eta, p) - \bar{\Psi}(-\eta, p)|^2,$$

$$\Psi(\eta, p) = e^{-\frac{i p \eta^2}{2k}} \int \chi(\mathbf{x}) e^{-a^2 \mathbf{x}^2} \exp \left\{ -a^2 \left(1 + i \frac{p}{ka^2} \right) \eta \mathbf{x} \right\} d\mathbf{x}.$$

Найдем связь $\Phi_1(\eta; \tau)$ с двумерным спектром турбулентности $\Phi(\eta) \equiv \Phi_1(\eta; 0)$ в предположении гипотезы «замороженной турбулентности» [6]. В этом случае

$$\sigma_1(\mathbf{r}; \tau) \equiv \langle \varepsilon'(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}, t + \tau) \varepsilon'(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle = \langle \varepsilon'(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau, t) \varepsilon'(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle =$$

$$= \sigma_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau; 0)$$

и из (2.1) следует

$$(3.3) \quad \Phi_1(\eta; \tau) = e^{i\eta \mathbf{v}\tau} \Phi(\eta),$$

где использована ортогональность \mathbf{v} к оси z . Подставив (3.3) в (3.1), получим

$$(3.4) \quad K(\tau) = k^2 A^4 a^8 \int \Phi(\eta) P(\eta) e^{i\eta \mathbf{v}\tau} d\eta.$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда функция пропускания теневой диафрагмы $\chi(\kappa)$ зависит только от модуля κ : $\chi(\kappa) \equiv \chi(\kappa)$. При этом из (3.2) следует, что функция $P(\eta)$ тоже не зависит от угла: $P(\eta) \equiv P(\eta)$. В силу предположения об изотропности поля неоднородностей спектр Φ является функцией только модуля η , т. е. $\Phi(\eta) \equiv \Phi(\eta)$, и в (3.4) можно проинтегрировать по углам. Таким образом, получим

$$(3.5) \quad K(\tau) = 2\pi k^2 A^4 a^8 \int_0^\infty \Phi(\eta) P(\eta) J_0(\eta v \tau) \eta d\eta,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого индекса.

Выражение (3.5) есть преобразование Ганкеля нулевого порядка [7] от функции $2\pi k^2 A^4 a^8 \Phi(\eta) P(\eta)$. Заметим, что двумерный спектр $\Phi(\eta)$ связан с трехмерным преобразованием Фурье корреляционной функции $F(\eta)$ соотношением $\Phi(\eta) = 2\pi F(\eta)$.

Для частотного спектра $S(v)$ сигнала теневого прибора

$$S'_i(v) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{iv\tau} d\tau$$

из (3.5) следует выражение

$$(3.6) \quad S(v) = \frac{2k^2 A^4 a^8}{v} \int_{v/v}^{\infty} \Phi(\eta) P(\eta) \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \frac{v^2}{v^2}}} d\eta,$$

являющееся преобразованием Абеля [7] функции $(2k^2 A^4 a^8/v)\Phi(\eta)P(\eta)$. Для интегральных преобразований (3.5), (3.6) существуют формулы обращения

$$(3.7) \quad \Phi(\eta) = v^2 [2\pi k^2 A^4 a^8 P(\eta)]^{-1} \int_0^\infty K(\tau) J_0(\eta v \tau) \tau d\tau;$$

$$(3.8) \quad \Phi(\eta) = [v^2 [\pi k^2 A^4 a^8 P(\eta)]^{-1} \int_0^\infty \frac{S'(v)}{\sqrt{v^2 - \eta^2 v^2}} dv.$$

Выражения (3.7), (3.8) дают формальное решение задачи восстановления спектра турбулентности, однако некорректность интегральных уравнений (3.5), (3.6) требует для действительного решения задачи применения того или иного метода регуляризации [8, 9].

Заметим, что в проблеме восстановления существенную роль играет аппаратная функция $P(\eta)$. Рассмотрим в качестве примера случай «гауссовской» теневой диафрагмы

$$\chi(\kappa) = 1 - e^{-a^2 \kappa^2}.$$

Функция $P(\eta)$ в (3.5), (3.6) для такой диафрагмы при выполнении условий

$$(L\lambda/l^2)^2 \ll 1, \quad (L\lambda/al)^2 \ll 1$$

равна

$$P(\eta) = \frac{\pi^3}{96} \frac{L^3}{k^2 a^4} \exp\left(-\frac{3}{4} a^2 \eta^2\right) \eta^4.$$

Весовая функция $P(\eta)\eta$ имеет максимум при $\eta_* = (\sqrt{10/3})a^{-1} \simeq 1,8a^{-1}$, об остроте которого можно судить по «полуширине» Δ

$$\Delta = \frac{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{3}{4} a^2 \eta^2\right) \eta^5 d\eta}{\exp\left(-\frac{3}{4} a^2 \eta_*^2\right) \eta_*^5} \simeq 1,4 a^{-1}.$$

Ясно, что часть спектра неоднородностей, лежащая вне интервала $(\eta_* - \Delta, \eta_* + \Delta)$, не оказывает практически влияния на функции $K(\tau)$ и $S(\nu)$, поэтому восстановление этой части спектра невозможно. Следовательно, параметры теневого прибора (эффективный радиус пучка) следует выбирать в зависимости от области спектральных чисел, в которой желательно установить вид энергетического спектра турбулентности.

Поступила 29 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Стасенко В. Н. Применение теневого прибора для определения характеристик турбулентности. — ПМТФ, 1970, № 3.
2. Стефанов С. Р., Трохан А. М., Чашечкин Ю. Д. Об исследовании турбулентных пульсаций коэффициента преломления воды тепловым прибором. — ПМТФ, 1971, № 5.
3. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М., «Наука», 1971.
4. Кошлевич Ю. П. Связь характеристик сигнала теневого прибора со спектром турбулентности. — ПМТФ, 1975, № 6.
5. Но Т. L. Coherence degradation of gaussian beams in a turbulent atmosphere. — «J. Optic. Soc. Amer.», 1970, vol. 60, N 5.
6. Татарский В. Н. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1974.
8. Гурвич А. С., Тиме И. С., Туровцев Л. С., Турчин В. Ф. Восстановление спектра пульсаций температуры в атмосфере из оптических измерений. — «Изв. АН СССР. Сер. ФАО», 1974, № 5.
9. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач. — «Усп. физ. наук», 1970, № 3.

УДК 534.833.53

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

А. И. Мартьянов

(Горький)

При исследовании процессов рассеяния ультразвука на турбулентных струях с целью бесконтактной диагностики течения необходимо учитывать влияние находящихся в струе газовых пузырьков различного размера. Определенный интерес представляет также и вопрос об эволюции функции распределения пузырьков в потоке.