

ЗАДАЧИ О КОНЦЕНТРИРОВАНИИ СТРУЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЛАБИРИНТОВЫМ УПЛОТНЕНИЯМ ТУРБОМАШИН

В. Г. Орлик
(Ленинград)

Потенциальное истечение идеальной несжимаемой жидкости из сосуда через щель, образованную двумя плоскими симметричными стенками при произвольном угле между ними, подробно исследовано Н. Е. Жуковским, разработавшим метод для решения подобного рода задач [1].

Рассмотрим плоскую потенциальную струю идеальной несжимаемой жидкости, притекающей к щели двумя симметричными ветвями вдоль стенок сосуда (фиг. 1, а). Аналогичная задача о концентрации струи, притекающей к щели вдоль биссекторной плоскости образуемого стенками угла (фиг. 1, б), рассматривалась в [1], но ее решение не было доведено до численного результата.

Введем обозначения: v — скорость жидкости в любой заданной точке струи; V , W — скорость жидкости на свободной границе струи перед и за щелью; $\vartheta = \ln \frac{W}{v}$; $\vartheta_0 = \ln \frac{W}{V}$; θ — угол между скоростью и осью x ; $2\theta_0$ — угол между стенками сосуда, образующими щель; $2b$ — ширина щели; $2Q$ — полный расход жидкости в струе; φ — потенциал скоростей; ψ — функция тока.

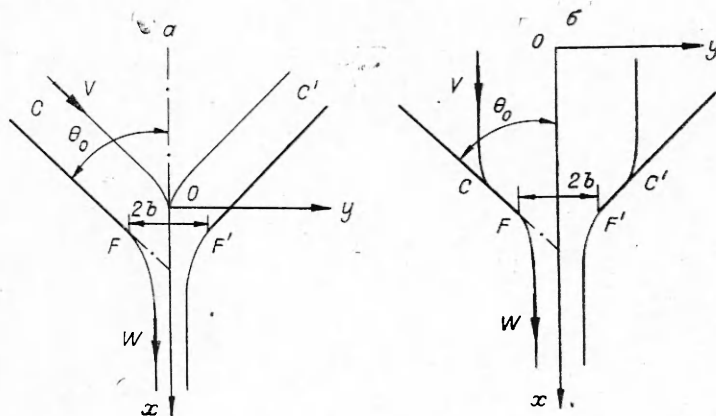
Для отыскания уравнения контура вытекающей струи воспользуемся известной зависимостью

$$(1) \quad dy = \frac{1}{W} \sin \theta d\varphi.$$

Согласно методу [1], введем комплексную переменную

$$(2) \quad u = r(\cos \lambda + i \sin \lambda)$$

и две вспомогательные функции от нее



Ф и г. 1

$$(3) \quad \chi(u) = \varphi + i\psi = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{u^2 - c^2}{\beta^2} - iQ,$$

$$\Phi(u) = \vartheta + i\theta = iq \int \frac{jdu}{V(u^2 - f^2)(u^2 - c^2)},$$

выбранные так, что при действительных u переменные ψ , ϑ и θ соответствуют границам рассматриваемого течения (q , β и $c < f$ — действительные числа) и что на свободной границе струй COC' внутри сосуда $\psi = 0$, а на его стенках и на внешних границах струи вне сосуда $\psi = \pm Q$. Кроме того, на свободных границах струй при этом обеспечивается постоянство скорости ($\vartheta = \text{const}$), а на стенках — угла ($\theta = \text{const}$). Обозначив

$$(4) \quad c = kf, \quad V\sqrt{1 - k^2} = k', \quad u = cu',$$

преобразуем выражение для $\Phi(u)$

$$(5) \quad \Phi(u) = iq \int_0^{u'} \frac{du'}{V(1 - u'^2)(1 - k^2 u'^2)} + \omega'q.$$

Здесь, как и в [1], полагаем ω' равной полному эллиптическому интегралу при модуле k' .

Сопоставляя (3) и (5) и имея в виду, что на участке OC контура струи $v = V$, а $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, получим

$$(6) \quad \vartheta_0 = \ln(W/V) = \omega'q, \quad \text{т. е. } V = W \exp(-\omega'q).$$

Верхний предел интегрирования в выражении (5) является эллиптическим синусом от величины интеграла

$$u' = \text{sn} \left(\frac{\theta}{q} + \frac{\omega'q - \vartheta}{q} i \right).$$

Учитывая (4) и имея в виду соотношение $u = r \cos \lambda$ для границ течения, можно показать, что на участке OC , где $0 < r < c$ и справедливо (6),

$$r/c = \text{sn}(\theta/q).$$

Значение θ меняется здесь в пределах $0 < \theta < \theta_0$, а θ_0 оказывается равным

$$(7) \quad \theta_0 = q \int_0^1 \frac{du'}{V(1 - u'^2)(1 - k^2 u'^2)} = q\omega,$$

где ω — полный эллиптический интеграл при модуле k .

На участке CF стенки сосуда, где $c < r < f$, угол потока остается постоянным ($\theta = \theta_0 = q\omega$), а переменной становится действительная часть функции $\Phi(u)$. Это соответствует изменению скорости v в пределах $V < v < W$ и переменной ϑ от $\omega'q$ до 0.

На участке Fx контура струи после выхода ее из щели $v = W$, а угол θ меняется в пределах $\theta_0 > \theta > 0$. При этом $r > f$, и можно показать, как и в [1], что на этом участке

$$(8) \quad \frac{f}{r} = \operatorname{sn} \frac{\theta}{q} \quad \text{или} \quad \frac{r}{c} = \frac{1}{k \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}}.$$

Для нахождения коэффициента сужения струи при истечении из щели необходимо написать уравнение ее контура $y(x)$. Это можно сделать, имея выражение (1) для dy , в котором предстоит определить потенциал скорости φ . Выражение для φ напишем, сопоставляя (2), (3) и (8).

$$(9) \quad \varphi = 2 \frac{Q}{\pi} \ln \frac{c \operatorname{dn} \frac{\theta}{q}}{\beta k \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}}.$$

Здесь символом dn обозначена эллиптическая функция «дельта амплитуды». С учетом (9) выражение (1) имеет вид

$$dy = - \frac{2Q}{\pi q} \frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{dn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} \sin \theta d\theta,$$

а уравнение контура струи по выходе из щели

$$y = - \frac{2Q}{\pi q W} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{dn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} \sin \theta d\theta - b.$$

Коэффициент сужения струи μ есть отношение ее ширины $2y$ при достаточном удалении от щели ($\theta = 0$) к ширине щели $2b$

$$\mu_1 = \frac{y_{\theta=0}}{-b} = 1 - \frac{2Q}{\pi q W b} \int_0^{\theta_0} \frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{dn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} \sin \theta d\theta.$$

В то же время $Q = \mu_1 b W$. Тогда

$$\mu_1 = 1 - \frac{2\mu_1}{\pi q} \int_0^{\theta_0} \frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{dn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} \sin \theta d\theta,$$

откуда

$$(10) \quad \mu_1 = \left(1 + \frac{2}{\pi q} \int_0^{\theta_0} \frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{dn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} \sin \theta d\theta \right)^{-1}.$$

Для задачи фиг. 1, б. рассмотренной в [1], найденный коэффициент сужения струи равен

$$(11) \quad \mu_2 = \left(1 + \frac{2}{\pi q} \int_0^{\theta_0} \frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{dn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} \sin \theta d\theta \right)^{-1}.$$

Преобразуем выражения (10), (11) к виду, удобному для вычислений на ЭВМ. С этой целью воспользуемся известными разложениями

$$\frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{dn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} - \frac{\pi}{2\omega} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\omega q} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\theta}{\omega q}}{(-1)^n \exp(n\pi\omega'/\omega) + 1} \right],$$

$$\frac{\operatorname{cn} \frac{\theta}{q} \cdot \operatorname{dn} \frac{\theta}{q}}{\operatorname{sn} \frac{\theta}{q}} = \frac{\pi}{2\omega} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\omega q} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\theta}{\omega q}}{\exp(n\pi\omega'/\omega) + 1} \right].$$

С учетом (6), (7) и очевидного $(-1)^n = \cos n\pi$ это дает

$$(12) \quad \mu_1 = \left(1 + \frac{1}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\theta_0} \sin \theta d\theta + S_1 \right)^{-1};$$

$$(13) \quad \mu_2 = \left(1 + \frac{1}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\theta_0} \sin \theta d\theta + S_2 \right)^{-1},$$

где

$$(14) \quad \begin{cases} S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \theta_0}{n\pi} \left[\left(\frac{W}{V} \right)^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + \cos n\pi \right]^{-1} \left[1 - \left(\frac{\theta_0}{n\pi} \right)^2 \right]^{-1}, \\ S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \theta_0 \cos n\pi}{n\pi} \left[\left(\frac{W}{V} \right)^{\frac{n\pi}{\theta_0}} + 1 \right]^{-1} \left[1 - \left(\frac{\theta_0}{n\pi} \right)^2 \right]^{-1}. \end{cases}$$

Прежде чем приводить результаты вычислений, заметим, что при $V = 0$ выражения (12), (13) ввиду $S_1 = S_2 = 0$ переходят в полученное в [1] специально для случая истечения из такого же сосуда без начальной скорости

$$\mu = \left(1 + \frac{1}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2\theta_0} \sin \theta d\theta \right)^{-1},$$

что для сосуда со щелью в плоском дне ($\theta_0 = \pi/2$) дает

$$\mu = \pi/(\pi + 2) \approx 0,611.$$

Учитывая, что результат суммирования в формуле (14) для S_1 положителен, а для S_2 — отрицателен, найдем, что в рассматриваемом случае (см. фиг. 1, а) коэффициент сужения струи меньше, а в случае, рассмотренном в [1] (см. фиг. 1, б), больше, чем при истечении без начальной скорости.

В другом предельном случае, когда $V = W$, получаем $\mu_1 = 0$. Величина μ_2 при этом неочевидна, и лишь вычисления показывают, что $\mu_2 = 1$.

Результаты вычислений, выполненных на ЭВМ «Наири-2», представлены таблицей, где они даны в виде функции половины угла между стенками θ_0 и отношения начальной и конечной скоростей V/W . Вычисления показали, что увеличение начальной скорости по-разному влияет на коэффициент сужения при различных схемах концентрирования струй. В случае пристеночной струи перед щелью увеличение ее скорости существенно уменьшает сечение вытекающего потока, тем самым ограничивая его расход (при $V \rightarrow W$ ввиду $\mu_1 \rightarrow 0$ наблюдается нечто вроде само-

Вид струи	$\frac{v}{W}$	Значения угла θ_0								
		0	22°30'	45°	67°30'	90°	112°30'	135°	157°30'	180°
Пристеночная (μ_1 , фиг. 1, а)	0,00	1,000	0,853	0,747	0,669	0,611	0,568	0,538	0,515	0,500
	0,10	1,000	0,853	0,747	0,667	0,605	0,553	0,510	0,475	0,450
	0,20	1,000	0,853	0,746	0,660	0,585	0,520	0,468	0,427	0,400
	0,30	1,000	0,853	0,742	0,643	0,552	0,475	0,417	0,375	0,350
	0,40	1,000	0,853	0,733	0,613	0,505	0,421	0,361	0,322	0,300
	0,50	1,000	0,852	0,712	0,566	0,444	0,358	0,302	0,267	0,250
	0,60	1,000	0,847	0,671	0,497	0,371	0,290	0,241	0,213	0,200
	0,70	1,000	0,831	0,598	0,405	0,287	0,219	0,180	0,159	0,150
	0,80	1,000	0,782	0,476	0,290	0,195	0,146	0,119	0,105	0,100
	0,90	1,000	0,623	0,284	0,154	0,099	0,073	0,059	0,052	0,050
	0,95	1,000	0,428	0,156	0,079	0,050	0,036	0,029	0,026	0,025
	0,99	1,000	0,139	0,034	0,016	0,010	0,007	0,006	0,005	0,005
	1,00	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Биссекторная (μ_2 , фиг. 1, б)	0,00	1,000	0,853	0,747	0,669	0,611	0,568	0,538	0,515	0,500
	0,10	1,000	0,853	0,747	0,670	0,617	0,584	0,562	0,554	0,550
	0,20	1,000	0,853	0,748	0,677	0,636	0,615	0,602	0,600	0,600
	0,30	1,000	0,853	0,751	0,693	0,666	0,656	0,650	0,650	0,650
	0,40	1,000	0,853	0,760	0,719	0,705	0,702	0,700	0,700	0,700
	0,50	1,000	0,854	0,779	0,756	0,751	0,750	0,750	0,750	0,750
	0,60	1,000	0,859	0,809	0,801	0,800	0,800	0,800	0,800	0,800
	0,70	1,000	0,872	0,851	0,850	0,850	0,850	0,850	0,850	0,850
	0,80	1,000	0,903	0,900	0,900	0,900	0,900	0,900	0,900	0,900
	0,90	1,000	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950
	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

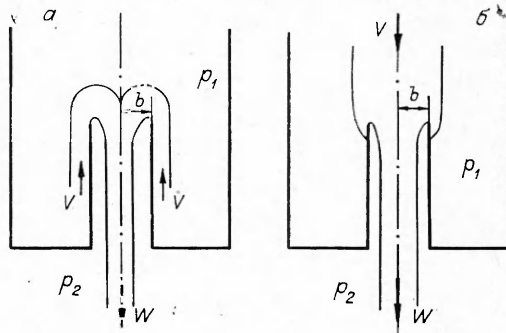
запирания). В случае центральной струи перед щелью увеличение ее скорости увеличивает сечение вытекающего потока и способствует увеличению его расхода.

Из таблицы следует также, что с увеличением начальной скорости вдоль стенок (см. фиг. 1, а) влияние угла между ними на коэффициент сужения струи в основном усиливается, тогда как с увеличением скорости вдоль биссекторной плоскости (см. фиг. 1, б) влияние угла между стенками ослабевает.

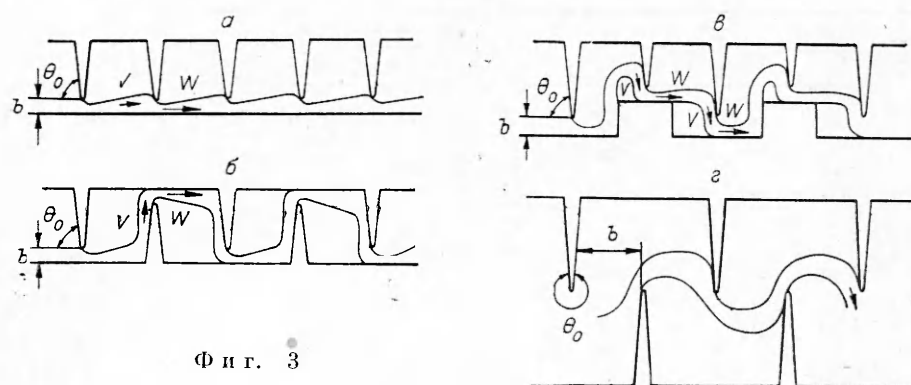
Как известно [2, 3], при истечении через насадок Борда ($\theta_0 = \pi$) коэффициент сужения может быть найден и без применения функций комплексного переменного. Если использовать уравнение Бернулли и уравнение количества движения жидкости для объема струи до и после насадка на достаточном удалении от него в обоих случаях, изображенных на фиг. 2, а, б (в случае встречного и попутного течения соответственно), и при этом принять во внимание, что сечение половины струи после насадка на достаточном удалении от него равно μb , а перед насадком — $\mu b W/V$, то можно получить значения коэффициентов сужения

$$\mu_1 = (1 - V/W)/2, \mu_2 = (1 + V/W)/2.$$

Можно показать, что эти выражения справедливы также,



Фиг. 2



Ф и г. 3

если расход жидкости в набегающей струе больше, чем в истекающей через насадок, и, в частности, при бесконечной ширине набегающего потока. Последнее совпадает со случаем истечения в трубу из сплошного потока в канале бесконечной ширины [4], для которого было получено идентичное решение

Одной из областей практического использования полученных результатов является анализ течения среды в лабиринтовых уплотнениях турбомашин.

На фиг. 3 показаны схемы течения в различных типах уплотнений, реализующие задачи о концентрировании струй. Задача, рассмотренная Н. Е. Жуковским, реализуется в прямоточном уплотнении (фиг. 3, а). Задачи, решенные автором, реализуются в ступенчатых уплотнениях ($\theta_0 \approx 90^\circ$, фиг. 3, б, в), а также в уплотнении типа Келера с перекрышей, близкой к нулю ($\theta_0 \approx 180^\circ$, фиг. 3, г). Полученные выше теоретические результаты объясняют казавшиеся ранее парадоксальными экспериментальные данные [5, 6], согласно которым коэффициент расхода многокамерного ступенчатого уплотнения (0,3—0,5) меньше, чем для одиночной щели ($\geq 0,611$). Кроме того, нашла объяснение удивительно высокая эффективность уплотнений типа Келера вблизи нулевой перекрыши [7]. Оба упомянутых явления объясняются тем, что в отличие от одиночных щелей, где истечение, как правило, происходит без начальной скорости, в многокамерных уплотнениях вследствие неполного гашения скорости перед входом в каждую последующую щель имеет место затопленная струя, увеличивающая протечку в прямоточных и уменьшающая — в ступенчатых уплотнениях, особенно при повороте на 180° (уплотнение Келера).

Использование вычисленных значений коэффициентов сужения струй даст возможность существенно уточнить расчет лабиринтовых уплотнений в части теплообмена, определения протечек, нахождения условий стабильности потока и в части распределения давлений вдоль лабиринта и по окружности ротора, несущего уплотнения.

Принятая модель течения в уплотнении в виде затопленной струи с застойными зонами дает хорошее совпадение с экспериментом по величине протечки [8], хотя визуализация показывает наличие вихрей [7, 9], и дальнейшее уточнение может дать использование моделей с различными типами завихренности в отрывных зонах [10].

Автор выражает благодарность консультировавшим его сотрудникам ЦКТИ Ю. Н. Малышеву и О. А. Кудрявцеву.

Поступила 6 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа.— «Труды ЦАГИ», 1930, вып. 41.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М., Физматгиз, 1951.
3. Гуревич И. М. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
4. Коновалов И. М. Определение сжатия струи при входе в трубу из потока.— «Труды Ленингр. ин-та инж. водн. транспорта», 1949, вып. 15.
5. Zabriskie W., Sternlicht B. Labyrinth — seal leakage analysis.— «Trans. ASME», ser. D, N 3.
6. Martin P. Beitrag zur Durchfluß berechnung von Spaltdichtungen.— «Wärme», 1971, N 15.
7. Groddeck K. H. Probleme der Berührungsfreien Hochdruckstopfbuchsen.— «Forsh.-Ing.-Wes.», 1957, N 5.
8. Абрамович Г. Н. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. М.—Л., ГЭИ, 1948.
9. Орлик В. Г. Проблема лабиринтовых уплотнений в современных паровых турбинах.— «Труды ЦКТИ», 1964, вып. 53.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1977.

УДК 533.6.071.08.632.57

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ НЕОДНОФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ

*В. И. Благосклонов, В. М. Кузнецов, А. Н. Минайлос,
А. Л. Стасенко, В. Ф. Чеховский*

(Москва)

Исследования многофазных течений, интенсивно развивающиеся в последние годы, связаны с практической важностью задач сверхзвукового горения, эрозии материалов при обтекании, различных проблем химической технологии и т. д. Они представляют также большой интерес в связи с созданием высокоэнthalпийных газодинамических установок [1], реализация которых в принципе может обеспечить моделирование наиболее существенных параметров полета гиперзвуковых аппаратов. Основной газодинамической проблемой в ряде указанных задач является организация процесса смешения коллектива твердых (жидких) частиц, разгоняемых легким газом, со сверхзвуковым квазиспутным потоком, в котором могут быть возбуждены внутренние, в частности, колебательные степени свободы. Решение полной задачи можно разделить на ряд этапов. Первая задача — это разгон твердых частиц до гиперзвуковых скоростей. При близких массовых соотношениях разгоняющего и разгоняемого компонентов температура легкого газа должна быть достаточно низкой, чтобы образующиеся при разгоне пары (в случае испаряющихся частиц) не испортили несущие свойства легкого газа. В задаче существенно достижение максимальных скоростей твердых частиц и равномерность их распределения по сечению разгонного сопла. Вторая задача — рассмотрение процесса смешения с учетом минимизации возмущений, связанных с проникновением частиц, динамикой их движения и испарением. Неоднородности в потоке могут вызываться различными причинами: ударными волнами различной интенсивности, турбулентными пульсациями и т. п. Для минимизации возмущений необходимо прежде всего так подобрать параметры взаимодействующих газовых компонентов и их угол встречи, чтобы в одном из потоков, которым может быть, например, воздух, не возникла ударная волна (фиг. 1). Такая волна, однако, может образоваться и по другой причине: из-за проникновения и испарения частиц возникают дополнительные возмущения, связанные с подводом массы, импульса и энергии. При этом в смеси меняются ее макроскопические параметры. Когда не удается обеспечить условия квазиспутности потоков (т. е. равенства скорости потока газа, в который