

В результате вычислений получим

$$T_{21} = 2 (n\pi)^2 \frac{h}{L} \left[n^2 + \left(\frac{n\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{2n,(2j-1)}}{2j-1}.$$

Остальные величины вычисляются аналогично. Окончательно определитель (4.5) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(1)} & -4 \frac{h}{R} \left(\frac{R}{L} \right)^3 (m\pi)^4 n^2 \gamma_{nm}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{2n,(2j-1)}^0}{2j-1} \\ -4 \frac{h}{R} \left(\frac{R}{L} \right)^3 (m\pi)^4 n^2 \gamma_{nm}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{2n,(2j-1)}^0}{2j-1} & \lambda^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, если среди форм, задающих начальную неправильность, присутствует форма $\sin 2ny \sin j\pi R x/L$, где j нечетное, то двукратное собственное значение λ_{nm} расщепляется в первом приближении на простые.

Поступила 14 IV 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Бушнелл Д. Потеря устойчивости и выпучивание оболочек — ловушка для проектировщиков. — Ракетн. техника и космонавтика, 1981, т. 19, № 10.
2. Тонкостенные оболочечные конструкции/Под ред. Э. И. Григolyюка. М.: Машиностроение, 1980.
3. Муштари Х. П., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957.
4. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1961.
5. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
6. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: ИЛ, 1961.
7. Корнев В. М. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением с учетом краевого эффекта. — Инж. журн. МТТ, 1967, № 3.
8. Корнев В. М. О структурных формулах при расчете цилиндрических оболочек на колебания и устойчивость. — ПМ, 1974, т. 10, вып. 4.
9. Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем. — Сб. пер. Механика, 1960, т. 63, № 5.
10. Корнев В. М. О решении задач устойчивости оболочек с учетом плотности собственных значений. Л.: Судостроение, 1975.
11. Корнев В. М. Особенности задач выпучивания тонкостенных оболочек. — В кн.: Динамика твердого тела (Динамика сплошной среды). Вып. 25. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.

УДК 620.171.5

ПРИМЕНЕНИЕ ФОТОУПРУГИХ ПОКРЫТИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДЕФОРМАЦИЙ В МИКРООБЛАСТЯХ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

Л. А. КРАСНОВ, А. П. ШАБАНОВ

(Новосибирск)

При исследованиях по методу фотоупругих покрытий на поверхность образца наносится тонкий слой (покрытие) оптически активного материала. В случае, если толщина покрытия относительно невелика, обработка результатов эксперимента не представляет особых трудностей, так как полученные в ходе эксперимента оптические величины будут пропорциональны измеряемым деформациям на поверхности образца [1]. Если же толщина покрытия соизмерима с характерным размером зоны деформирования, то анализ результатов измерений существенно осложняется и требует специальных методов обработки (уточнения).

Особенно сложна эта задача при исследованиях деформаций в микрообластях реальных поликристаллических материалов. Здесь даже при небольших нагрузках (в области так называемых микропластических деформаций) неупругое деформирование происходит путем образования и развития смещений, определяемых локализацией следов скольжения. Такие зоны концентрации локальных деформаций в свою очередь имеют более тонкую структуру и могут отражать результат действия нескольких механизмов деформирования в области полосы скольжения [2, 3]. Во всех этих случаях

практически осуществимая минимальная толщина покрытия превышает размеры деформированного участка, и результаты измерений, таким образом, не могут быть использованы без соответствующей корректировки.

В данной работе рассматриваются различные случаи измерения деформаций в области полосы скольжения шириной $2a$ (фиг. 1). Толщина d используемого для этого фотоупругого покрытия (на фиг. 1 оно не показано) значительно превышает размеры деформированной зоны ($d > 2a$). При этом будем считать, что в области полосы скольжения деформации однородны, а вне этой зоны ими можно пренебречь. Проекция вектора перемещения P_0 , характеризующего смещение недеформированных участков как жесткого целого, на оси x, y, z обозначим соответственно U_0, V_0, W_0 . Внутри деформированной зоны $-a \leq x \leq a$ перемещения U, V, W будем считать линейными функциями координаты x .

1. Пусть из всех компонентов вектора перемещения отлична от нуля только вертикальная составляющая V_0 . Если длина полосы скольжения в направлении оси z велика, можно считать, что покрытие, нанесенное на поверхность $y = 0$ (см. фиг. 1), находится в условиях плоской деформации при следующих граничных условиях:

$$(1.1) \quad \text{при } y = d \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$\text{при } y = 0 \quad V = \begin{cases} -V_0, & \text{если } -\infty < x < -a, \\ V_0 x/a, & \text{если } -a \leq x \leq a, \\ V_0, & \text{если } a < x < \infty \end{cases}$$

(σ_x, τ_{xy} — компоненты тензора напряжений для покрытия).

При таких граничных условиях напряженное состояние покрытия, имеющего достаточно большую длину вдоль оси x , хорошо описывается функцией напряжений в виде интеграла Фурье [4]:

$$(1.2) \quad \varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha y) \sin(\alpha x) d\alpha,$$

где $F(\alpha y) = A \operatorname{ch}(\alpha y) + B \operatorname{sh}(\alpha y) + C(\alpha y) \operatorname{ch}(\alpha y) + D(\alpha y) \operatorname{sh}(\alpha y)$. Константы A, B, C, D , входящие в выражение (1.2), находятся из граничных условий (1.1). После чего может быть определена компонента деформации покрытия, фиксируемая по методу фотоупругих покрытий:

$$(1.3) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{2G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\Delta} [\Delta_1 ((3 - 4\nu) \operatorname{sh}(\alpha y) + (\alpha y) \operatorname{ch}(\alpha y)) + \Delta_2 (\alpha y) \operatorname{sh}(\alpha y) - H_1 \Delta \operatorname{sh}(\alpha y)] \sin(\alpha x) d\alpha,$$

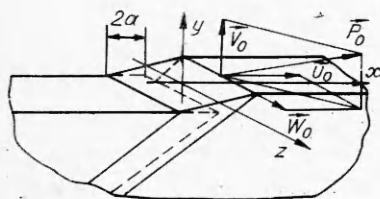
где $H_1 = 2GV_0 \sin(\alpha a) / (\pi \alpha a^3)$; $\Delta_1 = H_1 [2(1 - \nu) + \operatorname{sh}^2(\alpha d)]$; $\Delta_2 = H_1 [\alpha d - 0,5 \operatorname{sh}(\alpha d)]$; $\Delta = (\alpha d)^2 + 4(1 - \nu)^2 + (3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2(\alpha d)$; ν, G — упругие постоянные материала покрытия.

При просвечивании покрытия вдоль оси y будет измерена величина, равная среднему значению разности главных деформаций по толщине покрытия:

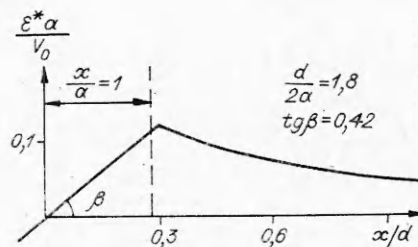
$$(1.4) \quad \varepsilon^* = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{d} \int_0^d \varepsilon_x dy.$$

Направления главных деформаций в этом случае будут, очевидно, совпадать с осями x, y .

На фиг. 2 в качестве примера приведено полученное путем численной реализации формул (1.3), (1.4) распределение измеряемых деформаций вдоль оси x , когда толщина покрытия в 1,8 раза больше зоны деформирования на поверхности образца. Здесь по оси ординат отложено отношение измеряемой деформации ε^* к фактической на поверхности образца. Штриховой линией намечена граница деформированной зоны.



Фиг. 1



Фиг. 2

Как видно, угол наклона кривой в начале координат β при известной толщине покрытия и ширине деформированной зоны характеризует величину перемещения V_0 .

2. Рассмотрим теперь случай, когда отлична от нуля только горизонтальная составляющая вектора перемещений U_0 . Граничные условия для покрытия:

$$\begin{aligned} &\text{при } y = d \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \\ &\text{при } y = 0 \quad U = \begin{cases} -U_0, & \text{если } -\infty < x < -a, \\ \frac{U_0}{a} x, & \text{если } -a \leq x \leq a, \\ U_0, & \text{если } a < x < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Как и в п. 1, решение может быть получено в виде интеграла Фурье

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\Delta} [\Delta_3 ((3-4\nu) \operatorname{sh}(\alpha y) + (\alpha y) \operatorname{ch}(\alpha y)) + \\ &+ \Delta_4 (\alpha y) \operatorname{sh}(\alpha y) + H_2 \Delta \operatorname{ch}(\alpha y)] \cos(\alpha x) d\alpha, \\ H_2 &= 2GU_0 \sin(\alpha a) / (\pi \alpha a^3), \quad \Delta_3 = -H_2 [\alpha d + 0,5 \operatorname{sh}(2\alpha d)], \\ \Delta_4 &= H_2 [2(1-\nu) + \operatorname{sh}^2(\alpha d)]. \end{aligned}$$

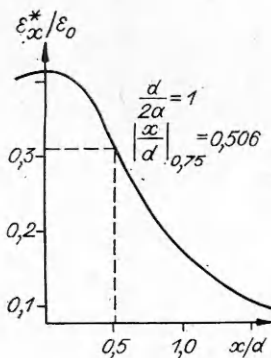
Для подсчета средней по толщине покрытия разности главных деформаций ε^* вновь воспользуемся формулой (1.4).

На фиг. 3 показано полученное расчетным путем по формулам (1.4), (2.1) распределение деформаций, которые измеряются при просвечивании покрытия на различных расстояниях от центра деформированного участка. По оси абсцисс отложена величина ξ^*/ε_0 , где $\varepsilon_0 = U_0/a$ — деформация на поверхности образца в зоне полосы скольжения. Толщина покрытия здесь равна ширине участка деформирования. Как видно, деформации, измеренные в центре деформированного участка ε_{\max}^* , составляют всего 43% от фактических на исследуемой поверхности. Отметим, что измеряемая деформация уменьшается до 75% своей максимальной величины на расстоянии $x_{0,75} = 0,506d$ от центра деформированного участка. При другом соотношении $d/2a$ это расстояние будет иным, что может быть использовано для определения фактической ширины полосы скольжения.

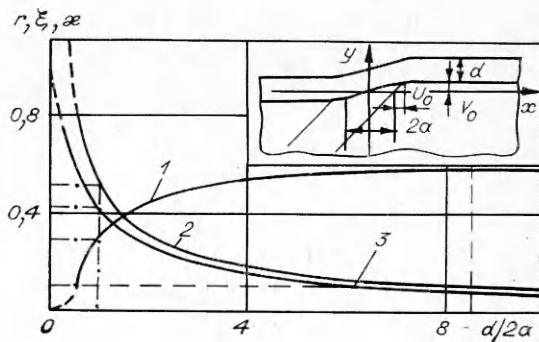
Для этого необходимо построить графики изменения функций $\kappa = \varepsilon_{\max}^*/\varepsilon_0$, $\xi = x_{0,75}/d$, $r = a \operatorname{tg} \beta / V_0$ от аргумента $d/2a$, представленные на фиг. 4. Например, пусть экспериментально получена кривая $\varepsilon^* = \varepsilon^*(x/d)$. Отметим, что толщина покрытия считается известной, и для определенности примем $d = 0,1$ мм. По этой кривой определим $\xi = 0,506$, $\varepsilon_{\max}^* = 5\%$. Тогда по кривой 2 (штрихпунктирные линии) находим $d/2a = 1,0$, откуда $2a = d/1,0 = 0,1$. Теперь можно определить значение перемещения U_0 на поверхности образца, для чего, используя кривую 3, находим для полученного значения $d/2a$ величину $\kappa = 0,42$, тогда $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\max}^*/\kappa = 0,12$, $U_0 = \varepsilon_0 a = 0,006$ мм. Если известна ширина зоны возмущения, можно, определив величину r по кривой 1, дополнительно найти еще и значение вертикального перемещения V_0 .

3. Рассмотрим, наконец, случай, когда на исследуемой поверхности из всех компонент вектора перемещения не равна нулю лишь составляющая по оси z . Уравнение равновесия для покрытия здесь можно свести к следующему:

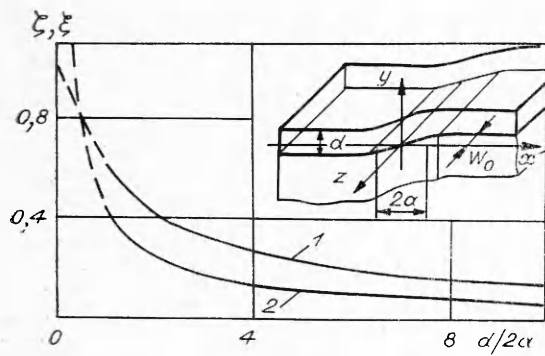
$$(3.1) \quad \partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y = 0,$$



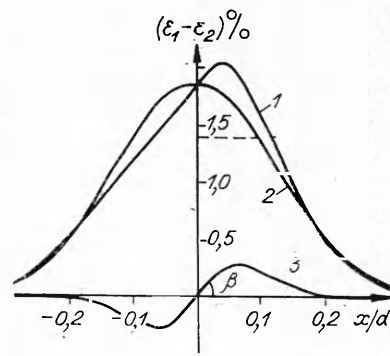
Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

которое формально соответствует уравнению равновесия плоской задачи. Поэтому для его решения воспользуемся приемом, который применяется выше.

Граничные условия:

$$(3.2) \quad \text{при } y = d \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$\text{при } y = 0 \quad W = \begin{cases} -W_0, & \text{если } -\infty < x < -a, \\ \frac{W_0}{a} x, & \text{если } -a \leq x \leq a, \\ W_0, & \text{если } a < x < \infty. \end{cases}$$

Решая (3.1) с учетом (3.2), найдем деформацию в плоскости zOx покрытия:

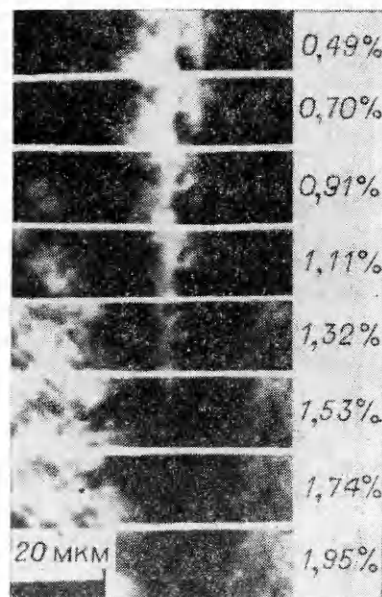
$$\gamma_{xz} = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} [\operatorname{ch}(\alpha y) - \operatorname{th}(\alpha d) \operatorname{sh}(\alpha y)] d\alpha.$$

При просвечивании покрытия вдоль оси y измеряется среднее значение разности главных деформаций, которое можно найти, как и ранее, численным интегрированием:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma^* = \frac{1}{d} \int_0^d \gamma_{xz} dy.$$

Однако направление главных деформаций здесь отличается от предыдущих случаев, составляя с направлением участка деформирования угол, равный 45° . Это обстоятельство позволяет легко отделить два ранее рассмотренных случая от последнего. Наибольшего значения измеряемая деформация γ^* достигает в центре деформированного участка ($x = 0$) и существенно зависит от толщины покрытия. Изменение деформации $\zeta = \gamma^*/\gamma_0$ в центре деформированной зоны в зависимости от относительной толщины покрытия показано на фиг. 5 кривой 1, кривая 2 характеризует расстояние от центра, на котором измеряемая деформация уменьшается до 75%, при различных толщинах покрытия. Это позволяет по картине измеряемых деформаций определить размер деформированной зоны, а затем, используя кривую 1, найти действительное значение деформации на нижней кромке покрытия, которая совпадает с фактической деформацией в исследуемой области.

4. Рассмотрим далее возможность определения перемещения на исследуемой поверхности в случаях, когда отличны от нуля U_0 и V_0 . Для их раздельного определения используем то обстоятельство, что измеряемые по методу фотоупругих покрытий величины при $V_0 \neq 0$ (п. 1) распределены кососимметрично (см. фиг. 2), а при $U_0 \neq 0$ (п. 2) — симметрично (см. фиг. 3) относительно начала координат. Кроме того, отметим, что симметричная кривая на участке $(0, \infty)$ монотонно убывает, асимптотически приближаясь к нулю, а кососимметричная на том же



Ф и г. 7

птервале имеет один экстремум и тоже асимптотически приближается к нулю на бесконечности.

Когда $U_0 \neq 0$ и $V_0 \neq 0$, по методу фотоупругих покрытий фиксируется кривая общего вида (кривая 1 на фиг. 6), которую можно разделить на симметричное и кососимметричное распределение, используя условия, сформулированные выше. Теперь по фиг. 4 можно определить все параметры, определяющие полосу скольжения.

В качестве примера приведем результаты исследования деформаций в области полосы скольжения образца из магниевого сплава после разгрузки. Покрытие толщиной 80 мкм, выполненное из эпоксидного компаунда, было нанесено на образец до нагружения.

На фиг. 7 приведены фотографии картин полос для одного и того же участка образца, ориентированного так, что длинная сторона каждого снимка перпендикулярна направлению полосы скольжения. Снимки на фиг. 7 отличаются тем, что получены при различных значениях оптической разности в компенсаторе π , следовательно, дают полосы интерференции дробных порядков [1]. Для каждой полосы интерференции затем была определена соответствующая разность главных деформаций (указана на снимках справа). По результатам обработки этих картин получено распределение некорректированной разности главных деформаций ε^* (см. фиг. 6) вдоль нормали к направлению полосы скольжения. Положение центра деформированной зоны найдено расчетным путем перебором по наилучшему удовлетворению условий, сформулированных выше. После чего кривую 1 можно было рассматривать как суперпозицию симметричной и кососимметричной составляющих (кривые 2 и 3 соответственно). Теперь, используя графики фиг. 4, можно определить параметры полосы скольжения по следующей схеме: $\varepsilon_{\max}^* = 1,84\%$, $0,75\varepsilon_{\max}^* = 1,38\%$, $\xi = 0,1$ (штриховая линия на фиг. 6); тогда (см. фиг. 4) $d/2a = 8,5$, $2a = 9,41$ мкм ($d = 80$ мкм), $\gamma = \varepsilon_{\max}^*/\varepsilon_0 = 0,8$, $\varepsilon_0 = 23\%$, $2U_0 = 2,16$ мкм. По кривой 1 фиг. 4 определяем величину $r = 0,48$, $\operatorname{tg} \beta = 0,84$, $2V_0 = 16,47$ мкм.

Поступила 10 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. Вишняков Я. Д. Современные методы исследования структуры деформированных кристаллов. М.: Металлургия, 1975.
3. Наборро Ф. Р., Базинский З. С., Холт Д. Б. Пластичность чистых монокристаллов. М.: Металлургия, 1967.
4. Попкович А. Ф. Теория упругости М.: Оборонгиз, 1939.

УДК 539.3

ОБ ИЗГИБЕ СЕКТОРА СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО КОЛЬЦА

Ю. А. БОГАН

(Новосибирск)

При помощи модификации метода [1] построена асимптотика решения первой краевой задачи изгиба (на границе заданы прогиб и угол поворота) сектора цилиндрически ортотропного кольца в предположении, что жесткость на изгиб в окружном направлении значительно выше жесткости на изгиб в радиальном. Применение метода [1] в этой ситуации осложнено наличием у области угловых точек, что приводит к появлению в асимптотике функций пограничного слоя двух разных типов: одного, описываемого обыкновенными дифференциальными уравнениями вдоль характеристической части границы, и другого, описываемого уравнениями в частных производных и сосредоточенного вблизи угловых точек. Единственная известная автору краевая задача для уравнения в частных производных, в асимптотике которой участвуют функции углового пограничного слоя, изучалась в [2]. Ситуация [2] проще ситуации данной работы, так как в [2] при $\varepsilon = 0$ понижается порядок уравнения.

1. Пусть Q — область следующего вида: $Q = \{(r, \theta), 0 < a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq c\}$. Введем безразмерную радиальную координату $x = \ln(r/a)$ и положим $x_0 = \ln(b/a)$, $\varepsilon^2 = D_{11}D_{22}^{-1}$, $b_{12} = D_{12}D_{11}^{-1}$, $b_{66} = D_{66}D_{11}^{-1}$, $m = 2(b_{12} + 2b_{66})$, где D_{ij} — жесткости пластины на изгиб. Уравнение изгиба цилиндрически-ортотропной пластины в предположении справедливости гипотез Кирхгофа — Лява имеет вид [3]