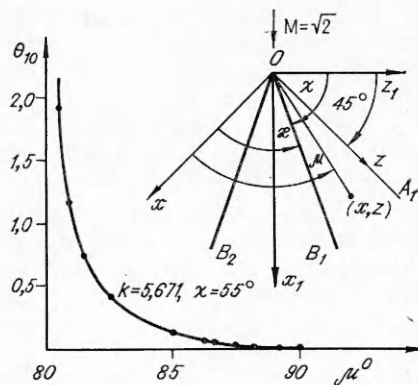


$\chi = 70^\circ$; $k = 1,428$, $\chi = 80^\circ$ приведены в таблице. Угол луча μ (правая часть рис. 4) задается через значение тангенса угла наклона передней кромки $\operatorname{tg} \mu = ak$ ($a = 1,05; 1, 1; \dots; 6; 12$). Луч $\operatorname{tg} \mu = k$ соответствует передней кромке OB_1 ($k = \operatorname{tg} \chi$), луч $\operatorname{tg} \mu = \infty$ — головной характеристике OA_1 . В левой части рис. 4 дан график $\theta_{10} = \theta_{10}(\mu)$ для пластины $k = 5,671$, $\chi = 55^\circ$ ($\mu = 80^\circ$ отвечает передней кромке OB_1 , $\mu = 90^\circ$ — головной характеристике OA_1).



Р и с. 4

В таблице приведены также значения θ_1 на этих же лучах согласно точному решению [7, с. 129]. На передней кромке OB_1 значения θ_{10} и θ_1 имеют особенность $r^{-1/2}$, на головной характеристике OA_1 $\theta_{10} = \theta_1 = 0$. На ближайшем к передней кромке луче ($\operatorname{tg} \mu = 1,05k$) отклонение значения θ_{10} от точного решения составляет для пластины $k = 5,671$, $\chi = 55^\circ$ менее 0,01 %, для $k = 2,145$, $\chi = 70^\circ$ — менее 1 %, для $k = 1,428$, $\chi = 80^\circ$ — менее 5 %.

Как и следовало ожидать, с увеличением степени отхода передних кромок от звуковых отклонение нулевого приближения от точного увеличивается. Но даже в случае наиболее узкого из применяемых в практике самолетостроения крыла $\chi = 80^\circ$ ошибка в 5 % для числа $M = \sqrt{2}$ в определении схода потока вне крыла при расчете суммарных аэродинамических характеристик будет менее значительной. С увеличением числа Маха ($M > \sqrt{2}$) степень отхода передних кромок от звуковых конкретного крыла с заданным значением угла стреловидности χ уменьшается, и расчет аэродинамических характеристик крыла по нулевому приближению становится более достоверным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. — М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
2. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. — М.: Наука, 1986.
3. Гуревич М. И. О подъемной силе стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке // ПММ. — 1946. — Т. 10, вып. 4.
4. Кузнецов А. В. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла с дозвуковыми кромками // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1981. — № 5.
5. Воробьев Н. Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. — Новосибирск: Наука, 1985.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Вып. 1. Метрические и нормированные пространства. — М.: Изд-во МГУ, 1954.
7. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях/Под ред. А. Ф. Доновна, Г. Р. Лоуренса. — М.: ИЛ, 1959.

г. Новосибирск

Поступила 28/XI 1988 г.,
в окончательном варианте — 14/II 1989 г.

УДК 532,516

В. Л. Сенницкий

О САМОДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

1. Многие тела (корабли, живые существа) могут совершать самодвижение в жидкости, т. е., находясь в жидкости, перемещаться, отталкиваясь от нее.

© 1990 Сенницкий В. Л.

Как известно (см., например, [1]), уравнения движения твердого тела относительно инерциальной системы отсчета имеют следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{P}_T}{dt} = \mathbf{F}; \quad \frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \mathbf{N},$$

где t — время; \mathbf{P}_T — импульс тела; \mathbf{F} — полная внешняя сила, действующая на тело; \mathbf{L}_T — момент импульса тела относительно точки O (начала отсчета); \mathbf{N} — полный момент внешних сил, действующих на тело, относительно точки O . В соответствии с этим, при перемещении тела за счет отталкивания от окружающей его жидкости должны выполняться соотношения

$$(1.1) \quad \frac{d\mathbf{P}_T}{dt} = \mathbf{S}_{\text{ж} \rightarrow \text{т}};$$

$$(1.2) \quad \frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \mathbf{T}_{\text{ж} \rightarrow \text{т}},$$

где $\mathbf{S}_{\text{ж} \rightarrow \text{т}}$ — импульс, передаваемый жидкостью телу в единицу времени; $\mathbf{T}_{\text{ж} \rightarrow \text{т}}$ — момент импульса, передаваемый жидкостью телу в единицу времени, относительно точки O .

Соотношения (1.1), (1.2) являются уравнениями самодвижения тела в жидкости.

При наличии полей массовых сил соотношения (1.1), (1.2) должны быть видоизменены посредством добавления к их правым частям полной массовой силы, действующей на тело, и полного момента массовых сил, действующих на тело, относительно точки O .

Самодвижение тела в жидкости происходит за счет взаимодействия между его границей и жидкостью (но не вследствие каких-либо воздействий на жидкость, которые могут осуществляться и в отсутствие в ней тела). Ввиду этого граница самодвижущегося тела является его движителем. Работа движителя при самодвижении соответствует тому, что на границе тела обеспечиваются условия, при которых выполняются уравнения самодвижения.

2. В [2, 3] найдены приближенные решения задач о стационарном обтекании самодвижущихся тел (кругового цилиндра и шара) вязкой несжимаемой жидкостью. В данной работе далее изучается задача о нестационарном обтекании самодвижущегося тела вязкой несжимаемой жидкостью.

Самодвижущееся тело представляет собой однородный шар, имеющий движущуюся границу. Скорость \mathbf{U} движения границы относительно шара периодически с периодом T изменяется со временем. Течение жидкости и движение шара рассматриваются относительно невращающейся системы прямоугольных координат X_1, X_2, X_3 , начало которой находится в центре шара. Шар вращается вокруг оси X_3 . Течение жидкости симметрично относительно оси X_3 , является установившимся (не зависящим от начальных условий) и периодически с периодом T изменяется со временем.

Пусть $\tau = t/T$; A — радиус шара; $x_1 = X_1/A$, $x_2 = X_2/A$, $x_3 = X_3/A$; $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$; r, θ, φ — сферические координаты, связанные с x_1, x_2, x_3 равенствами $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \theta$; $\rho_{\text{ш}}$ — плотность шара; $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости; $\rho = \rho_{\text{ш}}/\rho_{\text{ж}}$; $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$; $W\mathbf{k}$ — скорость движения центра шара относительно жидкости, находящейся на бесконечности; $w = TW/A$; $\Omega\mathbf{k}$ — угловая скорость вращения шара; $\omega = T\Omega$; \mathbf{V} — скорость течения жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/A$; v_r, v_θ, v_φ — соответственно r -, θ -, φ -компоненты вектора \mathbf{v} ; P — давление в жидкости; P_∞ — давление в жидкости на бесконечности; $p = T^2(P - P_\infty)/(\rho_{\text{ж}}A^2)$; U_θ, U_φ — соответственно θ -, φ -компоненты вектора \mathbf{U} ; U — наибольшее значение $|\mathbf{U}|$; $u_\theta = U_\theta/U$ ($u_\theta = u_\theta(\theta, \tau)$); $u_\varphi = U_\varphi/U$ ($u_\varphi = u_\varphi(\theta, \tau)$); $\varepsilon = UT/A$; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\text{Re} = A^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; \mathbf{P} — тензор напряжений в жидкости; $\mathbf{p} = T^2\mathbf{P}/(\rho_{\text{ж}}A^2)$; \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к

поверхности; s — сфера $r = 1$; $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$; $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$.

Уравнения самодвижения шара, уравнения Навье — Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на границе шара и на бесконечности, имеют следующий вид:

$$(2.1) \quad \int_s \int \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \, ds - \frac{4\pi}{3} \rho \frac{dw}{d\tau} \mathbf{k} = 0;$$

$$(2.2) \quad \int_s \int \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \, ds - \frac{8\pi}{15} \rho \frac{d\omega}{d\tau} \mathbf{k} = 0;$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \frac{4}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \frac{dw}{d\tau} \mathbf{k} = 0;$$

$$(2.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0;$$

$$(2.5) \quad v_r = 0, v_\theta = \varepsilon u_\theta, v_\varphi = \varepsilon u_\varphi + \omega \sin \theta \text{ при } r = 1;$$

$$(2.6) \quad \mathbf{v} \sim -w \mathbf{k}, p \sim 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Требуется найти w , ω , \mathbf{v} , p .

3. Будем рассматривать задачу (2.1)–(2.6) при малых по сравнению с единицей значениях ε .

Предположим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(3.1) \quad w(\tau, \varepsilon, \text{Re}, \rho) \sim \sum_{n=1}^6 \varepsilon^n w_{(n)}(\tau, \text{Re}, \rho);$$

$$(3.2) \quad \omega(\tau, \varepsilon, \text{Re}, \rho) \sim \varepsilon \omega_{(1)}(\tau, \text{Re}, \rho);$$

$$(3.3) \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau, \varepsilon, \text{Re}, \rho) \sim \varepsilon \mathbf{v}_{(1)}(\mathbf{r}, \tau, \text{Re}, \rho);$$

$$(3.4) \quad p(\mathbf{r}, \tau, \varepsilon, \text{Re}, \rho) \sim \varepsilon p_{(1)}(\mathbf{r}, \tau, \text{Re}, \rho).$$

Асимптотические разложения, полученные при $\varepsilon \rightarrow 0$ и постоянных \mathbf{r} , τ , Re , ρ , будем называть внутренними. Используя (2.1)–(2.6), (3.1)–(3.4), найдем

$$(3.5) \quad \frac{1}{\text{Re}} \int_0^\pi \left[\left(-\text{Re} p_{(1)} + 2 \frac{\partial v_{(1)r}}{\partial r} \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial v_{(1)\theta}}{\partial r} - u_\theta \right) \sin \theta \right] \Big|_{r=1} \sin \theta \, d\theta - \frac{2}{3} \rho \frac{dw_{(1)}}{d\tau} = 0;$$

$$(3.6) \quad \frac{1}{\text{Re}} \int_0^\pi \left(\frac{\partial v_{(1)\varphi}}{\partial r} - u_\varphi - \omega_{(1)} \sin \theta \right) \Big|_{r=1} \sin^2 \theta \, d\theta - \frac{4}{15} \rho \frac{d\omega_{(1)}}{d\tau} = 0;$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_{(1)}}{\partial \tau} + \nabla p_{(1)} - \frac{4}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}_{(1)} + \frac{dw_{(1)}}{d\tau} \mathbf{k} = 0;$$

$$(3.8) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_{(1)} = 0;$$

$$(3.9) \quad v_{(1)r} = 0, v_{(1)\theta} = u_\theta, v_{(1)\varphi} = u_\varphi + \omega_{(1)} \sin \theta \text{ при } r = 1;$$

$$(3.10) \quad \mathbf{v}_{(1)} \sim -w_{(1)} \mathbf{k}, p_{(1)} \sim 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

где $v_{(1)r}$, $v_{(1)\theta}$, $v_{(1)\varphi}$ — соответственно r -, θ -, φ -компоненты вектора $\mathbf{v}_{(1)}$.

Представим u_θ , u_φ в виде рядов

$$u_\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\eta_{l0} + \text{Real} \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{lm} e^{2m\pi i \tau} \right) P_l^{(1)}(\cos \theta);$$

$$u_\varphi = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\xi_{l0} + \text{Real} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_{lm} e^{2m\pi i \tau} \right) P_l^{(1)}(\cos \theta),$$

где η_{l0} , η_{lm} , ξ_{l0} , ξ_{lm} — постоянные ($\eta_{10} < 0$, $\eta_{20} \neq 0$, $\xi_{20} \neq 0$); $P_l^{(1)}$ — присоединенные функции Лежандра.

Задача (3.5)—(3.10) имеет решение

$$(3.11) \quad w_{(1)} = w_{(1)0} + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} w_{(1)m} e^{2m\pi i \tau};$$

$$(3.12) \quad \omega_{(1)} = \omega_{(1)0} + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{(1)m} e^{2m\pi i \tau};$$

$$(3.13) \quad v_{(1)r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_{(1)\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r};$$

$$(3.14) \quad v_{(1)\varphi} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[(\xi_{l0} + \omega_{(1)0} \delta_{l1}) r^{-l-1} + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_{lm} + \omega_{(1)m} \delta_{l1}}{K_{l+1/2}(q_m)} r^{-1/2} K_{l+1/2}(q_m r) e^{2m\pi i \tau} \right] P_l^{(1)}(\cos \theta);$$

$$(3.15) \quad p_{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial r} \psi_l + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{n(n+1)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2n(n+1)}{r^3} \right] \psi_l - \right. \\ \left. - \frac{dw_{(1)}}{d\tau} r \delta_{l1} \right\} P_l(\cos \theta)$$

$$(w_{(1)0} = \frac{2}{3} \eta_{10}; \quad w_{(1)m} = 6 \frac{q_m + 1}{(2\rho + 1) q_m^2 + 9q_m + 9} \eta_{1m};$$

$$\omega_{(1)0} = -\xi_{10}; \quad \omega_{(1)m} = -5 \frac{i_m^2 + 3i_m + 3}{\rho q_m^3 + (\rho + 5) q_m^2 + 15q_m + 15} \xi_{1m};$$

$$\psi = \sum_{l=1}^{\infty} \psi_l P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta; \quad \psi_l = -\frac{1}{2} w_{(1)} r^2 \delta_{l1} + \frac{1}{4} \left[(\xi_{l0} + \omega_{(1)0} \delta_{l1}) r^{-l} - \right.$$

$$\left. - (2\eta_{l0} - 3\omega_{(1)0} \delta_{l1}) r^{-l+2} \right] - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[2q_m \frac{K_{l+1/2}(q_m)}{K_{l-1/2}(q_m)} \eta_{lm} - \right. \right.$$

$$\left. - (q_m^2 + 3q_m + 3) \omega_{(1)m} \delta_{l1} \right] r^{-l} - q_m \frac{2\eta_{lm} - 3\omega_{(1)m} \delta_{l1}}{K_{l-1/2}(q_m)} r^{l/2} K_{l+1/2}(q_m r) \left. \right\} \frac{e^{2m\pi i \tau}}{q_m^2};$$

$q_m = (1 + i) \sqrt{m\pi \operatorname{Re}}$; δ — символ Кронекера; P_l — полиномы Лежандра; $K_{l\pm 1/2}$ — функции Макдональда).

Соотношениями

$$(3.16) \quad w = \varepsilon w_{(1)}, \quad \omega = \varepsilon \omega_{(1)}, \quad \mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}_{(1)}, \quad p = \varepsilon p_{(1)}$$

и (3.11)—(3.15) определяется приближенное решение задачи (2.1)—(2.6).

4. Решение (3.14)—(3.16) точно удовлетворяет условиям (2.6) на бесконечности. Однако им неправильно характеризуется возмущение течения жидкости при $r \geq 1/\varepsilon$ (используя (3.13), (3.14), (3.16), нетрудно найти, что при $r \geq 1/\varepsilon$ в (2.3) нельзя пренебрегать величиной $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$).

Определим приближенно безразмерные возмущения $\mathbf{v} + w\mathbf{k}$ и p скорости течения жидкости и давления в ней во всей области, занимаемой жидкостью. Наряду с внутренними разложениями (3.3), (3.4) будем рассматривать также внешние разложения \mathbf{v} , p . Внутренние и внешние разложения \mathbf{v} , p должны согласовываться друг с другом в соответствии с принципом асимптотического сращения [4].

Представим уравнения (2.3), (2.4) и условия (2.6) в следующем виде:

$$(4.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \varepsilon (\mathbf{v} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v} + \varepsilon \widehat{\nabla} p - \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{Re}} \widehat{\Delta} \mathbf{v} + \frac{dw}{d\tau} \mathbf{k} = 0;$$

$$(4.2) \quad \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0;$$

$$(4.3) \quad \mathbf{v} \sim -w\mathbf{k}, \quad p \sim 0 \quad \text{при } \widehat{r} \rightarrow \infty,$$

где $\widehat{\nabla} = (\partial/\partial\widehat{x}_1, \partial/\partial\widehat{x}_2, \partial/\partial\widehat{x}_3)$; $\widehat{\Delta} = \partial^2/\partial\widehat{x}_1^2 + \partial^2/\partial\widehat{x}_2^2 + \partial^2/\partial\widehat{x}_3^2$ ($\widehat{x}_1 = \varepsilon x_1$, $\widehat{x}_2 = \varepsilon x_2$, $\widehat{x}_3 = \varepsilon x_3$); $\widehat{r} = \varepsilon r$. Предположим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(4.4) \quad \mathbf{v}\left(\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{\varepsilon}, \tau, \varepsilon, \text{Re}, \rho\right) \sim -\varepsilon w_{(1)}\mathbf{k} + \sum_{n=2}^6 \varepsilon^n \mathbf{v}^{(n)}(\widehat{\mathbf{r}}, \tau, \text{Re}, \rho);$$

$$(4.5) \quad p\left(\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{\varepsilon}, \tau, \varepsilon, \text{Re}, \rho\right) \sim \sum_{n=2}^6 \varepsilon^{n-1} p^{(n)}(\widehat{\mathbf{r}}, \tau, \text{Re}, \rho),$$

где $\widehat{\mathbf{r}} = \varepsilon \mathbf{r}$. Асимптотические разложения, полученные при $\varepsilon \rightarrow 0$ и постоянных $\widehat{\mathbf{r}}, \tau, \text{Re}, \rho$, будем называть внешними. Используя (4.1)–(4.5), найдем

$$(4.6) \quad \frac{\partial \mathbf{v}^{(K)}}{\partial \tau} + \widehat{\nabla} p^{(K)} + \frac{d w^{(K)}}{d \tau} \mathbf{k} - \left[w_{(1)}(\mathbf{k} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}^{(2)} + \frac{1}{\text{Re}} \widehat{\Delta} \mathbf{v}^{(2)} \right] \delta_{K4} - \\ - \left[w_{(1)}(\mathbf{k} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}^{(3)} - (\mathbf{v}^{(2)} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}^{(2)} + \frac{1}{\text{Re}} \widehat{\Delta} \mathbf{v}^{(3)} \right] \delta_{K5} - \\ - \left[w_{(1)}(\mathbf{k} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}^{(4)} - (\mathbf{v}^{(2)} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}^{(3)} - (\mathbf{v}^{(3)} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}^{(2)} + \frac{1}{\text{Re}} \widehat{\Delta} \mathbf{v}^{(4)} \right] \delta_{K6} = 0;$$

$$(4.7) \quad \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{v}^{(K)} = 0;$$

$$(4.8) \quad \mathbf{v}^{(K)} \sim -w_{(K)}\mathbf{k}, \quad p^{(K)} \sim 0 \quad \text{при } \widehat{r} \rightarrow \infty$$

($K = 2, 3, 4, 5, 6$).

Условия согласования внутренних и внешних разложений \mathbf{v}, p имеют следующий вид:

$$(4.9) \quad I_\varepsilon E_\varepsilon L \mathbf{v} = E_\varepsilon L I_\varepsilon \mathbf{v} \quad (L = 1, 2, 3, 4, 5, 6);$$

$$(4.10) \quad I_\varepsilon E_\varepsilon M p = E_\varepsilon M I_\varepsilon p \quad (M = 0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

где I и E — операторы соответственно внутренних и внешних разложений (см. [2, 5]).

Используя (3.3), (3.4), (3.13)–(3.15), (4.4), (4.5), найдем, что при $L = 1, M = 0$ условия (4.9), (4.10) являются выполненными.

Представим $w_{(K)}, \mathbf{v}^{(K)}, p^{(K)}$ ($K = 2, 3, 4, 5$) в виде рядов

$$w_{(K)} = w_{(K)0} + \text{Real} \sum_{m=1}^{\infty} w_{(K)m} e^{2m\pi i \tau};$$

$$\mathbf{v}^{(K)} = \mathbf{v}_0^{(K)} + \text{Real} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{v}_m^{(K)} e^{2m\pi i \tau};$$

$$p^{(K)} = p_0^{(K)} + \text{Real} \sum_{m=1}^{\infty} p_m^{(K)} e^{2m\pi i \tau},$$

где $w_{(K)0}, w_{(K)m}$ — постоянные; $\mathbf{v}_0^{(K)}, \mathbf{v}_m^{(K)}, p_0^{(K)}, p_m^{(K)}$ — функции от $\widehat{\mathbf{r}}$.

Из (4.6)–(4.10) при $K = 2, L = 2, M = 1$ и (3.3), (3.4), (3.13)–(3.15), (4.4), (4.5) следует, что

$$(4.11) \quad \mathbf{v}_m^{(2)} = -w_{(2)m}\mathbf{k} \quad (m = 1, 2, \dots);$$

$$(4.12) \quad p^{(2)} = 0;$$

$$(4.13) \quad \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{v}_0^{(2)} = 0;$$

$$(4.14) \quad \mathbf{v}_0^{(2)} \sim -w_{(2)0}\mathbf{k} \quad \text{при } \widehat{r} \rightarrow \infty;$$

$$(4.15) \quad I_\varepsilon (\varepsilon^2 v_{0r}^{(2)}) = 0, \quad I_\varepsilon (\varepsilon^2 v_{0\theta}^{(2)}) = 0, \quad I_\varepsilon (\varepsilon^2 v_{0\phi}^{(2)}) = 0,$$

где $v_{0r}^{(2)}, v_{0\theta}^{(2)}, v_{0\varphi}^{(2)}$ — соответственно r -, θ -, φ -компоненты вектора $\mathbf{v}_0^{(2)}$. Используя (4.6) при $K = 4$ и (3.11), (4.11), получим

$$(4.16) \quad \operatorname{Re} \widehat{\nabla} p_0^{(4)} + 2\lambda (\mathbf{k} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}_0^{(2)} - \widehat{\Delta} \mathbf{v}_0^{(2)} = 0,$$

где $\lambda = -\operatorname{Re} \eta_{10}/3$. Задача (4.13)–(4.16) имеет решение

$$(4.17) \quad \mathbf{v}_0^{(2)} = -w_{(2)0} \mathbf{k};$$

$$(4.18) \quad p_0^{(4)} = c$$

(c — постоянная).

Из (4.6)–(4.10) при $K = 3, L = 3, M = 2$ и (3.3), (3.4), (3.13)–(3.15), (4.4), (4.5) следует, что

$$(4.19) \quad \mathbf{v}_m^{(3)} = -w_{(3)m} \mathbf{k} \quad (m = 1, 2, \dots);$$

$$(4.20) \quad p^{(3)} = 0;$$

$$(4.21) \quad \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{v}_0^{(3)} = 0;$$

$$(4.22) \quad \mathbf{v}_0^{(3)} \sim -w_{(3)0} \mathbf{k} \quad \text{при } \widehat{r} \rightarrow \infty;$$

$$(4.23) \quad I_\varepsilon (\varepsilon^3 v_{0r}^{(3)}) = -3\varepsilon \eta_{20} r^{-2} P_2(\cos \theta),$$

$$I_\varepsilon (\varepsilon^3 v_{0\theta}^{(3)}) = 0, \quad I_\varepsilon (\varepsilon^3 v_{0\varphi}^{(3)}) = 0,$$

где $v_{0r}^{(3)}, v_{0\theta}^{(3)}, v_{0\varphi}^{(3)}$ — соответственно r -, θ -, φ -компоненты вектора $\mathbf{v}_0^{(3)}$. Используя (4.6) при $K = 5$ и (3.11), (4.11), (4.17), (4.19), получим

$$(4.24) \quad \operatorname{Re} \widehat{\nabla} p_0^{(5)} + 2\lambda (\mathbf{k} \cdot \widehat{\nabla}) \mathbf{v}_0^{(3)} - \widehat{\Delta} \mathbf{v}_0^{(3)} = 0.$$

Задача (4.21)–(4.24) имеет решение

$$(4.25) \quad v_{0r}^{(3)} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \cos \theta,$$

$$v_{0\theta}^{(3)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2\lambda r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \chi \sin \theta;$$

$$(4.26) \quad v_{0\varphi}^{(3)} = 0;$$

$$(4.27) \quad p_0^{(5)} = \frac{2\lambda}{\operatorname{Re}} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta + \frac{1}{r} \sin \theta \right) + c'$$

$$\left(\Phi = - \left(w_{(3)0} \widehat{r} + \frac{3\eta_{20}}{2\lambda r^2} \right) \cos \theta + \frac{\alpha}{r}; \quad \chi = -\frac{\lambda}{r} e^{\lambda \widehat{r}(\cos \theta - 1)} \left[3\eta_{20} + 2\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - 3\eta_{20} \left(1 + \frac{1}{\lambda r} \right) \cos \theta \right]; \quad c', \alpha \text{ — постоянные} \right).$$

Из (4.6), (4.8), (4.9) при $K = 4, L = 4$ и (3.3), (3.14), (4.4), (4.11), (4.17) следует, что

$$(4.28) \quad \frac{\partial v_\psi^{(4)}}{\partial \tau} = 0;$$

$$(4.29) \quad v_\psi^{(4)} \sim 0 \quad \text{при } \widehat{r} \rightarrow \infty;$$

$$(4.30) \quad I_\varepsilon (\varepsilon^4 v_\psi^{(4)}) = \varepsilon \xi_{20} r^{-3} P_2^{(1)}(\cos \theta),$$

где $v_\psi^{(4)}$ — φ -компонента вектора $\mathbf{v}^{(4)}$. Используя (4.6) при $K = 6$ и (3.11), (4.11), (4.17), (4.19), (4.26), (4.28), получим

$$(4.31) \quad 2\lambda \mathbf{k} \cdot \widehat{\nabla} v_\psi^{(4)} - \widehat{\Delta} v_\psi^{(4)} + \frac{v_\psi^{(4)}}{r^2 \sin^2 \theta} = 0.$$

Задача (4.29)–(4.31) имеет решение

$$(4.32) \quad v_{\varphi}^{(4)} = \frac{\lambda^2}{r} e^{\lambda \widehat{r}(\cos \theta - 1)} \left[\beta \left(1 + \frac{1}{\lambda r} \right) + \xi_{20} \left(i + \frac{3}{\lambda r} + \frac{3}{\lambda^2 r^2} \right) \cos \theta \right] \sin \theta$$

(β — постоянная).

При изменении τ импульс шара и жидкости, находящейся в области, ограниченной извне замкнутой поверхностью σ , содержащей внутри себя шар, и момент импульса шара и указанной жидкости относительно начала системы координат $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$ изменяются периодически с периодом 1. Ввиду этого должны выполняться равенства

$$(4.33) \quad \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\sigma} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] d\sigma d\tau = 0;$$

$$(4.34) \quad \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\sigma} \{\widehat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]\} d\sigma d\tau = 0.$$

Используя (3.11), (4.4), (4.5), (4.11), (4.12), (4.17)–(4.20), (4.25)–(4.27), (4.32)–(4.34), получим

$$(4.35) \quad \alpha = 0, \quad \beta = -\xi_{20}.$$

Применяя метод аддитивного составления внутренних и внешних разложений [4], найдем, что во всей области, занимаемой жидкостью, r -, θ -, φ -компоненты вектора $\mathbf{v} + w\mathbf{k}$ и p приближенно определяются соотношениями

$$(4.36) \quad v_r + w \cos \theta = \varepsilon (v_{(1)r} + w_{(1)} \cos \theta) + \varepsilon^3 (v_{(3)r} + w_{(3)0} \cos \theta) + \\ + \frac{3}{4} \varepsilon \eta_{20} r^{-2} (1 + 3 \cos 2\theta);$$

$$(4.37) \quad v_{\theta} - w \sin \theta = \varepsilon (v_{(1)\theta} - w_{(1)} \sin \theta) + \varepsilon^3 (v_{(3)\theta} - w_{(3)0} \sin \theta);$$

$$(4.38) \quad v_{\varphi} = \varepsilon v_{(1)\varphi} + \varepsilon^4 v_{\varphi}^{(4)} - \frac{3}{2} \varepsilon \xi_{20} r^{-3} \sin 2\theta;$$

$$p = \varepsilon p_{(1)}$$

и (3.13)–(3.15), (4.25), (4.32), (4.35).

5. Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении возмущения скорости течения жидкости на больших расстояниях от шара (при малых ε). Используя (3.13), (3.14), (4.25), (4.32), (4.35)–(4.38), получим

$$(5.1) \quad v_r + w \cos \theta \sim \frac{3\varepsilon \eta_{20}}{x_3^2} \left(\frac{\varepsilon \lambda}{2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3} - 1 \right) e^{-\frac{\varepsilon \lambda}{2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3}},$$

$$v_{\theta} - w \sin \theta \sim -\frac{3\varepsilon^2 \lambda \eta_{20}}{4x_3^{5/2}} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon \lambda}{2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3}},$$

$$v_{\varphi} \sim \frac{2\varepsilon^2 \lambda \xi_{20}}{x_3^{5/2}} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\varepsilon \lambda}{4} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3} \right) e^{-\frac{\varepsilon \lambda}{2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3}}$$

при $x_3 \rightarrow +\infty$ и постоянных $(x_1^2 + x_2^2)/x_3, \tau, \varepsilon, \text{Re}, \rho$.

Согласно (5.1), возмущение скорости течения жидкости на больших расстояниях от шара является стационарным и с увеличением расстояния от шара стремится к нулю по закону X_3^{-2} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.— М.: Наука, 1965.
2. Сенницкий В. Л. О течении жидкости вокруг самоходного тела // ПМТФ.— 1978.— № 3.
3. Сенницкий В. Л. Пример обтекания самодвижущегося тела осесимметричным потоком жидкости // ПМТФ.— 1984.— № 4.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
5. Fraenkel L. E. On the method of matched asymptotic expansions. Pt 1 : A matching principle // Proc. Cambr. Phil. Soc.— 1969.— V. 65, pt 1.

г. Новосибирск

Поступила 31/III 1989 г.

УДК 621.454

А. Е. Войтенко

ОСНОВНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОГО РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Реактивный двигатель может быть выполнен таким необычным образом, что твердое топливо расположено неподвижно вдоль траектории его движения. Примеры конструкций линейного реактивного двигателя (ЛРД) известны из патентной литературы [1, 2]. Расположение топлива вне корпуса летательного аппарата существенно изменяет его энергетические и динамические характеристики.

В данной работе рассмотрены основные энергетические характеристики ЛРД.

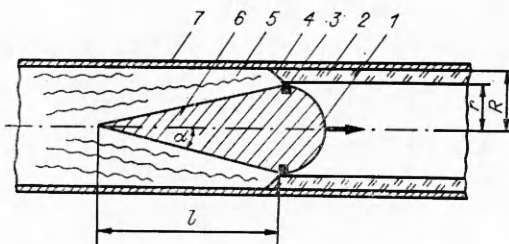
1. На рисунке приведена схема ЛРД, взятая из [2]. Ускоряемое тело *1* движется вдоль оси системы по направлению стрелки внутри трубчатого заряда *2* из детонирующего взрывчатого вещества. Устройство контактного возбуждения детонации *3*, расположенное на ускоряемом теле, инициирует в заряде волну детонации *4*. Продукты взрыва *5* расширяются в кольцевом сопле, образованном хвостовым конусом *6* и наружной трубкой *7*. Избыточное давление, которое создается продуктами взрыва на хвостовом конусе, ускоряет тело.

2. Работа ЛРД может считаться нормальной лишь при выполнении условий

$$(2.1) \quad D \leq u \ll (l/\delta)D$$

(*u* — скорость тела, *D* — скорость фронта детонации, *l* — длина сопла, $\delta = (R - r)$ — толщина стенки заряда). Если не выполнена левая часть неравенства, то детонационная волна обгонит ускоряемое тело. Если нарушена правая, то заряд превращается полностью в газообразные продукты взрыва, но не в начальной части кольцевого сопла, а в его широкой части или вообще за пределами сопла, что недопустимо.

Разгон тела от нулевой скорости до скорости детонации, т. е. при $u < D$, все же возможен, но для этого необходимо уменьшить среднюю скорость взрыва в направлении оси устройства, разделив заряд на секции с отдельным инициированием детонации каждой секции в момент ее нахождения в начальной части сопла [1]. Здесь условие (2.1) выполняется для средней скорости распространения взрыва вдоль заряда. Если



секции заряда достаточно короткие, то приведенные далее соотношения приближенно пригодны и для начального участка ускорения.

3. Основные уравнения для ЛРД в неподвижной системе координат в приближении квазистационарности записываются