УДК 519.6

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ

И. И. Аргатов

Государственная морская академия им. С. О. Макарова, 199026 Санкт-Петербург
E-mail: argatov@home.ru

Рассмотрена сингулярно возмущенная статическая задача оптимального управления деформированием упругой мембраны с помощью внешних нагрузок (управление без ограничений), приложенных на нескольких удаленных друг от друга малых площадках. Целевой функционал равен сумме квадрата среднеквадратичной погрешности аппроксимации и квадрата нормы внешней нагрузки. Для построения асимптотических моделей применяется метод сращиваемых асимптотических разложений.

Ключевые слова: упругая мембрана, управление квазиточечными воздействиями, асимптотические модели.

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в отличие от упругой пластины (в рамках теории Кирхгофа) упругая мембрана не воспринимает сосредоточенную нагрузку, т. е. функция прогиба мембраны в окрестности точки приложения сосредоточенной силы имеет логарифмическую особенность и в этой точке перемещение теоретически бесконечно. Однако, если внешнюю нагрузку распределить по малой площадке, то можно говорить о квазиточечных воздействиях и рассматривать соответствующие приближенные математические модели. В данной работе строятся асимптотические модели оптимального управления деформированием упругой мембраны квазиточечными воздействиями.

В работе [1] исследована задача управления внешними нагрузками для пологой оболочки с трещиной в случае, когда целевой функционал характеризует раскрытие трещины. Ряд задач оптимального управления для упругих пластин рассмотрен в [2]. В работе [3] изучена задача оптимального управления без ограничений для упругой мембраны в случае, когда целевой функционал представляет собой сумму квадрата среднеквадратичной погрешности аппроксимации и квадрата нормы управляющих внешних нагрузок. В [4] выполнен асимптотический анализ деформирования упругой мембраны над системой нескольких малых цилиндрических опор, когда на мембрану передаются сингулярные реакции опор произвольных поперечных сечений, сосредоточенные на их острых кромках.

В данной работе строится формальная асимптотика решения задачи оптимального управления [3] в случае приложения управляющих внешних нагрузок на нескольких малых площадках, удаленных друг от друга и от контура мембраны. Рассмотрена задача дискретного оптимального управления в предположении, что управляющие нагрузки распределены равномерно. При этом целевой функционал берется в форме, отличной от [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий РФ (грант № МД-182.2003.01).

Исследована задача оптимального управления деформированием упругой мембраны с помощью нескольких шаровых штампов. В этой задаче размеры и расположение малых площадок, по которым нагрузка передается от штампов на мембрану, заранее неизвестны.

## 1. УПРАВЛЕНИЕ КВАЗИТОЧЕЧНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

**1.1. Постановка задачи.** Пусть $\Omega$ — ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$. Внутри области $\Omega$ выберем точки $P^1,\dots,P^N$ с координатами $(x_1^j,x_2^j)$, $j=1,\dots,N$. Наименьшее расстояние между точками $P^j$ и $P^k$ при $k\ne j$ обозначим через $d$. Будем считать, что данные точки удалены от контура $\Gamma$ на расстояния, не меньшие, чем $d$. Пусть также $\omega^j$ — односвязная область на плоскости, содержащая начало координат и заключенная в круге диаметром $d$. Обозначим через $\varepsilon$ малый положительный параметр и положим
$$\omega_\varepsilon^j=\{x=(x_1,x_2)\colon \varepsilon^{-1}(x-x^j)\in\omega^j\}.$$
Через $\chi_\varepsilon^j(x)$ обозначим характеристическую функцию области $\omega_\varepsilon^j$, т. е. $\chi_\varepsilon^j(x)=1$, если $x\in\omega_\varepsilon^j$, и $\chi_\varepsilon^j(x)=0$, если $x\notin\omega_\varepsilon^j$.

Предположим, что упругая мембрана с равномерным натяжением $T$ занимает область $\Omega$ и закреплена по контуру $\Gamma$. Рассмотрим задачу о ее деформации под действием равномерного поверхностного давления с плотностями $q_1,\dots,q_N$, распределенного по малым площадкам $\omega_\varepsilon^1,\dots,\omega_\varepsilon^N$:
$$-T\Delta_x u(x)=\sum_{j=1}^N\chi_\varepsilon^j(x)q_j,\qquad x\in\Omega;\tag{1.1}$$
$$u(x)=0,\qquad x\in\Gamma.\tag{1.2}$$
Обозначим через $Q_j$ равнодействующую давления $q_j$, приложенного к площадке $\omega_\varepsilon^j$:
$$Q_j=\iint\limits_{\omega_\varepsilon^j}q_j\,dx_1\,dx_2.\tag{1.3}$$
В случае равномерной нагрузки имеем
$$Q_j=q_j|\omega_\varepsilon^j|.\tag{1.4}$$

Рассмотрим задачу об определении оптимальной нагрузки из условия минимума целевого функционала
$$I(Q_1,\dots,Q_N)=\frac12\sum_{j=1}^N\big(\bar u(P^j)-u_0^j\big)^2+\alpha_jT^{-2}Q_j^2.\tag{1.5}$$
В (1.4), (1.5) $u_0^j$ и $0<\alpha_j$ — заданные постоянные ($j=1,\dots,N$); $|\omega_\varepsilon^j|=\varepsilon^2|\omega^j|$ — площадь области $\omega_\varepsilon^j$; $\bar u(P^j)$ — среднее значение перемещения на площадке $\omega_\varepsilon^j$ с центром в точке $P^j$:
$$\bar u(P^j)=\frac{1}{|\omega_\varepsilon^j|}\iint\limits_{\omega_\varepsilon^j}u(x)\,dx.\tag{1.6}$$

Замечание. Нормировка во втором слагаемом суммы (1.5) выбрана так, что постоянная $\alpha_j$ (параметр штрафа) является безразмерной величиной. В то же время запасаемую мембраной упругую энергию
$$J(u)=\frac12\sum_{j=1}^N\iint\limits_{\omega_\varepsilon^j}q_ju(x)\,dx$$

в силу соотношений (1.4) и (1.6) можно представить в виде

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}Q_j\bar{u}(P^j).$$

Тем самым величины $Q_j$ и $\bar{u}(P^j)$ $(j=1,\dots,N)$ можно трактовать как обобщенные силы и соответствующие обобщенные перемещения.

Иными словами, минимизация функционала (1.5) по отношению к величинам $Q_1,\dots,Q_N$ означает выполнение приближенных равенств $\bar{u}(P^j)\approx u_0^j$ $(j=1,\dots,N)$ с наименьшими возможными квазиточечными воздействиями с плотностями $|\omega_\varepsilon^j|^{-1}Q_j$, распределенными по площадкам $\omega_\varepsilon^j$ $(j=1,\dots,N)$.

**1.2. Построение асимптотики.** Методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [4–6]) построим главные члены внешнего (на удалении от точек $P^1,\dots,P^N$) и внутренних (вблизи площадок $\omega_\varepsilon^1,\dots,\omega_\varepsilon^N$) асимптотических разложений решения $u(x)$ задачи (1.1), (1.2) в случае (см. формулу (1.4))

$$q_j=|\omega_\varepsilon^j|^{-1}Q_j \tag{1.7}$$

(величины $Q_j$ $(j=1,\dots,N)$ не зависят от параметра $\varepsilon$).

Переходя в соотношениях (1.1), (1.2) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем первую предельную задачу

$$\Delta_x v(x)=0,\quad x\in\Omega\setminus\{P^1,\dots,P^N\},\qquad v(x)=0,\quad x\in\Gamma. \tag{1.8}$$

Решение задачи (1.8) будем искать в виде

$$v(x)=c_1G_1(x)+\ldots+c_NG_N(x). \tag{1.9}$$

Здесь $c_1,\dots,c_N$ — некоторые постоянные; $G_j(x)$ — функция Грина задачи Дирихле с полюсом в точке $P^j$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{gathered}\Delta_x G_j(x)=0,\quad x\in\Omega\setminus P^j,\qquad G_j(x)=0,\quad x\in\Gamma,\\ G_j(x)=-(2\pi)^{-1}\ln|x-P^j|+O(1),\qquad x\to P^j.\end{gathered} \tag{1.10}$$

В дальнейшем потребуется следующая асимптотическая формула, уточняющая вторую формулу в (1.10):

$$G_j(x)=-(2\pi)^{-1}\ln\left(|x-P^j|/r_0^j\right)+O(1),\qquad x\to P^j \tag{1.11}$$

($r_0^j$ — внутренний гармонический радиус области $\Omega$ относительно точки $P^j$).

Для построения внутреннего асимптотического представления $w^j(\xi^j)$ перейдем в окрестности площадки $\omega_\varepsilon^j$ к “растянутым” координатам:

$$\xi^j=\varepsilon^{-1}(x-P^j). \tag{1.12}$$

С учетом соотношений $\Delta_x=\varepsilon^{-2}\Delta_\xi$, $|\omega_\varepsilon^j|=\varepsilon^2|\omega^j|$ и зависимости (1.7) из уравнения (1.1) получаем

$$-T\Delta_\xi w^j(\xi)=\chi^j(\xi)|\omega^j|^{-1}Q_j,\qquad \xi\in\mathbb{R}^2. \tag{1.13}$$

Здесь $\chi^j(\xi)$ — характеристическая функция области $\omega^j$.

Для уравнения (1.13) ставится асимптотическое условие на бесконечности, получаемое в результате сращивания внутреннего $w^j(\xi^j)$ и внешнего $v(x)$ асимптотических представлений на основании асимптотической формулы (1.11):

$$w^j(\xi)=-\frac{c_j}{2\pi}\ln\frac{\varepsilon|\xi^j|}{r_0^j}+\sum_{k\neq j}c_kG_k(P^j)+o(1),\qquad |\xi^j|\to\infty. \tag{1.14}$$

С помощью логарифмического потенциала с постоянной плотностью по площадке $\omega^j$ решение задачи (1.13), (1.14) запишем в виде

$$w^j(\xi) = -\frac{T^{-1}Q_j}{2\pi|\omega^j|} \iint\limits_{\omega^j} \ln|\xi - \eta|\, d\eta + \mathrm{const}\,. \tag{1.15}$$

В выражении (1.15) выделим функцию с нулевым средним по площадке $\omega^j$. Для этого введем величину $R^j$, имеющую размерность длины, по формуле

$$-\frac{1}{|\omega^j|^2} \iint\limits_{\omega^j} \iint\limits_{\omega^j} \ln|\xi - \eta|\, d\eta\, d\xi = \frac{1}{4} - \ln R^j. \tag{1.16}$$

Положим

$$w^j(\xi) = -\frac{T^{-1}Q_j}{2\pi|\omega^j|} \Big( \iint\limits_{\omega^j} \ln|\xi - \eta|\, d\eta + |\omega^j| \Big(\frac{1}{4} - \ln R^j\Big)\Big) + \bar{w}^j(P^j). \tag{1.17}$$

Величина $\bar{w}^j(P^j)$ имеет смысл среднего значения функции $w^j(\xi)$ по площадке $\omega^j$:

$$\bar{w}^j(\xi) = \frac{1}{|\omega^j|} \iint\limits_{\omega^j} w^j(\eta)\, d\eta. \tag{1.18}$$

В предположении, что начало системы координат $\xi^j$ совмещено с центром тяжести фигуры $\omega^j$ (т. е. точка $P^j$ совпадает с центром тяжести площадки $\omega^j_\varepsilon$), функция (1.17) на бесконечности ведет себя следующим образом:

$$w^j(\xi) = -\frac{Q_j}{2\pi T}\Big(\ln\frac{|\xi|}{R^j} + \frac{1}{4}\Big) + \bar{w}^j(P^j) + O(|\xi|^{-2}), \qquad |\xi| \to \infty. \tag{1.19}$$

Из равенства членов, выделенных в разложениях (1.14) и (1.19), находим $c_j = T^{-1}Q_j$ и получаем зависимости

$$\frac{Q_j}{2\pi T}\Big(\ln\frac{r_0^j}{\varepsilon R^j} + \frac{1}{4}\Big) + \sum_{k \neq j} T^{-1}Q_k G_k(P^j) = \bar{w}^j(P^j). \tag{1.20}$$

Введем обозначения

$$G_{jj} = \frac{1}{2\pi}\Big(\ln\frac{r_0^j}{\varepsilon R^j} + \frac{1}{4}\Big), \qquad G_{jk} = G_k(P^j), \quad k \neq j. \tag{1.21}$$

Тогда соотношение (1.20) принимает вид

$$\bar{w}^j(P^j) = \sum_{k=1}^{N} G_{jk} T^{-1} Q_k. \tag{1.22}$$

Очевидно, что матрица $G = \|G_{jk}\|_{j,k=1}^N$ является симметричной и для достаточно малых значений параметра $\varepsilon$ положительно определенной.

Подставляя в функционал (1.5) вместо величины $\bar{u}(P^j)$ ее асимптотику $\bar{w}^j(P^j)$, имеем

$$I^*(Q_1, \ldots, Q_N) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N} G_{jk}T^{-1}Q_k - u_0^j\Big)^2 + \alpha_j T^{-2} Q_j^2. \tag{1.23}$$

Функционал $I^*(Q)$ дает асимптотику целевого функционала $I(Q)$.

Замечание. Нетрудно проверить, что в случае круговой области $\omega^j$ величина $R^j$, определяемая по формуле (1.16), совпадает с радиусом круга $\omega^j$. В случае эллиптической области $\omega^j$ с полуосями $a^j$ и $b^j$, используя результаты расчетов [7, § 15], находим

$$R^j = (a^j + b^j)/2. \tag{1.24}$$

Из формулы (1.24) следует, что в случае эллиптической области $\omega^j$ величина $R^j$ совпадает с ее внешним конформным радиусом (см., например, [8, § 1.3]).

**1.3. Условие оптимальности.** Пусть вектор $Q = (Q_1, \ldots, Q_N)$ и функция $u(Q,x)$ есть решение рассматриваемой задачи оптимального управления, т. е. вектор $Q$ минимизирует функционал (1.5), где $u$ — решение краевой задачи (1.1), (1.2).

Зафиксируем индекс $j$ и обозначим через $\delta_j Q$ частную вариацию управления $Q$:

$$\delta_j Q = (0, \ldots, 0, \delta Q_j, 0, \ldots, 0) \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Тогда вариация состояния мембраны $\delta_j u = u(Q + \delta_j Q) - u(Q)$ в силу линейности задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет следующей задаче:

$$-T\Delta_x \delta_j u(x) = \chi_\varepsilon^j(x)|\omega_\varepsilon^j|^{-1}\delta Q_j, \quad x \in \Omega, \qquad \delta_j u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{1.25}$$

Соответственно частная вариация функционала (1.5) имеет вид

$$\delta_j I(Q, \delta_j Q) = \sum_{k=1}^{N} \big(\bar u(P^k) - u_0^k\big)\delta_j \bar u(P^k) + \alpha_j T^{-2} Q_j \delta Q_j, \tag{1.26}$$

где

$$\delta_j \bar u(P^k) = \frac{1}{|\omega_\varepsilon^k|} \iint\limits_{\omega_\varepsilon^k} \delta_j u(x)\, dx. \tag{1.27}$$

Пусть $G(y,x)$ — функция Грина задачи Дирихле с полюсом в точке $y \in \Omega$, удовлетворяющая задаче (1.10), в которой точку $P^j$ надо заменить на $y$. Тогда решение задачи (1.25) можно представить в виде

$$\delta_j u(x) = \frac{\delta Q_j}{T|\omega_\varepsilon^j|} \iint\limits_{\omega_\varepsilon^j} G(y,x)\, dy. \tag{1.28}$$

Подставляя выражение (1.28) в соотношение (1.27), получаем

$$\delta_j \bar u(P^k) = T^{-1} G_{jk}^\varepsilon\, \delta Q_j, \tag{1.29}$$

где

$$G_{jk}^\varepsilon = |\omega_\varepsilon^k|^{-1} |\omega_\varepsilon^j|^{-1} \iint\limits_{\omega_\varepsilon^k} \iint\limits_{\omega_\varepsilon^j} G(y,x)\, dy\, dx. \tag{1.30}$$

Таким образом, в силу соотношений (1.26) и (1.29) частная вариация целевого функционала (1.5) равна

$$\delta_j I(Q, \delta_j Q) = \Big(\sum_{k=1}^{N} (\bar u(P^k) - u_0^k) T^{-1} G_{jk}^\varepsilon + \alpha_j T^{-2} Q_j\Big)\delta Q_j. \tag{1.31}$$

Значит, необходимое условие стационарности функционала (1.5) на векторе $Q$ ($\delta_j I(Q, \delta_j Q) = 0$ для любой частной вариации $\delta_j Q$) согласно выражению (1.31) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar u(P^k) - u_0^k) G_{jk}^\varepsilon + \alpha_j T^{-1} Q_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{1.32}$$

Вычислим асимптотику величины $G^\varepsilon_{jk}$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть сначала $k \ne j$. Для фиксированной точки $x \in \omega^k_\varepsilon$ при $y \in \omega^j_\varepsilon$ по формуле Тейлора имеем

$$G(y,x) = G(P^j,x) + \frac{\partial G}{\partial y_1}(P^j,x)(y_1 - x^j_1) + \frac{\partial G}{\partial y_2}(P^j,x)(y_2 - x^j_2) + O(\varepsilon^2).$$

Поскольку точка $P^k$ по предположению совпадает с центром тяжести площадки $\omega^k_\varepsilon$, получаем

$$G^\varepsilon_{jk} = |\omega^k_\varepsilon|^{-1} \iint\limits_{\omega^k_\varepsilon} G(P^j,x)\,dx + O(\varepsilon^2).$$

Рассуждая далее аналогично, окончательно имеем

$$G^\varepsilon_{jk} = G_{jk} + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \to 0 \qquad (k \ne j). \tag{1.33}$$

Пусть теперь $k = j$. Переходя к координатам (1.12), получаем

$$G^\varepsilon_{jj} = \frac{1}{|\omega^j|^2} \iint\limits_{\omega^j} \iint\limits_{\omega^j} G(P^j + \varepsilon\eta, P^j + \varepsilon\xi)\,d\eta\,d\xi. \tag{1.34}$$

Напомним, что по определению функции Грина

$$G(y,x) = -(2\pi)^{-1} \ln|y - x| + g(y,x),$$

где $g(y,x)$ — регулярная функция. Поэтому

$$G(P^j + \varepsilon\eta, P^j + \varepsilon\xi) = -(2\pi)^{-1} \ln\varepsilon|\eta - \xi| + g(P^j,P^j) + {} \\ {} + \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial g}{\partial y_i}(P^j,P^j)\eta_i + \frac{\partial g}{\partial x_i}(P^j,P^j)\xi_i + O(\varepsilon^2). \tag{1.35}$$

По определению внутреннего гармонического радиуса

$$g(P^j,P^j) = (2\pi)^{-1} \ln r^j_0. \tag{1.36}$$

Подставляя разложение (1.35) в интеграл (1.34), с учетом зависимости (1.36) находим

$$2\pi G^\varepsilon_{jj} = -\frac{1}{|\omega^j|^2} \iint\limits_{\omega^j} \iint\limits_{\omega^j} \ln|\eta - \xi|\,d\eta\,d\xi + \ln\frac{r^j_0}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Наконец, учитывая (1.16) и обозначение (1.21), получаем

$$G^\varepsilon_{jj} = G_{jj} + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{1.37}$$

В то же время необходимое условие экстремума функции (1.23) в точке $Q$ имеет вид ($j = 1,\ldots,N$)

$$\sum_{k=1}^{N} \Big( \sum_{l=1}^{N} G_{lk} T^{-1} Q_l - u^k_0 \Big) G_{jk} + \alpha_j T^{-1} Q_j = 0. \tag{1.38}$$

С учетом соотношений (1.22), (1.33), (1.37) можно сделать вывод, что при выполнении асимптотических соотношений (1.38) условие оптимальности (1.32) будет соблюдаться с точностью до $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$ при $\varepsilon \to 0$.

## 2. УПРАВЛЕНИЕ МАЛЫМИ ШТАМПАМИ

**2.1. Постановка задачи.** Пусть на упругую мембрану $\Omega$ с равномерным натяжением $T$, закрепленную по контуру $\Gamma$, действует система $N$ штампов в форме круговых параболоидов:

$$\Phi_j(x) = (2R_j)^{-1}[(x_1 - x_1^j)^2 + (x_2 - x_2^j)^2] \qquad (j = 1, \dots, N). \tag{2.1}$$

Тогда функция прогиба мембраны удовлетворяет задаче (см., например, [9, 10])

$$\begin{gathered} -T\Delta_x u(x) \geqslant 0, \qquad u(x) \geqslant u(P^j) - \Phi_j(x), \\ \Delta_x u(x)[u(x) - u(P^j) + \Phi_j(x)] = 0, \qquad x \in \omega_*^j \quad (j = 1, \dots, N); \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\Delta_x u(x) = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^N \omega_*^j; \tag{2.3}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Здесь $u(P^j)$ — поступательное перемещение штампа с номером $j$, подлежащее определению по заданной величине силы, действующей на штамп; $\omega_*^j$ — область, охватывающая неизвестную априори площадку контакта $\omega_\varepsilon^j$ под штампом с номером $j$. При этом можно считать, что $\omega_*^j$ совпадает с областью (2.2) (см. [11]).

Исследуем задачу (2.2)–(2.4) в предположении малости пятен контакта. Обозначим через $\varepsilon$ малый положительный параметр и положим

$$R_j = \varepsilon R_j^* \qquad (j = 1, \dots, N), \tag{2.5}$$

где величины $R_j^*$ сравнимы с характерным расстоянием $d$. Тогда $\omega_*^j$ — круг радиусом $O(\sqrt{\varepsilon}\, d)$.

В соответствии с принятой формой штампа (2.1) давление

$$q_j(x) = T\Delta_x \Phi_j(x), \qquad x \in \omega_\varepsilon^j,$$

передаваемое штампом на мембрану на площадке контакта $\omega_\varepsilon^j$, оказывается равномерным:

$$q_j(x) = 2R_j^{-1}T, \qquad x \in \omega_\varepsilon^j. \tag{2.6}$$

При этом расположение границы пятна контакта $\omega_\varepsilon^j$ в окрестности точки $P^j$ заранее неизвестно.

Следовательно, сила $Q_j$, действующая на штамп с номером $j$, равна

$$Q_j = 2R_j^{-1}T|\omega_\varepsilon^j|. \tag{2.7}$$

Величины $Q_j$ и $u(P^j)$ $(j = 1, \dots, N)$ можно трактовать как обобщенные силы и соответствующие им обобщенные перемещения. При задании усилий $Q_1, \dots, Q_N$ уравнения равновесия (2.7) служат для определения перемещений $u(P^1), \dots, u(P^N)$.

Пусть $u_0^1, \dots, u_0^N$ — заданные постоянные. Тогда минимизация функционала

$$I(Q_1, \dots, Q_N) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N (u(P^j) - u_0^j)^2 + \alpha_j T^{-2} Q_j^2 \tag{2.8}$$

по отношению к величинам $Q_1, \dots, Q_N$ будет означать приближение к выполнению равенств $u(P^j) = u_0^j$ $(j = 1, \dots, N)$ с наименьшими возможными усилиями, действующими на штампы.

**2.2. Асимптотическая модель.** Методом сращиваемых разложений, следуя работе [11], в которой подробно исследована задача одностороннего контакта для одного штампа, построим асимптотику решения задачи (2.2)–(2.4), (2.7) при условии $0 < \varepsilon \ll 1$.

Внешнее асимптотическое представление (на удалении от точек $P^1, \ldots, P^N$) запишем в виде

$$v(x) = \sum_{j=1}^{N} T^{-1} Q_j G_j(x), \tag{2.9}$$

где $G_j(x)$ — функция Грина, являющаяся решением задачи (1.10).

В окрестности штампа с номером $j$ введем "растянутые" координаты по формуле

$$\xi^j = \varepsilon^{-1/2}(x - P^j). \tag{2.10}$$

Внутреннее асимптотическое представление $w^j(\xi^j)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$-\Delta_\xi w^j(\xi) \geqslant 0, \qquad w^j(\xi) \geqslant u(P^j) - \Phi_j^*(\xi),$$
$$\Delta_\xi w^j(\xi)\big[w^j(\xi) - u(P^j) + \Phi_j^*(\xi)\big] = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{2.11}$$

Здесь $\Phi_j^*(\xi) = (2R_j^*)^{-1}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$. Следует отметить, что соотношения (2.11) получены из (2.2), (2.3) с учетом (2.5) и (2.10).

Условие сращивания (см. также формулы (1.11) и (1.14)) имеет вид

$$w^j(\xi) = \frac{Q_j}{2\pi T} \ln \frac{r_0^j}{\varepsilon|\xi|} + \sum_{k \neq j} T^{-1} Q_k G_k(P^j) + O(|\xi|^{-1}), \qquad |\xi| \to \infty. \tag{2.12}$$

Задача (2.11), (2.12) допускает решение в замкнутой форме. Обозначим через $a_j^*$ радиус площадки контакта в "растянутых" координатах. Тогда соотношения (2.11) в предположении непрерывности функции $w^j(\xi)$ и ее частных производных первого порядка эквивалентны следующим:

$$w^j(\xi) = u(P^j) - (2R_j^*)^{-1}(a_j^*)^2, \qquad \frac{\partial w^j}{\partial \rho}(\xi) = -(R_j^*)^{-1} a_j^*, \qquad \rho \equiv |\xi| = a_j^*. \tag{2.13}$$

При этом $\Delta w^j(\xi) = 0$ для $|\xi| > a_j^*$ на основании (2.12) имеем

$$w^j(\xi) = \frac{Q_j}{2\pi T} \ln \frac{r_0^j}{\varepsilon|\xi|} + \sum_{k \neq j} T^{-1} Q_k G_k(P^j), \qquad |\xi| \geqslant a_j^*. \tag{2.14}$$

Удовлетворяя условиям (2.13), получаем зависимости

$$(a_j^*)^2 = (2\pi T)^{-1} Q_j R_j^*; \tag{2.15}$$

$$u(P^j) = \frac{Q_j}{4\pi T} + \frac{Q_j}{2\pi T} \ln \frac{r_0^j}{\varepsilon a_j^*} + \sum_{k \neq j} T^{-1} Q_k G_k(P^j). \tag{2.16}$$

Исключая параметр $a_j^*$ из уравнения (2.16) с помощью (2.15), с учетом (2.5) получаем следующее уравнение:

$$\frac{Q_j}{4\pi T}\Big(1 + \ln \frac{2\pi T (r_0^j)^2}{Q_j R_j}\Big) + \sum_{k \neq j} T^{-1} Q_k G_k(P^j) = u(P^j). \tag{2.17}$$

Таким образом, в рамках асимптотической модели (2.17), приближенно описывающей давление системы малых шаровых штампов на упругую мембрану, необходимое условие экстремума функции (2.8) имеет следующий вид ($j = 1, \ldots, N$):

$$\Big[\frac{Q_j}{4\pi T}\Big(1 + \ln\frac{2\pi T(r_0^j)^2}{Q_j R_j}\Big) + \sum_{k\neq j} T^{-1} Q_k G_k(P^j) - u_0^j\Big]\frac{1}{4\pi}\,\ln\frac{2\pi T(r_0^j)^2}{Q_j R_j} +$$

$$+ \sum_{k\neq j}\Big[\frac{Q_k}{4\pi T}\Big(1 + \ln\frac{2\pi T(r_0^k)^2}{Q_k R_k}\Big) + \sum_{l\neq k} T^{-1} Q_l G_l(P^k)\Big] G_j(P^k) + \alpha_j T^{-1} Q_j = 0. \qquad (2.18)$$

Система $N$ нелинейных уравнений (2.18) служит для отыскания оптимальных управляющих усилий $Q_1, \ldots, Q_N$ по заданным перемещениям $u_0^1, \ldots, u_0^N$.

Замечание. Уравнения (2.17) и (2.18) остаются в силе и в случае штампов в форме эллиптических параболоидов, если величину $R_j$ заменить средним арифметическим радиусов кривизны главных нормальных сечений поверхности штампа в его вершине (см. [11]).

## 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**3.1. Постановка задачи и условия оптимальности.** Пусть упругая мембрана $\Omega$ с равномерным натяжением $T$ закреплена по контуру $\Gamma$ и на малых площадках $\omega_\varepsilon^1, \ldots, \omega_\varepsilon^N$ нагружена поверхностной нагрузкой $q_1(x), \ldots, q_N(x)$. Используя обозначения, введенные в подп. **1.1**, задачу определения прогиба мембраны $u(x)$ запишем в виде

$$-T\Delta_x u(x) = \sum_{j=1}^{N} \chi_\varepsilon^j(x) q_j(x), \qquad x \in \Omega; \qquad (3.1)$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \Gamma. \qquad (3.2)$$

Пусть также $u_0^1, \ldots, u_0^N$ — заданные постоянные. Рассмотрим задачу об определении управления $q_1(x), \ldots, q_N(x)$, такого что решение $u(x)$ задачи (3.1), (3.2) незначительно отличается от постоянных $u_0^1, \ldots, u_0^N$ на малых площадках $\omega_\varepsilon^1, \ldots, \omega_\varepsilon^N$ соответственно. При этом попытаемся найти наименьшее управление, минимизируя целевой функционал (ср. с (1.5), (1.4))

$$I(q_1, \ldots, q_N) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{\omega_\varepsilon^j} \big[(u(x) - u_0)^2 + \alpha_j T^{-2} |\omega_\varepsilon^j|^2 q_j(x)^2\big]\,dx. \qquad (3.3)$$

В работе [3] получены условия оптимальности целевого функционала более общего вида, чем (3.3). В рассматриваемом случае задача оптимального управления (3.1)–(3.3) сводится к следующей системе спаренных дифференциальных уравнений:

$$-\Delta_x u(x) = -\sum_{j=1}^{N} \chi_\varepsilon^j(x) \alpha_j^{-1} T |\omega_\varepsilon^j|^{-2} p(x), \qquad x \in \Omega; \qquad (3.4)$$

$$-\Delta_x p(x) = \sum_{j=1}^{N} \chi_\varepsilon^j(x) T^{-1}(u(x) - u_0^j), \qquad x \in \Omega; \qquad (3.5)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \qquad p(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \qquad (3.6)$$

Здесь $p(x)$ — сопряженная функция. При этом управление определяется по решению задачи (3.4)–(3.6) в соответствии с зависимостью

$$q_j(x) = -\frac{T^2}{\alpha_j|\omega_\varepsilon^j|^2}\, p(x), \qquad x \in \omega_\varepsilon^j \quad (j = 1, \ldots, N). \tag{3.7}$$

Заметим, что при выводе уравнений (3.4) и (3.5) предполагалась непрерывность функций $u(x)$, $p(x)$ и их частных производных первого порядка.

Исследуем поведение решения задачи (3.4)–(3.6) при $\varepsilon \to 0$ с использованием метода сращиваемых разложений.

**3.2. Построение асимптотики.** Переходя в соотношениях (3.4)–(3.6) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем первую предельную задачу

$$\Delta_x v(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{P^1, \ldots, P^N\}, \qquad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \tag{3.8}$$

$$\Delta_x p_0(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{P^1, \ldots, P^N\}, \qquad p_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) следует, что вне площадок $\omega_\varepsilon^1, \ldots, \omega_\varepsilon^N$ уравнения (3.4) и (3.5) совпадают с уравнением Лапласа, которое инвариантно по отношению к растяжению координат. Поэтому зафиксируем индекс $j$ и рассмотрим уравнения (3.4) и (3.5) на площадке $\omega_\varepsilon^j$.

При переходе к "растянутым" координатам

$$\xi^j = \varepsilon^{-1}(x - P^j) \tag{3.10}$$

уравнения (3.4) и (3.5) преобразуются следующим образом:

$$\varepsilon^{-2}\Delta_\xi u = \alpha_j^{-1} T \varepsilon^{-4} |\omega^j|^{-2} p, \qquad \xi \in \omega^j; \tag{3.11}$$

$$-\varepsilon^{-2}\Delta_\xi p = T^{-1}(u - u_0^j), \qquad \xi \in \omega^j. \tag{3.12}$$

Здесь аргумент $x = P^j + \varepsilon\xi^j$ у функций $u$, $p$ для упрощения записи формул опущен.

Поскольку $|\omega_\varepsilon^j| = \varepsilon^2|\omega^j|$, уравнение (3.7) на площадке $\omega^j$ можно представить в виде

$$q_j = -\frac{T^2}{\alpha_j|\omega^j|^2}\, \varepsilon^{-4} p, \qquad \xi \in \omega^j. \tag{3.13}$$

Соответственно уравнение (3.11) принимает вид

$$-\varepsilon^{-2} T \Delta_\xi u = q_j, \qquad \xi \in \omega^j. \tag{3.14}$$

Положим

$$q_j = \varepsilon^{-2} q_j^*(\xi), \qquad \xi \in \omega^j. \tag{3.15}$$

При этом суммарная нагрузка на площадку $\omega^j$ равна (см. (1.3))

$$Q_j = \iint_{\omega^j} q_j^*(\xi)\, d\xi. \tag{3.16}$$

С учетом соотношений (3.14) и (3.15) внутреннее асимптотическое представление для функции $u(x)$ в окрестности площадки $\omega_\varepsilon^j$ представим в виде логарифмического потенциала

$$w^j(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\omega^j} T^{-1} q_j^*(\eta) \ln|\xi - \eta|\, d\eta + c_j, \tag{3.17}$$

где $c_j$ — постоянная.

Для функции (3.17) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$w^j(\xi) = -\frac{Q_j}{2\pi T}\ln|\xi| + c_j + O(|\xi|^{-1}), \qquad |\xi| \to \infty. \tag{3.18}$$

Из условия сращивания внутреннего $w^j(\xi)$ асимптотического представления с внешним $v(x)$ с учетом формулы (3.18) для $v(x)$ получаем следующее представление:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{N} T^{-1} Q_j G_j(x), \tag{3.19}$$

где $G_j(x)$ — функция Грина, удовлетворяющая задаче (1.10). В то же время для функции (3.19) при $x \to P^j$ имеет место разложение (см. (1.11))

$$v(x) = -\frac{Q_j}{2\pi T}\ln\frac{|x-P^j|}{r_0^j} + \sum_{k\neq j} T^{-1} Q_k G_k(P^j) + O(|x-P^j|). \tag{3.20}$$

Переходя в соотношении (3.20) к координатам (3.10) и сравнивая с разложением (3.18), определяем постоянную $c_j$:

$$c_j = -\frac{Q_j}{2\pi T}\,\ln\frac{\varepsilon}{r_0^j} + \sum_{k\neq j} T^{-1} Q_k G_k(P^j). \tag{3.21}$$

Определим функцию $q_j^*(\xi)$. С учетом соотношений (3.13) и (3.15) уравнение (3.12) представляется в виде

$$\alpha_j T^{-1}|\omega^j|^2 \Delta_\xi q_j^*(\xi) = w^j(\xi) - u_0^j, \qquad \xi \in \omega^j. \tag{3.22}$$

Следует отметить, что при записи уравнения (3.22) функция $u$ заменена ее внутренним асимптотическим представлением. Аналогично уравнение (3.14) принимает вид

$$-T\Delta_\xi w^j(\xi) = q_j^*(\xi), \qquad \xi \in \omega^j. \tag{3.23}$$

Решение уравнения (3.22), в свою очередь, представим в виде логарифмического потенциала

$$q_j^*(\xi) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\omega^j} \alpha_j^{-1} T|\omega^j|^{-2}(w^j(\eta) - u_0^j)\ln|\xi-\eta|\,d\eta + c_j^*, \tag{3.24}$$

где $c_j^*$ — некоторая постоянная.

Согласно формулам (3.24) и (3.13), (3.15) получаем

$$p_0^j(\xi) = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi T}\iint\limits_{\omega^j}(w^j(\eta) - u_0^j)\ln|\xi-\eta|\,d\eta - \varepsilon^2\alpha_j|\omega^j|^2 T^{-2} c_j^*. \tag{3.25}$$

По построению функция (3.25) является гармонической в области $\mathbb{R}^2\setminus\overline{\omega}^j$ и может служить внутренним асимптотическим представлением функции $p$ в окрестности площадки $\omega_\varepsilon^j$.

Постоянную $c_j^*$ определим, выполняя сращивание функции $p_0^j(\xi)$ с функцией $p_0(x)$ — внешним асимптотическим представлением функции $p$. В силу асимптотической формулы

$$p_0^j(\xi) = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi T}\ln|\xi|\iint\limits_{\omega^j}(w^j(\eta) - u_0^j)\,d\eta - \varepsilon^2\alpha_j|\omega^j|^2 T^{-2} c_j^* + O(|\xi|^{-1})$$

имеем

$$p_0(x) = \varepsilon^2 T^{-1} |\omega^j| \sum_{j=1}^{N} (\bar w^j - u_0^j) G_j(x).$$

Здесь

$$\bar w^j = \frac{1}{|\omega^j|} \iint\limits_{\omega^j} w^j(\eta)\, d\eta. \qquad (3.26)$$

С учетом справедливого при $x \to P^j$ разложения

$$p_0(x) = -\frac{\varepsilon^2 |\omega^j|}{2\pi T}\, (\bar w^j - u_0^j) \ln \frac{|x - P^j|}{r_0^j} + \frac{\varepsilon^2}{T} \sum_{k \ne j} (\bar w^k - u_0^k) G_k(P^j) + O(|x - P^j|)$$

находим

$$c_j^* = \frac{T}{\alpha_j |\omega^j|^2} \Big( \frac{|\omega^j|}{2\pi}\, (\bar w^j - u_0^j) \ln \frac{\varepsilon}{r_0^j} - \sum_{k \ne j} (\bar w^k - u_0^k) G_k(P^j) \Big). \qquad (3.27)$$

Наконец, с учетом соотношений (3.21) и (3.27) имеем

$$\begin{gathered} T w^j(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\omega^j} q_j^*(\eta) \ln \frac{\varepsilon|\xi - \eta|}{r_0^j}\, d\eta + \sum_{k \ne j} G_{jk} \iint\limits_{\omega^k} q_k^*(\eta)\, d\eta, \\ \frac{\alpha_j |\omega^j|^2}{T}\, q_j^*(\xi) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\omega^j} (w^j(\eta) - u_0^j) \ln \frac{\varepsilon|\xi - \eta|}{r_0^j}\, d\eta - \sum_{k \ne j} G_{jk} \Big( \frac{1}{|\omega^k|} \iint\limits_{\omega^k} w^k(\eta)\, d\eta - u_0^k \Big). \end{gathered} \qquad (3.28)$$

Итак, построенная асимптотика решения задачи (3.4)–(3.6) содержит функции $q_j^*(\xi)$ и $w^j(\xi)$, заданные на площадке $\omega^j$, $j = 1, \ldots, N$, для которых получена система спаренных интегральных уравнений (3.28).

**3.3. Асимптотическая модель в случае круговых площадок управления.** Пусть $\omega^j$ — круг радиусом $a^j$ с центром в начале координат на плоскости "растянутых" координат. Тогда согласно формулам (3.17), (3.21) и (3.25), (3.27) при $\rho = |\xi| \geqslant a_j$ справедливы представления

$$w^j(\xi) = -\frac{Q_j}{2\pi T} \ln \frac{\varepsilon\rho}{r_0^j} + \sum_{k \ne j} T^{-1} Q_k G_{jk}; \qquad (3.29)$$

$$p_0^j(\xi) = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi T}\, |\omega^j| (\bar w^j - u_0^j) \ln \frac{\varepsilon\rho}{r_0^j} + \frac{\varepsilon^2}{T} \sum_{k \ne j} (\bar w^k - u_0^k) G_{jk}. \qquad (3.30)$$

В то же время при $0 \leqslant \rho < a_j$ имеем уравнения (3.22) и (3.23), из которых непосредственно вытекают следующие:

$$\begin{gathered} \Delta_\xi \Delta_\xi (w^j(\xi) - u_0^j) + \lambda_j^4 (w^j(\xi) - u_0^j) = 0, \qquad \xi \in \omega^j, \\ \Delta_\xi \Delta_\xi q_j^*(\xi) + \lambda_j^4 q_j^*(\xi) = 0, \qquad \xi \in \omega^j. \end{gathered} \qquad (3.31)$$

Здесь $\lambda_j^4 = \alpha_j^{-1} |\omega^j|^{-2}$.

В условиях круговой симметрии решения уравнений (3.31) выражаются через функции Кельвина (см., например, [12, ч. 2, гл. 1, § 2])

$$w^j(\xi) - u_0^j = A_j \operatorname{ber}(\lambda_j \rho) + B_j \operatorname{bei}(\lambda_j \rho); \qquad (3.32)$$

$$q_j^*(\xi) = A_j^* \operatorname{ber}(\lambda_j \rho) + B_j^* \operatorname{bei}(\lambda_j \rho). \tag{3.33}$$

Здесь $\operatorname{ber}(x)$ и $\operatorname{bei}(x)$ — функции Кельвина (нулевого порядка), определяемые разложениями (см. формулу (8.564) в [13])

$$\operatorname{ber}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2}, \qquad \operatorname{bei}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2}.$$

В силу соотношений (3.13), (3.15) выполняется равенство

$$p_0^j(\xi) = -\varepsilon^2 \alpha_j T^{-2} |\omega^j|^2 q_j^*(\xi), \qquad \xi \in \omega^j. \tag{3.34}$$

Согласно представлениям (3.29) и (3.32) условие непрерывности функции $w^j(\xi)$ и ее производной на окружности $\rho = a_j$ имеет вид

$$\begin{gathered} A_j \operatorname{ber}'(\lambda_j a_j) + B_j \operatorname{bei}'(\lambda_j a_j) = -(2\pi T \lambda_j a_j)^{-1} Q_j, \\ A_j \operatorname{ber}(\lambda_j a_j) + B_j \operatorname{bei}(\lambda_j a_j) = -u_0^j - \frac{Q_j}{2\pi T} \ln \frac{\varepsilon a_j}{r_0^j} + \sum_{k \neq j} T^{-1} Q_k G_{jk}. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Аналогично согласно представлениям (3.30) и (3.34), (3.33) условие непрерывности функции $p_0^j(\xi)$ и ее производной при $\rho = a_j$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} A_j^* \operatorname{ber}'(\lambda_j a_j) + B_j^* \operatorname{bei}'(\lambda_j a_j) = \frac{T(\bar{w}^j - u_0^j)}{2\pi \alpha_j |\omega^j| \lambda_j a_j}, \\ A_j^* \operatorname{ber}(\lambda_j a_j) + B_j^* \operatorname{bei}(\lambda_j a_j) = \frac{T}{\alpha_j |\omega^j|^2} \Big( (\bar{w}^j - u_0^j) \frac{|\omega^j|}{2\pi} \ln \frac{\varepsilon a_j}{r_0^j} - \sum_{k \neq j} (\bar{w}^k - u_0^k) G_{jk} \Big). \end{gathered} \tag{3.36}$$

Подставляя выражения (3.33) в формулу (3.16), находим

$$Q_j = 2\pi \int_0^{a_j} \big( A_j^* \operatorname{ber}(\lambda_j \rho) + B_j^* \operatorname{bei}(\lambda_j \rho) \big) \rho \, d\rho. \tag{3.37}$$

Используя формулы (см. [14, гл. 3, § 6])

$$\int_0^x \xi \operatorname{ber}(\xi)\, d\xi = x \operatorname{bei}'(x), \qquad \int_0^x \xi \operatorname{bei}(\xi)\, d\xi = -x \operatorname{ber}'(x),$$

из соотношения (3.37) получаем

$$Q_j = 2\pi \lambda_j^{-1} a_j \big( A_j^* \operatorname{bei}'(\lambda_j a_j) - B_j^* \operatorname{ber}'(\lambda_j a_j) \big). \tag{3.38}$$

Аналогично, подставляя выражение (3.32) в формулу (3.26), имеем

$$\bar{w}^j - u_0^j = 2(\lambda_j a_j)^{-1} \big( A_j \operatorname{bei}'(\lambda_j a_j) - B_j \operatorname{ber}'(\lambda_j a_j) \big). \tag{3.39}$$

Таким образом, подставляя выражения (3.38) и (3.39) в уравнения (3.35) и (3.36), задачу определения оптимального управления сводим к системе $4N$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_j$, $B_j$ и $A_j^*$, $B_j^*$ $(j = 1, \ldots, N)$. В свою очередь, определяя коэффициенты $A_j$, $B_j$ из системы двух уравнений (3.35), а коэффициенты $A_j^*$, $B_j^*$ — из системы (3.36) и подставляя результат в уравнения (3.38), (3.39), получаем систему $2N$ уравнений относительно величин $Q_j$ и $\bar{w}^j$ $(j = 1, \ldots, N)$, имеющих механический смысл.

Автор выражает благодарность В. А. Ковтуненко за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Хлуднев А. М.** Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 2. С. 318–326.
2. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
3. **Sokołowski J., Żochowski A.** Topological derivative for optimal control problems // Control Cybernet. 1999. V. 28, N 3. P. 611–625.
4. **Назаров С. А.** Асимптотическое решение задачи с малыми препятствиями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1031–1041.
5. **Ван-Дайк М. Д.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
6. **Ильин А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
7. **Левин В. И., Гросберг Ю. Н.** Дифференциальные уравнения математической физики. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.
8. **Полиа Г., Сеге Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
9. **Киндерлерер Д., Стампаккья Г.** Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
10. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые математические проблемы, связанные с механикой деформируемых тел // Механика деформируемых тел: Направления развития. М.: Мир, 1983. С. 9–21.
11. **Аргатов И. И.** Асимптотическое решение задачи о давлении твердого тела на мембрану // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 683–690.
12. **Коренев Б. Г.** Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
13. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
14. **Грэй Э., Мэтьюз Г. Б.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.


*Поступила в редакцию 20/VII 2004 г.*