(5) уравнением скорости реакции, однородно протекающей во всем сжатом объеме ВВ, или критерием возникновения очагов взрыва, которые в прочном ВВ могли бы формироваться, например, сеткой растущих трещин сдвига.

Поступила 17 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Регель В. Р., Слуцкер А. И.** Кинетическая природа прочности.— В кн.: Физика сегодня и завтра. Л., «Наука», 1973.
2. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
3. **Макклинток Ф., Аргон А.** Деформация и разрушение материалов. М., «Мир», 1970.
4. **Никифоровский В. С.** О кинетическом характере хрупкого разрушения твердых тел.— ПМТФ, 1976, № 5, с. 150—157.
5. **Златин Н. А., Мочалов С. М., Пугачев Г. С., Брагов А. М.** Временные закономерности процесса разрушения металлов при интенсивных нагрузках.— ФТТ, 1974, т. 16, № 6, с. 1752—1755.
6. **Партон В. З., Черепанов Г. П.** Механика разрушения.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М., «Наука», 1972.
7. **Иванов А. Г., Синицын В. А., Новиков С. А.** Масштабные эффекты при динамическом разрушении конструкций.—«Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 2, с. 316—317.
8. **Иванов А. Г., Минеев В. Н.** О масштабном критерии при хрупком разрушении конструкций.—«Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 3, с. 575—578.
9. **Васильев В. А., Ивлев А. А.** Расчет инициирования детонации механически неоднородных ВВ ударной волной.— ФГВ, 1972, № 2, с. 290—298.
10. **Канель Г. И., Дремин А. И.** Разложение литого тротила в ударных волнах.— ФГВ, 1977, № 1, с. 85—92.
11. **Walker F. E., Wasley R. J.** Critical energy for shock initiation of heterogeneous explosives.—«Explosivstoffe», 1969, vol. 17, N 1, S. 9—13.
12. **Howe P., Frey B., Taylor B., Boyle V.** Shock initiation and the critical energy concept. Preprints of the 6th Symp. (Intern.) on Detonation, Aug. 24—27, 1976, San Diego, California.

УДК 539.37

ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОСЫПУЧИХ СРЕД В ТРУБАХ

И. Б. Басович, М. Г. Бернадинер, Л. В. Ерошина

(Москва)

1. Рассматривается плоское установившееся движение вязкосыпучей среды в щели длиной $L(0 \leqslant x \leqslant L)$ и шириной $2a(-a \leqslant y \leqslant a)$, на торцах которой заданы равномерно распределенные давления p_1 и p_2. При отсутствии массовых сил уравнения для напряжений имеют вид

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\sigma_{xy}/\partial y = 0, \quad \partial\sigma_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y = 0. \tag{1.1}$$

Считается, что движение происходит только вдоль щели по оси x. Тогда из уравнения неразрывности следует, что v_x является функцией координаты y. Для вязкосыпучей среды компоненты тензора напряжений в плоском случае связаны соотношением [1, 2]

$$(1.2)\quad (\sigma_x-\sigma_y)^2+4\sigma_{xy}^2=\sin^2\varphi\left[\sigma_x+\sigma_y+2\operatorname{ctg}\varphi k-\frac{2\mu}{\sin\varphi}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]^2,$$

где φ — угол внутреннего трения; k — коэффициент сцепления; μ — вязкость. В случае изотропной деформации главные компоненты тензора напряжений и скоростей деформации совпадают, что приводит к зависимости [1]

$$(1.3)\quad \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\Big/\frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Поскольку $\partial v_x/\partial x=0$, из (1.3) следует

$$(1.4)\quad \sigma_x=\sigma_y=p.$$

Соотношения (1.1), (1.2) и (1.4) составляют замкнутую систему уравнений для определения неизвестных напряжений и скорости течения v_x. В силу симметрии относительно оси $y=0$ решение будем искать в области $y>0$.

Учитывая равенство (1.4), из (1.2) получим выражение для касательного напряжения

$$(1.5)\quad \sigma_{xy}=p\sin\varphi+k\cos\varphi-\mu\partial v_x/\partial y.$$

Решая уравнение (1.5) совместно с уравнениями движения (1.1) и граничным условием прилипания на стенке щели, найдем функции нормальных и касательных напряжений и скорости течения v_x в виде

$$(1.6)\quad p=C_0(x-y\sin\varphi)+C_1;$$

$$(1.7)\quad v_x=\frac{C_0\cos^2\varphi}{2\mu}(y-a)(y-C_2);$$

$$(1.8)\quad \sigma_{xy}=[C_0(x-y\sin\varphi)+C_1]\sin\varphi+k\cos\varphi-C_0\cos^2\varphi[y-(a+C_2)/2],$$

где C_0, C_1, C_2 — некоторые постоянные, которые будут определены ниже.

Из симметрии задачи и неразрывности касательных напряжений следует, что движение вязкосыпучей среды, находящейся в предельно напряженном состоянии, не может реализовываться по всей ширине щели. Действительно, в противном случае при $y=0$ $\sigma_{xy}=0$, что противоречит равенству (1.8). Отсюда следует, что в центре щели образуется упругое ядро шириной $2y_0$, движущееся как твердое тело. На границе упругого ядра производная скорости $\partial v_x/\partial y$ обращается в нуль. Тогда из (1.7) следует

$$(1.9)\quad 2y_0=a+C_2.$$

Очевидно, что при равномерно распределенном по торцам давлении в начальном и конечном участках щели должны существовать переходные области формирования упругого ядра.

Для определения неизвестных постоянных, входящих в решение (1.6)—(1.8), сделаем следующие допущения. Силами трения на участках формирования упругого ядра, а также размерами этих участков по сравнению с длиной щели можно пренебречь. Среднее значение компоненты напряжения σ_x в граничных сечениях области сформировавшегося одномерного течения на упругом ядре и в зоне движения вязкосыпучей среды равно давлениям p_1 и p_2 на торцах щели.

Тогда из (1.6) следует

$$C_0 = \frac{p_2 - p_1}{L},\ C_1 = p_1 + C_0 \frac{a + y_0}{2} \sin\varphi.$$

Ширину упругого ядра определим из условия равенства касательных напряжений на границе ядра y_0 и разности сил, приложенных на торцах

$$(p_1 - p_2)\, y_0 = \int_0^L \sigma_{xy}|_{y=y_0} dx =$$

$$= \left[\frac{p_1 + p_2}{2} L - \frac{p_1 - p_2}{2} (a - y_0) \sin\varphi\right] \sin\varphi + k\cos\varphi \cdot L.$$

Из последнего равенства окончательно получим

$$y_0 = \frac{[(p_1 + p_2)\, L - (p_1 - p_2)\, a \sin\varphi] \sin\varphi + 2k\cos\varphi \cdot L}{(p_1 - p_2)(1 + \cos^2\varphi)}. \tag{1.10}$$

Таким образом, ширина упругого ядра при заданной длине щели зависит не только от перепада, но и от величин давлений на торцах щели. В этом существенное отличие течения вязкосыпучих сред с внутренним трением от движения вязких и вязкопластичных жидкостей. При заданных давлениях p_1 и p_2 равенство (1.10) позволяет определить максимальное значение длины щели L, для которой выполняется естественное неравенство $y_0 \leqslant a$

$$L \leqslant \frac{2a\,(p_1 - p_2)}{(p_1 + p_2)\sin\varphi + 2k\cos\varphi}.$$

Для узких щелей, считая $a/L \ll 1$, получим

$$y_0 = \frac{L\,\sin\varphi}{1 + \cos^2\varphi} + \frac{2\,(p_2\sin\varphi + k\cos\varphi)\, L}{(p_1 - p_2)(1 + \cos^2\varphi)}. \tag{1.11}$$

Из соотношений (1.10), (1.11) следует, что при малых перепадах давления или при достаточно длинных щелях движение вязкосыпучей среды отсутствует, происходит запирание трубы. Последнее обстоятельство объясняется линейной зависимостью касательных напряжений от координаты x. Зная ширину упругого ядра, из (1.7), (1.9) можно получить выражение для расхода Q вязкосыпучей среды через единицу ширины щели

$$Q = 2\left[\int_{y_0}^{a} v_x(y)\, dy + v_x(y_0)\, y_0\right] = \frac{p_1 - p_2}{\mu L} \cos^2\varphi\, (a - y_0)^2\, \frac{2a + y_0}{3}.$$

Случай течения вязкой и вязкопластичной жидкости получается из найденного решения при $\varphi = 0$, $k = 0$ и $\varphi = 0$ соответственно.

2. При наличии массовых сил тяжести уравнения движения в случае радиальной симметрии в цилиндрических координатах имеют вид [3]

$$\begin{gathered} \partial\sigma_z/\partial z + \partial\sigma_{rz}/\partial r + \sigma_{rz}/r = \gamma, \\ \partial\sigma_r/\partial r + \partial\sigma_{rz}/\partial z + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где γ — удельный вес среды.

Считая отличной от нуля только скорость v_z, из уравнения неразрывности получим $\partial v_z/\partial z = 0$. Тогда уравнение предельно напряженного состояния и соотношение, связывающее тензоры напряжений и скоростей деформации, запишутся следующим образом [1, 3]:

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\sigma_{rz}^2 = \sin^2\varphi\left(\sigma_r + \sigma_z + 2k\,\mathrm{ctg}\,\varphi - \frac{2\mu}{\sin\varphi}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2; \tag{2.2}$$

$$\frac{2\sigma_{rz}}{\sigma_z - \sigma_r} = \frac{\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{\partial v_r}{\partial z}}{2\dfrac{\partial v_z}{\partial z}}. \tag{2.3}$$

Из уравнения (2.3) и равенства $\partial v_z/\partial z = 0$ следует, что $\sigma_r = \sigma_z$. Решение задачи будем искать в виде

$$\sigma_r = \sigma_z = \sigma_\theta = p. \tag{2.4}$$

В этом случае компонента напряжения σ_θ удовлетворяет неравенству, приведенному в работе [3]:

$$\frac{\sigma_r + \sigma_z}{2}(1 - \sin\varphi) < \sigma_\theta < \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2}(1 + \sin\varphi).$$

С учетом (2.4) для касательного напряжения σ_{rz} из (2.2) получим

$$\sigma_{rz} = p\sin\varphi + k\cos\varphi - \mu\partial v_z/\partial r. \tag{2.5}$$

При условии прилипания вязкосыпучей среды на стенке трубы решение системы уравнений (2.1), (2.4) и (2.5) имеет вид

$$\begin{gathered} p = p_2 = \mathrm{const}, \\ v_z = C_1\ln(r/R) + (F/\mu)(r - R) - (\gamma/4\mu)(r^2 - R^2), \\ \sigma_{rz} = \gamma r/2 - \mu C_1/r, \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $F = p_2\sin\varphi + k\cos\varphi$. При $\varphi \to 0$ решение (2.6) в отличие от плоского случая не переходит в решение для вязкопластичной среды [4], поскольку при $\varphi = 0$ изменяется тип исходной системы уравнений. Так как в области предельно напряженного состояния давление p постоянно, на одном из торцов трубы переходной области образования упругого ядра может не быть.

Рассмотрим случай отсутствия переходного участка на выходе трубы. Тогда константа p_2 равна давлению во внешней среде при $z = L$. На входном участке пренебрежем касательными напряжениями в упругой области по сравнению с силами трения на стенках трубы и примем среднее давление в начальном сечении ядра равным давлению p_1 на входе трубы. Обозначим через r_0 радиус упругого ядра.

На границе r_0 выполняется соотношение

$$\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \frac{C_1}{r_0} + \frac{F}{\mu} - \frac{\gamma}{2\mu}r_0 = 0,$$

откуда получим

$$C_1 = -\frac{r_0}{\mu}F + \frac{\gamma}{2\mu}r_0^2.$$

Величину r_0 найдем из условия равенства всех сил, действующих на упругое ядро

$$(p_1 - p_2)\pi r_0^2 + \pi r_0^2\gamma L = 2\pi r_0 F L.$$

Окончательно получим

$$r_0 = 2F/[(p_1 - p_2)/L + \gamma]. \tag{2.7}$$

Из последнего равенства видно, что, несмотря на различные формы решения, выражение для границы ядра r_0 при $\varphi = 0$ совпадает со случаем вязкопластичной жидкости [4].

При выводе соотношения (2.5) для касательных напряжений σ_{rz} предполагалось, что течение происходит в положительном направлении оси z и скорость течения возрастает к центру трубы, т. е. $\partial v_z/\partial r \leqslant 0$ при $r_0 \leqslant r \leqslant R$.

Тогда, учитывая равенство (2.7), из выражения для скорости течения (2.6) получим

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{F}{\mu}\frac{r_0}{r} + \frac{\gamma}{2\mu}\frac{r_0^2}{r} + \frac{F}{\mu} - \frac{\gamma}{2\mu} r \leqslant 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на выражение $1 - r_0/r$

$$F \leqslant (\gamma/2)(r + r_0).$$

Полученное неравенство должно выполняться для всей области течения вязкосыпучей среды при $r_0 \leqslant r \leqslant R$, и, следовательно,

$$F \leqslant \gamma r_0. \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.8) выражение для радиуса упругого ядра, получим

$$(p_1 - p_2)/L \leqslant \gamma. \tag{2.9}$$

Таким образом, установившееся движение вязкосыпучей среды по вертикальной круглой трубе возможно только в том случае, когда градиент давления, создаваемый внешними силами на торцах, не превышает удельного веса среды. Из неравенства (2.9), в частности, следует, что при отсутствии массовых сил ($\gamma = 0$) движение без нарушения условия прилипания на стенке вообще невозможно, т. е. под действием приложенных на торцах сил вязкосыпучая среда либо покоится (происходит запирание трубы), либо движется с проскальзыванием по стенкам.

Второе ограничивающее неравенство получим из выражения (2.7) и условия $r_0 < R$

$$(p_1 - p_2)/L > (2F - \gamma R)/R. \tag{2.10}$$

Преобразуем правую часть (2.10) следующим образом:

$$(2F - \gamma R)/R = (2\pi RF - \pi R^2\gamma)/\pi R^2.$$

Выражение $F_1 = 2\pi RF$ представляет собой возможную силу трения на стенке трубы без учета вязкой составляющей, а $F_2 = \pi R^2\gamma$ — вес среды, приходящийся на единицу длины. Если $F_1 < F_2$, неравенство (2.10) выполняется для любых градиентов давления и единственным ограничивающим соотношением остается (2.9). В противном случае для течения необходимо одновременное выполнение неравенств (2.9), (2.10), из которых следует двухстороннее ограничение на длину трубы

$$(p_1 - p_2)/\gamma \leqslant L < (p_1 - p_2)/(2F/R - \gamma).$$

Можно доказать, что последнее неравенство непротиворечиво, т. е.

$$(p_1 - p_2)/\gamma < (p_1 - p_2)/(2F/R - \gamma). \tag{2.11}$$

Действительно, из (2.8) получим

$$\gamma > F/R > 2F/R - \gamma,$$

отсюда следует справедливость неравенства (2.11).

В заключение заметим, что для случая неизотропной деформации [1] качественная картина течения вязкосыпучей среды в трубе не изменится.

Авторы выражают благодарность А. Х. Мирзаджанзаде за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 16 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гениев Г. А., Эстрин М. И.** Динамика пластической и сыпучей среды. М., Стройиздат, 1972.
2. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1954.
3. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М., «Мир», 1969.
4. **Ильюшин А. А.** К вопросу о вязкопластичном течении материала.—В кн.: Труды конференции по пластическим деформациям. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1938.