

Э. С. Сибгатуллин, И. Г. Терезулов

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

В связи со значительным расширением области использования композитов в технике и увеличением их массовой доли в общем объеме расходуемого на изготовление изделия материала весьма актуальна задача прогнозирования прочностных характеристик конструкций из композитов при кратковременном, длительном и циклическом нагружении. По этой проблеме имеется обширный список литературы. Научные основы расчета изложены в [1, 2]. Экспериментальному определению усталостных характеристик композитов, имеющих относительно простые структуры, посвящены работы [3—6].

В настоящей работе предлагается методика нахождения несущей способности тонких слоистых композитных оболочек при циклическом нагружении исходя из соответствующих характеристик выносливости, толщины и ориентаций в композите отдельных слоев. Рассматриваются слоистые композиты, образованные путем наложения квазиоднородных ортотропных слоев. Предположения о характере напряженно-деформированного состояния, которые делаются нами в дальнейшем, также не ограничивают применимость этой методики.

Слой с номером  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ,  $n$  — число слоев) отнесем к системе координат  $(Oxyz)_j$ , оси которой совпадают с осями ортотропии  $j$ -го слоя ( $z_j$  ортогональна его срединной поверхности). Введем глобальную систему  $O\xi_1\xi_2z$ , направления осей  $\xi_1, \xi_2$  которой связаны с линиями главных кривизн оболочки. Ориентация  $j$ -го слоя в структуре композитной оболочки определяется значением угла  $\varphi_j$ , отсчитываемого от  $\xi_1$  до  $x_j$ . Влиянием компонент  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$  тензора напряжений на процесс разрушения пренебрегаем. Максимальные и минимальные напряжения цикла выводятся по известной формуле

$$\sigma_{\min}^{\alpha\beta} = \sigma_m^{\alpha\beta} \pm \sigma_a^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y \vee 1, 2.$$

Здесь  $\sigma_m^{\alpha\beta}$  — средние напряжения цикла;  $\sigma_a^{\alpha\beta}$  — амплитудные значения переменной части напряжений (в дальнейшем один и тот же индекс может занимать как верхнюю, так и нижнюю позиции).

Условие достижения предельного состояния для  $j$ -го слоя при заданной долговечности  $N$  ( $N$  — число циклов до разрушения) запишем в виде

$$(1) \quad (a_1\sigma_{xx}^2 + 2a_2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + a_3\sigma_{yy}^2 + 2a_4\sigma_{xx} + 2a_5\sigma_{yy} + a_6\sigma_{xy}^2)_m + (b_1\sigma_{xx}^2 + 2b_2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + b_3\sigma_{yy}^2 + b_4\sigma_{xy}^2)_a = 1.$$

В пространстве величин  $\sigma_m^{\alpha\beta}, \sigma_a^{\alpha\beta}$  уравнению (1) соответствует некоторая поверхность (гиперповерхность), являющаяся обобщением диаграммы предельных амплитуд (диаграммы Хейя). При записи (1) учтены допущения о характере напряженно-деформированного состояния. Требование инвариантности (1) относительно трансформации  $x_j$  на  $-x_j$  и  $y_j$  на  $-y_j$  приводит к требованию равенства нулю слагаемых, линейных относительно  $\sigma_{xy}$ . При  $\sigma_m^{\alpha\beta} \equiv 0$  ( $\alpha, \beta = x, y$ ) (1) должно описывать поверхность в пространстве  $\sigma_a^{\alpha\beta}$ , центр симметрии которой совпадает с началом координат. Поэтому в нем отсутствуют члены, содержащие только  $\sigma_a^{xx}, \sigma_a^{yy}$ . Сечения поверхности (1) плоскостями  $(\sigma_m^{\alpha\beta}, \sigma_a^{\alpha\beta})$  ( $\alpha, \beta = x, y$ ) должны быть симметричны относительно осей  $\sigma_m^{\alpha\beta}$  (по этой причине можно изображать диаграмму Хейя только для положительных  $\sigma_a$  в системе  $\sigma_m O\sigma_a$ ), поэтому в (1) нет слагаемых с произведениями  $\sigma_m^{\alpha\beta}\sigma_a^{\alpha\beta}$ . Коэффициенты  $a_1^j, \dots, a_6^j$  в (1) определяются по результатам испытаний при кратковременном статическом нагружении, а коэффициенты  $b_1^j(N), \dots, b_4^j(N)$  —

при симметричных циклах. Для нахождения  $b_1^j, \dots, b_4^j$  необходимо построить кривые усталости (кривые Веллера). Для построения каждой отдельной кривой усталости нужно, сохраняя постоянным направление «вектора» с компонентами  $\sigma_a^{\alpha\beta}$ , изменять только его длину и вычислять соответствующие значения долговечности. По аналогии с понятиями характерных путей нагружения и характерных прочностей [1, с. 241] полезно ввести понятия характерных направлений для «вектора» с компонентами  $\sigma_a^{\alpha\beta}$  и характерных кривых усталости. Аналитическая аппроксимация экспериментальных кривых усталости (или их отдельных участков) даст возможность рассмотреть коэффициенты  $b_1^j, \dots, b_4^j$  как функции долговечности  $N$ .

Формально сведем задачу о несущей способности слоистых композитных оболочек при циклическом нагружении к задаче об их прочности при кратковременном статическом нагружении. В (1) группу слагаемых, содержащихся во второй скобке, обозначим как

$$\omega_a^j = (b_1\sigma_{xx}^2 + 2b_2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + b_3\sigma_{yy}^2 + b_4\sigma_{xy}^2)_a^j.$$

Пусть слагаемые напряжений  $\sigma_a^{\alpha\beta}$  входят в набор исходных условий задачи (допустимые области этих величин устанавливаются с использованием неравенств  $0 \leq \omega_a^j \leq 1$ ). С учетом сказанного (1) принимает вид

$$(2) \quad (a_1\sigma_{xx}^2 + 2a_2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + a_3\sigma_{yy}^2 + 2a_4\sigma_{xx} + 2a_5\sigma_{yy} + a_6\sigma_{xy}^2)_m^j = 1 - \omega_a^j.$$

Предположим, что после определенного числа циклов силового воздействия процесс накопления микроповреждений (рассеянных по объему) достигает такого уровня, когда эффективное сечение (по сплошной части материала) становится достаточно мало, уровень напряжений в материале достигает опасного значения, что приводит к его интенсивному деформированию и последующему разрушению. Состояние материала, при котором начинается интенсивное развитие деформаций (скорости деформаций большие), естественно принять за предельное (по времени оно непосредственно предшествует долговечности  $N$ ). На основе вышесказанного для решения поставленной задачи можно использовать процедуру, подробно изложенную в [7]. Критерий потери несущей способности (2) в системе  $O\xi_1\xi_2z$

$$(3) \quad \Phi_j = (A\sigma_{11}^2 + 2B\sigma_{11}\sigma_{22} + C\sigma_{22}^2 + 2D\sigma_{11} + 2E\sigma_{22} + L\sigma_{12}^2 + 2P\sigma_{11}\sigma_{12} + 2R\sigma_{22}\sigma_{12} + 2Q\sigma_{12})_m^j + F_j = 0,$$

где  $F_j = \omega_a^j - 1$ ;  $A_j, \dots, Q_j$  линейно зависят от  $a_1^j, \dots, a_6^j$  и являются функциями угла ориентации  $j$ -го слоя в пакете  $\varphi_j$ . Уравнение (3) — уравнение предельной поверхности в пространстве величин  $\sigma_m^{\alpha\beta}$  (свободный член зависит от заданных значений  $\sigma_a^{\alpha\beta}$ ). Считаем, что в предельном состоянии материал устойчив, т. е. справедлив постулат Друкера [8]. Отсюда следует, что предельная поверхность должна быть выпуклой. Напряжения  $\sigma_m^{\alpha\beta}$  выступают в качестве обобщенных сил [8]. Вектор скоростей соответствующих обобщенных перемещений (с компонентами  $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ ), согласно постулату Друкера, должен быть направлен по внешней нормали к поверхности (3):

$$(4) \quad \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^j = (\lambda \partial\Phi/\partial\sigma_m^{\alpha\beta})_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Не следует  $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  отождествлять с традиционными скоростями деформаций сплошной среды. Здесь они выступают в роли кинематических параметров, представляющих скорости обобщенных перемещений, удовлетворяющих условию  $d\sigma d\varepsilon \geq 0$  (гипотеза). Кратко опишем дальнейший ход решения задачи (см. [7]). Используя (3) и (4), определяем  $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^j$ . Рашаем по-

лученную систему уравнений относительно  $(\sigma_m^{\alpha\beta})_j$ . Подставляя  $(\sigma_m^{\alpha\beta})_j$  в (3), выражаем  $\lambda_j \geq 0$  через  $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^j$ . Полагаем, что в разложении кинематических характеристик  $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^j$  в ряд по  $z$  достаточно сохранить линейную часть (гипотеза):

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^j = \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - z\dot{\kappa}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

(ось  $z$  ортогональна поверхности приведения оболочки  $S_0$ , где  $z = 0$ ). Вычисляем статические слагаемые погонных сил и моментов, приведенных к  $S_0$ :

$$T_m^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^n \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_m^{\alpha\beta} dz, \quad M_m^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^n \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} \sigma_m^{\alpha\beta} z dz,$$

где  $z_{1j} < z_{2j}$  — координаты точек, лежащих на ограничивающих поверхностях  $j$ -го слоя;  $\alpha, \beta = 1, 2$ . В итоге

$$(5) \quad T_m^i = \sum_{j=1}^n \left[ 0,5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^j (I_{1j} \dot{e}_k - I_{2j} \dot{\kappa}_k) - \Delta_{ij} h_j \right] / \Delta_j;$$

$$M_m^i = \sum_{j=1}^n \left[ 0,5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^j (I_{2j} \dot{e}_k - I_{3j} \dot{\kappa}_k) - \Delta_{ij} h_j z_j \right] / \Delta_j.$$

Здесь  $i = \overline{1, 3}$ ;  $T_\alpha \equiv T_{\alpha\alpha}$ ;  $M_\alpha \equiv M_{\alpha\alpha}$ ;  $\dot{e}_\alpha \equiv \dot{e}_{\alpha\alpha}$ ;  $\dot{\kappa}_\alpha \equiv \dot{\kappa}_{\alpha\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ );  $T_3 \equiv T_{12}$ ;  $M_3 \equiv M_{12}$ ;  $e_3 \equiv e_{12}$ ;  $\kappa_3 \equiv \kappa_{12}$ ;  $h_j = (z_{2j} - z_{1j})/2$ ;  $z_j = (z_{2j} + z_{1j})/2$ ;  $\Delta_j, \Delta_{ij}, \delta_{ik}^j$  — определители, элементами которых являются коэффициенты из (3) (см. [7]). Интегралы  $I_{ij}$  вычисляются согласно выражению

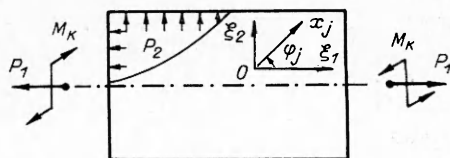
$$I_{ij} = \int_{z_{1j}}^{z_{2j}} (z^{i-1} / \lambda_j) dz, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Уравнения (5) — параметрические уравнения предельной поверхности для слоистых композитных оболочек в пространстве статических слагаемых сил и моментов. Величины  $T_m^{\alpha\beta}, M_m^{\alpha\beta}$  в (5), действуя совместно с циклическими силами и моментами (их амплитудные значения определяются слагаемыми напряжений  $\sigma_a^{\alpha\beta}$ ), по достижении числом циклов нагружения значения  $N$  приводят композитную оболочку к усталостному разрушению. Гиперповерхность (5) в пространстве величин  $T_m^{\alpha\beta}, M_m^{\alpha\beta}$  есть сечение более общей предельной поверхности (поверхности статической прочности и ограниченной выносливости) гиперплоскостью, проходящей через конец «вектора», компоненты которого определяются амплитудными значениями  $\sigma_a^{\alpha\beta}$  переменной части напряжений, ортогонально этому «вектору».

С целью уменьшения объема экспериментальной работы, необходимой для вычисления коэффициентов уравнения (1), можно воспользоваться выводами, сделанными в [4], где сказано, что устойчивая корреляция между  $\sigma_{-1}$  и  $\sigma_{\min}^*$  ( $\sigma_{-1}$  — усталостная прочность при долговечности  $N$ , соответствующая симметричным циклам,  $\sigma_{\min}^*$  — меньший из пределов пропорциональности при статическом растяжении и сжатии вдоль одного и того же направления) не зависит от направления вырезки образцов для данного армированного пластика. Это может применяться для существенного сокращения объема усталостных испытаний ориентированных композитных материалов.

В качестве примера использования соотношений (5) приведем решение задачи о предельном состоянии цилиндрической оболочки с жесткими довышками. Оболочка нагружена осевой силой  $P_1$ , внутренним дав-

лением  $P_2$  и крутящим моментом  $M_K$  (на рис. 1 указаны положительные направления нагрузок). Введем безразмерные параметры  $\sigma_{\alpha\beta}^* = \sigma_{\alpha\beta}/\sigma_0$ ,  $t_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}/\sigma_0 H$ ,  $m_K = M_K/2\sigma_0 H A$ ,  $p_{1-} = P_1/\pi d H \sigma_0$ ,  $p_2 = P_2(d-H)^2/2d \cdot H \sigma_0$ . Здесь  $\sigma_0$  — величина, имеющая размерность напряжений;  $H$  — толщина оболочки,  $d$  — ее диаметр;  $A$  — площадь, ограниченная контуром поперечного сечения оболочки. Уравнения статики дают следующие соотношения между параметрами внешних нагрузок и внутренних усилий:



Р и с. 1

$$(6) \quad p_1 = t_{11} - 0,5t_{22}, \quad p_2 = t_{22}, \quad m_K = t_{12}.$$

Критерий потери несущей способности для  $j$ -го слоя при циклическом нагружении имеет вид (знак \* у безразмерных напряжений для удобства записи опущен)

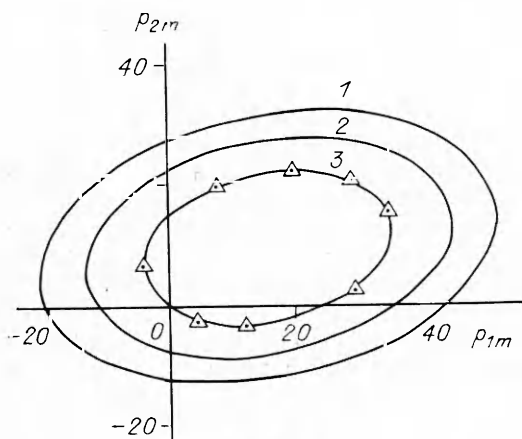
$$(7) \quad (1,50\sigma_{xx}^2 - 2,45\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 4,78\sigma_{yy}^2 - 38,2\sigma_{xx} - 40,7\sigma_{yy} + 26,1\sigma_{xy}^2)_m^j = 1399,3 - \omega_i^j,$$

где

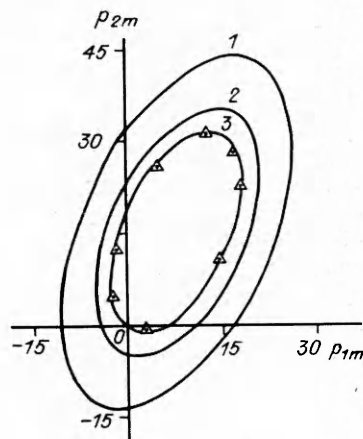
$$(8) \quad \omega_i^j = (28,2\sigma_{xx}^2 - 39,9\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 81,6\sigma_{yy}^2 + 1399,3\sigma_{xy}^2)_a^j.$$

При записи (7), (8) использованы экспериментальные результаты, приведенные в [5] для базы испытаний  $N = 10^6$  циклов (для стандартного стеклотекстолита ВФТ-С). Напряжения отнесены к  $\sigma_0 = \sigma_{xy}^i = 8,45$  МПа.

На рис. 2, 3 приведены различные предельные кривые, построенные в плоскости параметров  $(p_{1m}, p_{2m})$  с использованием соотношений (5)–(8) (индексом  $m$  отмечены статические слагаемые, индексом  $a$  — амплитудные значения переменной части нагрузок). Результаты, приведенные на рис. 2, получены для случая, когда угол ориентации  $\phi_j$  для всех слоев равен нулю, а на рис. 3 — для оболочек, у которых слои с углом намотки  $+45^\circ$  чередуются со слоями с углом  $-45^\circ$ . Число слоев всюду равно одиннадцати. Кривые 1 на рис. 2, 3 соответствуют случаю, когда амплитуда цикла равна нулю (кривые прочности при кратковременном статическом нагружении). Кривые 2 и 3 на рис. 2 отвечают амплитудным значениям переменной части параметров нагрузок  $p_{1a} = 5$ ,  $p_{2a} = m_{Ka} = 0$  и  $p_{1a} = 7,035$ ,  $p_{2a} = m_{Ka} = 0$  соответственно. Очень близко к кривой 3 располагается другая кривая, когда параметры амплитудных составляющих нагрузок следующие:  $p_{1a} = p_{2a} = 0$ ,  $m_{Ka} = 0,99$  (некоторые ее точки



Р и с. 2



Р и с. 3

помещены в треугольниках). Аналогично на рис. 3 кривые 2 и 3 при  $p_{1a} = 1,5$ ,  $p_{2a} = m_{ка} = 3$  и  $p_{1a} = p_{2a} = 0$ ,  $m_{ка} = 3$ . Очень близко к кривой 3 на рис. 3 располагается другая кривая с параметрами  $p_{1a} = -1,435$ ,  $p_{2a} = m_{ка} = 0,95$  (некоторые ее точки помещены в треугольниках)

На основе приведенных выше результатов можно сделать вывод о том, что разрабатываемая методика определения несущей способности слоистых композитных оболочек при циклическом нагружении позволяет получать качественно правильную картину этого явления. Методика дает ориентиры при отыскании параметров армированных материалов для нахождения усталостной прочности конструкций, изготовленных из этих материалов. Для проверки количественного соответствия в действительности получаемых результатов необходимо провести новые экспериментальные исследования.

Предложенный метод помогает осуществить и обратный ход: по испытаниям слоистого композита — образца заданной структуры сделать выводы о свойствах монослоя и затем эти результаты по предложенной методике применить к композиту иной компоновки слоев.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. 3-е изд. — Рига: Зинатне, 1980.
2. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. — Новосибирск: Наука, 1986.
3. Ашкенази Е. К., Поздняков А. А. Испытание стеклопластиков на усталость // Завод. лаб. — 1961. — Т. 27, № 10.
4. Олдырев П. П. О корреляции между статической и усталостной прочностью армированных пластиков // Механика полимеров. — 1973. — № 3.
5. Олдырев П. П. Об оценке анизотропии усталостной прочности композитных материалов // Механика композит. материалов. — 1982. — № 1.
6. Петренко И. П. Диаграмма усталостной прочности стеклопластика ВФТ-С при повторно-переменном осевом нагружении // ДАН УССР. — 1965. — № 8.
7. Терегулов И. Г., Сибгатуллин Э. С., Маркин О. А. Предельное состояние многослойных композитных оболочек // Механика композит. материалов. — 1988. — № 4.
8. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. — М.: Наука, 1978.

г. Набережные Челны, г. Казань

Поступила 25/VII 1989 г.

УДК 537.32

*П. Л. Абидуев, В. М. Корнев*

#### ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ КАМЕР ДЛЯ ТЕРМОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ \*

Исследуется тепловой режим работы стенок камеры для удаления заусенцев на материалах. Очень часто такие камеры выполнены в виде толстостенных цилиндрических сосудов, стенки которых имеют тепловую защиту (тонкий внутренний слой из материала с высокой теплопроводностью). Стенка камеры моделируется бесконечной двухслойной пластиной, внешняя поверхность пластины поддерживается при заданной температуре, а на внутренней поверхности задан тепловой поток [1], характеризующий теплопередачу продуктов детонации газовой смеси в стенку камеры. Считается, что на границе раздела слоев выполнены условия идеального теплового контакта. Режим работы камер для удаления заусенцев на материалах характеризуется периодичностью циклов обработки, составляющих, как правило, 15–20 с.

\* Полностью рукопись депонирована в ВИНТИ 11.06.90, № 3283—В90.