УДК 539.3: 517.958

ОБ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Приведены общие формулы аффинных преобразований, сохраняющих инвариантными статические уравнения линейной теории упругости в случае произвольных анизотропных материалов. Инвариантность уравнений при аффинных преобразованиях позволяет моделировать один анизотропный материал другим материалом. Все анизотропные материалы разбиваются на классы взаимно конгруэнтных материалов. Получены условия конгруэнтности ортотропных материалов и изотропных, ортотропных и трансверсально-изотропных материалов.

Ключевые слова: аффинные преобразования, анизотропия, модули упругости, конгруэнтность, инвариантность уравнений.

Некоторые частные случаи применения аффинных преобразований для моделирования одних анизотропных материалов другими рассматривались в [1–12]. В данной работе изучается общий случай аффинных преобразований, сохраняющих инвариантными статические уравнения линейной теории упругости при произвольной анизотропии.

Трехмерные уравнения статики линейной теории упругости в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид

$$\partial_j\sigma_{ij} + F_i = 0, \qquad \sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad \varepsilon_{kl} = (\partial_k u_l + \partial_l u_k)/2, \tag{1}$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — тензор напряжений; $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ — тензор деформаций; $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$ — тензор модулей упругости; u_k — вектор смещения; F_i — вектор объемных сил; ∂_k — производная по координате x_k. По повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование. Из (1) следуют уравнения в смещениях

$$A_{i(kl)j}\partial_{kl}u_j + F_i = 0, \tag{2}$$

где $A_{i(kl)j} = (A_{iklj} + A_{ilkj})/2$ и $L_{ij} = A_{i(kl)j}\partial_{kl}$ — симметричный оператор ($L_{ij} = L_{ji}$). На граничной поверхности

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{3}$$

задаются краевые условия

$$\sigma_{ij}n_j = p_i \qquad \text{или} \qquad u_i = u_i^0, \tag{4}$$

где p_i — вектор внешних усилий, приложенных на поверхности тела; u_i^0 — вектор смещения на границе тела; n_i — вектор единичной внешней нормали к поверхности (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00728).

Пусть имеется преобразование координат

$$x_i = \alpha_i + \alpha_{ij} y_j, \qquad |\alpha_{ij}| \neq 0, \qquad y_k = \beta_k + \beta_{ki} x_i, \qquad \beta_k = -\beta_{ki}\alpha_i, \tag{5}$$

где α_{ij}, β_{ki} — произвольные действительные невырожденные взаимно обратные матрицы: $\beta_{ki}\alpha_{ij} = \delta_{kj}$, $\alpha_{ij}\beta_{jk} = \delta_{ik}$; δ_{ik} — символ Кронекера (единичная матрица). Формулы (5) определяют общее аффинное преобразование координат. Постоянные α_i, β_k соответствуют сдвигам по осям, т. е. задают выбор начала координат. Из (5) получаем

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\alpha_{ik}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_s} = \frac{\partial}{\partial y_k}\,\beta_{ks}. \tag{6}$$

С учетом (6) из первого уравнения (1) находим

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\,\beta_{kj}\sigma_{ij} + F_i = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y_k}\,\beta_{li}\beta_{kj}\sigma_{ij} + \beta_{li}F_i = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\,\tau_{lk} + \tilde{F}_l = 0, \tag{7}$$

где

$$\tau_{lk} = \beta_{li}\beta_{kj}\sigma_{ij}, \qquad \tilde{F}_l = \beta_{li}F_i, \qquad \sigma_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\tau_{pq}, \qquad F_k = \alpha_{kl}\tilde{F}_l. \tag{8}$$

Таким образом, напряжения и объемные силы преобразуются по формулам (8). Уравнения равновесия (7) сохраняют свой вид и в новых переменных.

Пусть деформации преобразуются по формулам

$$\varepsilon_{ij} = \beta_{ri}\beta_{sj}e_{rs}, \qquad e_{pq} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\varepsilon_{ij}. \tag{9}$$

С учетом (8), (9) найдем удельную энергию деформации

$$2\Phi = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\tau_{pq}\beta_{ri}\beta_{sj}e_{rs} = \delta_{rp}\delta_{sq}\tau_{pq}e_{rs} = \tau_{rs}e_{rs}.$$

Очевидно, что энергия деформации 2Φ не изменяется.

Далее из (1) и (9) получаем

$$e_{pq} = \frac{1}{2}\,\alpha_{ip}\alpha_{jq}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \frac{1}{2}\,(\partial_i \alpha_{ip}(\alpha_{jq}u_j) + \partial_j \alpha_{jq}(\alpha_{ip}u_i)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial y_p}\,v_q + \frac{\partial}{\partial y_q}\,v_p\Big), \tag{10}$$

где

$$v_p = \alpha_{ip}u_i, \qquad u_k = \beta_{pk}v_p. \tag{11}$$

Таким образом, деформации (10) в новых переменных имеют тот же вид, что и в (1).

Из обобщенного закона Гука (1) и (8), (9) следует

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} = A_{ijkl}\beta_{rk}\beta_{sl}e_{rs}, \qquad \beta_{pi}\beta_{qj}\sigma_{ij} = \beta_{pi}\beta_{qj}A_{ijkl}\beta_{rk}\beta_{sl}e_{rs},$$

т. е.

$$\tau_{pq} = \tilde{A}_{pqrs}e_{rs}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{A}_{pqrs} = \beta_{pi}\beta_{qj}A_{ijkl}\beta_{rk}\beta_{sl}, \qquad A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\tilde{A}_{pqrs}\alpha_{kr}\alpha_{ls}. \tag{13}$$

Таким образом, закон Гука (12) сохраняет свой вид, а модули упругости преобразуются по формулам (13).

Из уравнений в смещениях (2) с учетом (6), (8), (11) следует

$$\beta_{ri}\beta_{sj}A_{i(kl)j}\beta_{pk}\beta_{ql}\tilde{\partial}_{pq}v_s + \beta_{ri}F_i = 0,$$

т. е.

$$\tilde{A}_{r(pq)s}\tilde{\partial}_{pq}v_s + \tilde{F}_r = 0, \qquad \tilde{\partial}_{pq} = \frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_q}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{A}_{r(pq)s} = \beta_{ri}\beta_{sj}A_{i(kl)j}\beta_{pk}\beta_{ql}, \qquad A_{i(kl)j} = \alpha_{ir}\alpha_{js}\tilde{A}_{r(pq)s}\alpha_{kp}\alpha_{lq}. \tag{15}$$

Таким образом, уравнения в смещениях (14) остаются инвариантными, а коэффициенты преобразуются по формулам (15).

Компоненты единичной нормали к граничной поверхности (3) имеют вид

$$n_i = f_i/\sqrt{f_k f_k}, \qquad f_i = \partial_i f.$$

Уравнение преобразованной граничной поверхности следующее:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(\alpha_1 + \alpha_{1j}y_j,\ \alpha_2 + \alpha_{2j}y_j,\ \alpha_3 + \alpha_{3j}y_j) = \tilde{f}(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Находим компоненты вектора градиента $\tilde{f}_k = \tilde{\partial}_k\tilde{f} = (\partial_i f)\alpha_{ik} = f_i\alpha_{ik}$ и единичной нормали

$$\tilde{n}_k^* = \tilde{f}_k/\sqrt{\tilde{f}_l\tilde{f}_l} = f_i\alpha_{ik}/\sqrt{f_i\alpha_{il}f_s\alpha_{sl}}. \tag{16}$$

С учетом (8) из первого краевого условия (4) получаем

$$\alpha_{ip}\alpha_{jq}\tau_{pq}n_j = p_i, \qquad \tau_{sq}\alpha_{jq}n_j = \beta_{si}p_i, \qquad \tau_{sq}\tilde{n}_q = \tilde{p}_s, \tag{17}$$

где

$$\tilde{n}_q = \alpha_{jq}n_j, \qquad n_k = \beta_{qk}\tilde{n}_q, \qquad \tilde{p}_s = \beta_{si}p_i, \qquad p_k = \alpha_{kl}\tilde{p}_l. \tag{18}$$

В (16) $\tilde{n}_k^*$ — единичная нормаль к поверхности $\tilde{f}(y_s) = 0$, а в (17), (18) $\tilde{n}_q = f_j\alpha_{jq}/\sqrt{f_k f_k} = n_j\alpha_{jq}$ — неединичная нормаль: $\tilde{n}_q\tilde{n}_q = n_i n_j\alpha_{iq}\alpha_{jq} \neq 1$, если α_{iq} — неортогональная матрица.

В силу (11) из второго условия (4) получаем

$$\alpha_{ip}u_i = \alpha_{ip}u_i^0, \qquad v_p = v_p^0. \tag{19}$$

Таким образом, в преобразованной области граничные условия имеют вид (17) или (19), одинаковый по форме с первоначальными условиями (4).

Итак, при произвольных аффинных преобразованиях координат (5) с невырожденной матрицей α_{ij} и соответствующих индуцированных преобразованиях напряжений и объемных сил (8), деформаций (9), (10), смещений (11), модулей упругости (13), (15) и краевых условий (18), (19) уравнения (1), (2), (4) линейной теории упругости остаются инвариантными и в новых переменных (см. (7), (10), (12), (14), (17), (19)). При этом не изменяется и удельная энергия деформации 2Ф.

Приведенные выше формулы могут использоваться для моделирования одного анизотропного материала другим [3, 5, 7]. Зная решение краевой задачи для одного материала, по соответствующим формулам преобразования можно найти решение краевой задачи в преобразованной области для другого материала.

Перепишем формулы (13) с учетом симметрии тензора модулей упругости:

$$\begin{gathered} A_{ijkl} = \frac{1}{2}\,(\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp})\tilde{A}_{pqrs}\,\frac{1}{2}\,(\alpha_{kr}\alpha_{ls} + \alpha_{ks}\alpha_{lr}) = \alpha_{ijpq}\tilde{A}_{pqrs}\alpha_{klrs}, \\ \tilde{A}_{pqrs} = \frac{1}{2}\,(\beta_{pi}\beta_{qj} + \beta_{pj}\beta_{qi})A_{ijkl}\,\frac{1}{2}\,(\beta_{rk}\beta_{sl} + \beta_{rl}\beta_{sk}) = \beta_{pqij}A_{ijkl}\beta_{rskl}, \\ \alpha_{ijpq} = \frac{1}{2}\,(\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp}), \qquad \beta_{pqij} = \frac{1}{2}\,(\beta_{pi}\beta_{qj} + \beta_{pj}\beta_{qi}). \end{gathered} \tag{20}$$

Используя для симметричных по двум индексам тензоров формулы перехода от двух индексов к одному

$$h_{11}=h_1,\qquad h_{22}=h_2,\qquad h_{33}=h_3,$$
$$\sqrt{2}h_{23}=\sqrt{2}h_{32}=h_4,\qquad \sqrt{2}h_{13}=\sqrt{2}h_{31}=h_5,\qquad \sqrt{2}h_{12}=\sqrt{2}h_{21}=h_6,$$

запишем (20) в матричном виде:

$$A=\tilde{\alpha}\tilde{A}\tilde{\alpha}',\qquad \tilde{A}=\tilde{\beta}A\tilde{\beta}',\qquad A^{-1}=\tilde{\beta}'\tilde{A}^{-1}\tilde{\beta},\qquad \tilde{A}^{-1}=\tilde{\alpha}'A^{-1}\tilde{\alpha}. \tag{21}$$

Здесь штрих означает транспонирование матрицы. Все матрицы в (21) размера 6×6. Матрица A^{-1} коэффициентов податливости обратная для матрицы A модулей упругости. Матрицы A, A^{-1} симметричные и положительно определенные. Матрицы, соответствующие тензорам α_{ijpq}, β_{pqij}, обозначены через $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$.

Формулы (21) представляют собой конгруэнтные преобразования [13] матриц A, $\tilde{A}$, A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$, определяющих свойства упругости произвольных анизотропных материалов. Преобразования (21) разбивают все матрицы (материалы) A на классы конгруэнтных (эквивалентных) матриц.

Соотношения (15), записанные в матричной форме

$$\tilde{A}^{*}=\tilde{\beta}A^{*}\tilde{\beta}',\qquad A^{*}=\tilde{\alpha}\tilde{A}^{*}\tilde{\alpha}',$$

также являются конгруэнтными преобразованиями матриц A^{*}, $\tilde{A}^{*}$, соответствующих тензорам коэффициентов $A_{i(kl)j}$, $\tilde{A}_{r(pq)s}$ в уравнениях (2), (14).

Матрицы $\tilde{\alpha}_{ij}$ (соответственно $\tilde{\beta}_{ij}$) имеют вид [14]

$$\tilde{\alpha}_{ij}=\begin{bmatrix}
\alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 & \sqrt{2}\alpha_{12}\alpha_{13} & \sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{13} & \sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{12}\\
\alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 & \sqrt{2}\alpha_{22}\alpha_{23} & \sqrt{2}\alpha_{21}\alpha_{23} & \sqrt{2}\alpha_{21}\alpha_{22}\\
\alpha_{31}^2 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 & \sqrt{2}\alpha_{32}\alpha_{33} & \sqrt{2}\alpha_{31}\alpha_{33} & \sqrt{2}\alpha_{31}\alpha_{32}\\
\sqrt{2}\alpha_{21}\alpha_{31} & \sqrt{2}\alpha_{22}\alpha_{32} & \sqrt{2}\alpha_{23}\alpha_{33} & \alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{23}\alpha_{32} & \alpha_{21}\alpha_{33}+\alpha_{23}\alpha_{31} & \alpha_{21}\alpha_{32}+\alpha_{22}\alpha_{31}\\
\sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{31} & \sqrt{2}\alpha_{12}\alpha_{32} & \sqrt{2}\alpha_{13}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{33}+\alpha_{13}\alpha_{32} & \alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{13}\alpha_{31} & \alpha_{11}\alpha_{32}+\alpha_{12}\alpha_{31}\\
\sqrt{2}\alpha_{11}\alpha_{21} & \sqrt{2}\alpha_{12}\alpha_{22} & \sqrt{2}\alpha_{13}\alpha_{23} & \alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21}
\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Очевидно, что $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ — взаимно обратные матрицы:

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}=\alpha_{ijpq}\beta_{pqkl}=\frac{1}{2}\left(\alpha_{ip}\alpha_{jq}+\alpha_{iq}\alpha_{jp}\right)\frac{1}{2}\left(\beta_{pk}\beta_{ql}+\beta_{pl}\beta_{qk}\right)=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)=\delta_{ijkl},$$
$$\tilde{\beta}\tilde{\alpha}=\beta_{pqij}\alpha_{ijrs}=\frac{1}{2}\left(\beta_{pi}\beta_{qj}+\beta_{pj}\beta_{qi}\right)\frac{1}{2}\left(\alpha_{ir}\alpha_{js}+\alpha_{is}\alpha_{jr}\right)=\frac{1}{2}\left(\delta_{pr}\delta_{qs}+\delta_{ps}\delta_{qr}\right)=\delta_{pqrs}.$$

Если α_{ij} — ортогональные матрицы ($\alpha_{ij}\alpha_{ik}=\delta_{jk}$), то ортогональными будут и шестимерные матрицы $\tilde{\alpha}_{ij}$ (22).

В случае ортогональных матриц α_{ij} на основе формул (21) все анизотропные материалы разбиваются на семь сингоний, т. е. имеет место классификация (инвариантность) относительно подгрупп ортогональной группы преобразований.

Собственные состояния T для анизотропных материалов определяются соотношением вида $A=T\Lambda T'$ (Λ — диагональная матрица), т. е. конгруэнтным преобразованием с ортогональной матрицей T собственных состояний. В теории упругости встречается также конгруэнтное преобразование вида $A=CDC'$ с нижней треугольной матрицей C и диагональной матрицей D. Таким образом, представляет интерес классификация анизотропных материалов относительно группы аффинных, конгруэнтных преобразований вида (20), (21).

Пусть матрица α_{ip} есть произведение двух матриц: $\alpha_{ip} = \alpha_{is}^{(2)}\alpha_{sp}^{(1)}$. Тогда из определения α_{ijpq} (20) следует, что

$$\alpha_{ijpq} = \frac{1}{2}\,(\alpha_{is}^{(2)}\alpha_{sp}^{(1)}\alpha_{jr}^{(2)}\alpha_{rq}^{(1)} + \alpha_{is}^{(2)}\alpha_{sq}^{(1)}\alpha_{jr}^{(2)}\alpha_{rp}^{(1)}) = \\ = \frac{1}{2}\,(\alpha_{ir}^{(2)}\alpha_{js}^{(2)} + \alpha_{is}^{(2)}\alpha_{jr}^{(2)})\frac{1}{2}\,(\alpha_{rp}^{(1)}\alpha_{sq}^{(1)} + \alpha_{rq}^{(1)}\alpha_{sp}^{(1)}) = \alpha_{ijrs}^{(2)}\alpha_{rspq}^{(1)}.$$

Таким образом, группе невырожденных аффинных преобразований $\alpha_{ip} = \alpha_{is}^{(2)}\alpha_{sp}^{(1)}$ соответствует линейное представление группы $\alpha_{ijpq} = \alpha_{ijrs}^{(2)}\alpha_{rspq}^{(1)}$.

В [15] показано, что любое невырожденное преобразование α с положительным определителем представляется в виде $\alpha = UKV$, где U, V — матрицы вращения: $UU' = E$, $VV' = E$ (E — единичная матрица), $|U| = |V| = 1$; K — диагональная матрица: $K = \operatorname{diag}(k_1, k_2, k_3)$, $k_i > 0$. Аналогичное представление имеет место и для обратной матрицы $\beta = \alpha^{-1} = V'K^{-1}U'$.

Таким образом, преобразование β можно записать в виде произведения трех преобразований

$$\beta = \beta^{(3)}\beta^{(2)}\beta^{(1)}, \qquad (23)$$

где $\beta^{(1)}$, $\beta^{(3)}$ — матрицы вращения; $\beta^{(2)}$ — диагональная матрица:

$$\beta^{(2)} = \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad \beta_i > 0. \qquad (24)$$

Матрица $\tilde\beta_{ij}$ имеет вид (22), где α_{ij} надо заменить на β_{ij}. В случае (23) представление $\tilde\beta$ следующее:

$$\tilde\beta = \tilde\beta^{(3)}\tilde\beta^{(2)}\tilde\beta^{(1)} \qquad (25)$$

и из (21), (25) имеем

$$\tilde A = \tilde\beta^{(3)}\tilde\beta^{(2)}\tilde\beta^{(1)}A\tilde\beta^{(1)\prime}\tilde\beta^{(2)\prime}\tilde\beta^{(3)\prime}. \qquad (26)$$

Запишем теперь матрицу $\tilde\beta^{(2)}$ с учетом (24):

$$\tilde\beta^{(2)} = \operatorname{diag}(\beta_1^2,\ \beta_2^2,\ \beta_3^2,\ \beta_2\beta_3,\ \beta_1\beta_3,\ \beta_1\beta_2). \qquad (27)$$

Из (26) следует, что общее конгруэнтное преобразование состоит из последовательного выполнения ортогонального преобразования $\tilde\beta^{(1)}$, растяжения по осям с матрицей (27) и еще одного ортогонального преобразования $\tilde\beta^{(3)}$.

Определитель матрицы (23) равен $|\beta| = |\beta^{(3)}||\beta^{(2)}||\beta^{(1)}| = |\beta^{(2)}| = \beta_1\beta_2\beta_3$, а матрицы (25) — следующий: $|\tilde\beta| = |\tilde\beta^{(3)}||\tilde\beta^{(2)}||\tilde\beta^{(1)}| = |\tilde\beta^{(2)}| = (\beta_1\beta_2\beta_3)^4$. Ортогональное преобразование $\tilde\beta^{(1)}$ (26) переводит исходную матрицу A из одной ортогональной системы координат в другую: $\tilde A^{(1)} = \tilde\beta^{(1)}A\tilde\beta^{(1)\prime}$. Поэтому $\tilde A^{(1)}$ можно принять в качестве начальной матрицы A. Далее с учетом (27) найдем

$$\tilde A^{(2)} = \tilde\beta^{(2)}A\tilde\beta^{(2)\prime} = \begin{bmatrix} \beta_1^4A_{11} & & & & & \\ \beta_1^2\beta_2^2A_{21} & \beta_2^4A_{22} & & & \text{sym} & \\ \beta_1^2\beta_3^2A_{31} & \beta_2^2\beta_3^2A_{32} & \beta_3^4A_{33} & & & \\ \beta_1^2\beta_2\beta_3A_{41} & \beta_2^3\beta_3A_{42} & \beta_2\beta_3^3A_{43} & \beta_2^2\beta_3^2A_{44} & & \\ \beta_1^3\beta_3A_{51} & \beta_1\beta_2^2\beta_3A_{52} & \beta_1\beta_3^3A_{53} & \beta_1\beta_2\beta_3^2A_{54} & \beta_1^2\beta_3^2A_{55} & \\ \beta_1^3\beta_2A_{61} & \beta_1\beta_2^3A_{62} & \beta_1\beta_2\beta_3^2A_{63} & \beta_1\beta_2^2\beta_3A_{64} & \beta_1^2\beta_2\beta_3A_{65} & \beta_1^2\beta_2^2A_{66} \end{bmatrix}. \qquad (28)$$

На третьем шаге ортогональное преобразование $\tilde\beta^{(3)}$ переводит матрицу $\tilde A^{(2)}$ (28) в некоторую новую ортогональную систему координат: $\tilde A^{(3)} = \tilde\beta^{(3)}\tilde A^{(2)}\tilde\beta^{(3)\prime}$.

В случае динамики уравнения в смещениях (2) принимают вид

$$(A_{i(kl)j}\partial_{kl} - \rho c^2\delta_{ij}\partial_{44})u_j + F_i = 0, \tag{29}$$

где $\partial_4 = \partial/\partial x_4$; $x_4 = ct$; c — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости; t — время; ρ — постоянная плотность материала. При преобразованиях (5) из (29) вместо уравнения (14) получаем

$$(\tilde{A}_{r(pq)s}\tilde{\partial}_{pq} - \rho c^2\beta_{ri}\beta_{si}\partial_{44})v_s + \tilde{F}_r = 0. \tag{30}$$

В (30) выражение $\beta_{ri}\beta_{si}$ имеет вид $\beta_{ri}\beta_{si} = \beta\beta'$; если $\beta = \beta^{(3)}\beta^{(2)}\beta^{(1)}$ (см. (23)), то

$$\beta\beta' = \beta^{(3)}\beta^{(2)}\beta^{(1)}\beta^{(1)\prime}\beta^{(2)\prime}\beta^{(3)\prime} = \beta^{(3)}\beta^{(2)}\beta^{(2)\prime}\beta^{(3)\prime}.$$

С учетом (24) находим $\beta^{(2)}\beta^{(2)\prime} = \mathrm{diag}\,(\beta_1^2,\, \beta_2^2,\, \beta_3^2)$, тогда

$$\beta\beta' = \beta^{(3)}\mathrm{diag}\,(\beta_1^2,\, \beta_2^2,\, \beta_3^2)\beta^{(3)\prime} = \beta_1^2\beta_{r1}^{(3)}\beta_{s1}^{(3)} + \beta_2^2\beta_{r2}^{(3)}\beta_{s2}^{(3)} + \beta_3^2\beta_{r3}^{(3)}\beta_{s3}^{(3)}.$$

Последнее выражение будет иметь вид шарового тензора, если $\beta_1^2 = \beta_2^2 = \beta_3^2$, тогда $\beta_{ri}\beta_{si} = \beta_1^2\beta_{ri}^{(3)}\beta_{si}^{(3)} = \beta_1^2\delta_{rs}$. Но это означает, что уравнение (30) сохраняет свой вид, если преобразование β_{ri} с точностью до коэффициента β_1 является ортогональным. Таким образом, в случае динамики преобразование, сохраняющее уравнения, должно быть ортогональным, а не аффинным.

Инварианты тензора модулей упругости A_{ijkl} и инфинитезимальные операторы при ортогональных преобразованиях системы координат рассматривались в [14, 16]. Найдем инфинитезимальные операторы для преобразований (27), (28). При дифференциальном бесконечно малом преобразовании матрица $\beta^{(2)}$ (24) бесконечно мало отличается от единичной матрицы, т. е. при дифференцировании по β_i надо полагать $\beta_i = 1$. Итак, из (28) находим

$$\begin{array}{ll}
dA_{11} = 4A_{11}d\beta_1, & \\
dA_{21} = 2A_{21}(d\beta_1 + d\beta_2), & dA_{22} = 4A_{22}d\beta_2, \\
dA_{31} = 2A_{31}(d\beta_1 + d\beta_3), & dA_{32} = 2A_{32}(d\beta_2 + d\beta_3), \\
dA_{41} = A_{41}(2d\beta_1 + d\beta_2 + d\beta_3), & dA_{42} = A_{42}(3d\beta_2 + d\beta_3), \\
dA_{51} = A_{51}(3d\beta_1 + d\beta_3), & dA_{52} = A_{52}(d\beta_1 + 2d\beta_2 + d\beta_3), \\
dA_{61} = A_{61}(3d\beta_1 + d\beta_2); & dA_{62} = A_{62}(d\beta_1 + 3d\beta_2); \\
dA_{33} = 4A_{33}d\beta_3, & \\
dA_{43} = A_{43}(d\beta_2 + 3d\beta_3), & dA_{44} = 2A_{44}(d\beta_2 + d\beta_3), \\
dA_{53} = A_{53}(d\beta_1 + 3d\beta_3), & dA_{54} = A_{54}(d\beta_1 + d\beta_2 + 2d\beta_3), \\
dA_{63} = A_{63}(d\beta_1 + d\beta_2 + 2d\beta_3); & dA_{64} = A_{64}(d\beta_1 + 2d\beta_2 + d\beta_3); \\
dA_{55} = 2A_{55}(d\beta_1 + d\beta_3), & \\
dA_{65} = A_{65}(2d\beta_1 + d\beta_2 + d\beta_3); & dA_{66} = 2A_{66}(d\beta_1 + d\beta_2).
\end{array} \tag{31}$$

Далее выписываем для (31) инфинитезимальные операторы:

$$\begin{aligned}
D_1 = 4A_{11}\partial_{A_{11}} + 2A_{21}\partial_{A_{21}} + 2A_{31}\partial_{A_{31}} + 2A_{41}\partial_{A_{41}} + 3A_{51}\partial_{A_{51}} +{}& \\
+ 3A_{61}\partial_{A_{61}} + A_{52}\partial_{A_{52}} + A_{62}\partial_{A_{62}} + A_{53}\partial_{A_{53}} + A_{63}\partial_{A_{63}} +{}& \\
+ A_{54}\partial_{A_{54}} + A_{64}\partial_{A_{64}} + 2A_{55}\partial_{A_{55}} + 2A_{65}\partial_{A_{65}} + 2A_{66}\partial_{A_{66}},&
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_2 = 2A_{21}\partial_{A_{21}} + A_{41}\partial_{A_{41}} + A_{61}\partial_{A_{61}} + 4A_{22}\partial_{A_{22}} + 2A_{32}\partial_{A_{32}} + \\
+ 3A_{42}\partial_{A_{42}} + 2A_{52}\partial_{A_{52}} + 3A_{62}\partial_{A_{62}} + A_{43}\partial_{A_{43}} + A_{63}\partial_{A_{63}} + \\
+ 2A_{44}\partial_{A_{44}} + A_{54}\partial_{A_{54}} + 2A_{64}\partial_{A_{64}} + A_{65}\partial_{A_{65}} + 2A_{66}\partial_{A_{66}}, \\
D_3 = 2A_{31}\partial_{A_{31}} + A_{41}\partial_{A_{41}} + A_{51}\partial_{A_{51}} + 2A_{32}\partial_{A_{32}} + A_{42}\partial_{A_{42}} + \\
+ A_{52}\partial_{A_{52}} + 4A_{33}\partial_{A_{33}} + 3A_{43}\partial_{A_{43}} + 3A_{53}\partial_{A_{53}} + 2A_{63}\partial_{A_{63}} + \\
+ 2A_{44}\partial_{A_{44}} + 2A_{54}\partial_{A_{54}} + A_{64}\partial_{A_{64}} + 2A_{55}\partial_{A_{55}} + A_{65}\partial_{A_{65}}.
\end{aligned}
$$

Инварианты тензора A_{ijkl} (матрицы A_{ij}) — алгебраически независимые решения замкнутой системы дифференциальных уравнений

$$D_1 f = 0, \qquad D_2 f = 0, \qquad D_3 f = 0. \tag{32}$$

Так как инфинитезимальные операторы образуют алгебру Ли, то система (32) замкнута. Замкнутая система (32) трех дифференциальных уравнений с 21 переменной A_{ij} имеет 18 алгебраически независимых решений.

Запишем общие условия конгруэнтности двух анизотропных материалов, модули упругости которых связаны преобразованием (28). Из (28) находим

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{\tilde{A}_{11}}{A_{11}}}, \qquad \beta_2 = \sqrt[4]{\frac{\tilde{A}_{22}}{A_{22}}}, \qquad \beta_3 = \sqrt[4]{\frac{\tilde{A}_{33}}{A_{33}}} \tag{33}$$

(здесь индекс (2) опущен). Далее, исключая параметры β_i, получаем

$$
\begin{gathered}
\frac{A_{21}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}} = \frac{\tilde{A}_{21}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{21}, \\
\frac{A_{31}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{31}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = k_{31}, \qquad \frac{A_{32}}{\sqrt{A_{22}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{32}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{32}, \\
\frac{A_{41}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt[4]{A_{22}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{41}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{41}, \qquad \frac{A_{42}}{\sqrt{A_{22}}\sqrt[4]{A_{22}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{42}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{42}, \\
\frac{A_{51}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt[4]{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{51}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = k_{51}, \qquad \frac{A_{52}}{\sqrt{A_{22}}\sqrt[4]{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{52}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = k_{52}, \\
\frac{A_{61}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt[4]{A_{11}A_{22}}} = \frac{\tilde{A}_{61}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{61}; \qquad \frac{A_{62}}{\sqrt{A_{22}}\sqrt[4]{A_{11}A_{22}}} = \frac{\tilde{A}_{62}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{62}; \\
\frac{A_{43}}{\sqrt{A_{33}}\sqrt[4]{A_{22}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{43}}{\sqrt{\tilde{A}_{33}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{43}, \qquad \frac{A_{44}}{\sqrt{A_{22}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{44}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{44}, \\
\frac{A_{53}}{\sqrt{A_{33}}\sqrt[4]{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{53}}{\sqrt{\tilde{A}_{33}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = k_{53}, \qquad \frac{A_{54}}{\sqrt{A_{33}}\sqrt[4]{A_{11}A_{22}}} = \frac{\tilde{A}_{54}}{\sqrt{\tilde{A}_{33}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{54}, \\
\frac{A_{63}}{\sqrt{A_{33}}\sqrt[4]{A_{11}A_{22}}} = \frac{\tilde{A}_{63}}{\sqrt{\tilde{A}_{33}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{63}; \qquad \frac{A_{64}}{\sqrt{A_{22}}\sqrt[4]{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{64}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = k_{64}; \\
\frac{A_{55}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{55}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = k_{55}, \\
\frac{A_{65}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt[4]{A_{22}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{65}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}}\sqrt[4]{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{65}; \qquad \frac{A_{66}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}} = \frac{\tilde{A}_{66}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{66}.
\end{gathered} \tag{34}
$$

Можно проверить, что 18 величин k_{ij} (34) удовлетворяют уравнениям (32), т. е. являются инвариантами преобразования (28). Таким образом, два анизотропных материала конгруэнтны, если модули упругости A_{ij}, $\tilde{A}_{ij}$ связаны соотношениями (34), при этом параметры преобразования β_i задаются формулами (33).

Тензор A_{ijkl} для изотропного материала имеет вид

$$A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{35}$$

где λ, μ — постоянные Ламе. Из (13), (35) получаем тензор модулей упругости анизотропных материалов, конгруэнтных изотропному:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{pqrs} = \beta_{pi}\beta_{qj}[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\beta_{rk}\beta_{sl} = \\ = \lambda\beta_{pi}\beta_{qi}\beta_{rk}\beta_{sk} + \mu(\beta_{pk}\beta_{rk}\beta_{ql}\beta_{sl} + \beta_{pl}\beta_{sl}\beta_{qk}\beta_{rk}) = \\ = \lambda b_{pq}b_{rs} + \mu(b_{pr}b_{qs} + b_{ps}b_{qr}),\end{aligned} \tag{36}$$

где $b_{pq} = \beta_{pi}\beta_{qi}$. Таким образом, модули упругости (36) конгруэнтного анизотропного материала имеют тот же вид, что и модули (35) для изотропного материала, но в (36) вместо единичного тензора δ_{ij} присутствует произвольный симметричный невырожденный тензор вида $b_{pq} = \beta_{pi}\beta_{qi}$.

Покажем, что величины (36), записанные в произвольной системе координат, определяют специальный ортотропный материал. Общее конгруэнтное преобразование имеет вид (26). Ортогональное преобразование $\tilde{\beta}^{(1)}$ не изменяет модули (35) изотропного материала. Тогда из (28) для изотропного материала получаем

$$\tilde{A}^{(2)}_{pq} = \begin{bmatrix} \beta_1^4 A_{11} & & & & & \\ \beta_1^2\beta_2^2 A_{21} & \beta_2^4 A_{11} & & & \text{sym} & \\ \beta_1^2\beta_3^2 A_{21} & \beta_2^2\beta_3^2 A_{21} & \beta_3^4 A_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2^2\beta_3^2(A_{11}-A_{21}) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1^2\beta_3^2(A_{11}-A_{21}) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1^2\beta_2^2(A_{11}-A_{21}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1^4(\lambda+2\mu) & & & & & \\ \beta_1^2\beta_2^2\lambda & \beta_2^4(\lambda+2\mu) & & & \text{sym} & \\ \beta_1^2\beta_3^2\lambda & \beta_2^2\beta_3^2\lambda & \beta_3^4(\lambda+2\mu) & & & \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2^2\beta_3^2 2\mu & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1^2\beta_3^2 2\mu & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1^2\beta_2^2 2\mu \end{bmatrix}. \tag{37}$$

В (37) входят пять параметров: β_1, β_2, β_3, λ, μ, и матрица (37) соответствует ортотропному материалу специального вида. Далее преобразование с ортогональной матрицей $\tilde{\beta}^{(3)}$ (26) переводит (37) в общую систему координат (36): $\tilde{A}^{(3)} = \tilde{\beta}^{(3)}\tilde{A}^{(2)}\tilde{\beta}^{(3)\prime}$, при этом добавляются еще три параметра, определяющие ортогональную систему координат.

Из условий (34) для изотропного материала следует

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{\tilde{A}_{21}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = \frac{\tilde{A}_{31}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{32}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{21},\\ \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{A_{11}-A_{21}}{A_{11}} = \frac{\tilde{A}_{44}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{55}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{66}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{44} = 1 - k_{21}.\end{aligned} \tag{38}$$

Условия положительной определенности $3\lambda + 2\mu > 0$, $2\mu > 0$ дают ограничения на параметр k_{21}: $-1/2 < k_{21} < 1$. Теперь с учетом (38) матрицу (37) для ортотропного материала, конгруэнтного изотропному, запишем в виде

$$\tilde{A}_{pq} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & & & & & \\ k_{21}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}} & \tilde{A}_{22} & & & \text{sym} & \\ k_{21}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & k_{21}\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}} & \tilde{A}_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}} \end{bmatrix}. \qquad (39)$$

В (39) имеется четыре свободных параметра: $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{A}_{22}$, $\tilde{A}_{33}$, k_{21}.

Если в (39) $\tilde{A}_{11} = \tilde{A}_{22}$, то для трансверсально-изотропного материала, конгруэнтного изотропному, получаем

$$\tilde{A}_{pq} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & & & & & \\ k_{21}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{11} & & & \text{sym} & \\ k_{21}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & k_{21}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & \tilde{A}_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-k_{21})\tilde{A}_{11} \end{bmatrix}.$$

Здесь три свободных параметра: $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{A}_{33}$, k_{21}.

Найдем теперь матрицу модулей материалов, конгруэнтных трансверсально-изотропному материалу. Будем считать, что ортогональное преобразование $\tilde{\beta}^{(1)}$ (26) приводит матрицу модулей трансверсально-изотропного материала к виду (ось вращения — x_3)

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11}-A_{21} \end{bmatrix}. \qquad (40)$$

Далее из условий (34) следует

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{\tilde{A}_{21}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{21}, \qquad \frac{A_{31}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{31}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{32}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = k_{31},$$
$$\frac{A_{44}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{44}}{\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}}} = \frac{\tilde{A}_{55}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}}} = k_{44}, \qquad \frac{A_{11}-A_{21}}{A_{11}} = \frac{\tilde{A}_{66}}{\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}}} = k_{66} = 1 - k_{21}. \qquad (41)$$

Таким образом, с учетом (41) матрица модулей трансверсально-изотропного материала (40) записывается в виде

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ k_{21}A_{11} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ k_{31}\sqrt{A_{11}A_{33}} & k_{31}\sqrt{A_{11}A_{33}} & A_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{A_{11}A_{33}} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{A_{11}A_{33}} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-k_{21})A_{11} \end{bmatrix}. \qquad (42)$$

Этот материал конгруэнтен ортотропному с матрицей модулей

$$\tilde{A}_{pq} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & & & & & \\ k_{21}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}} & \tilde{A}_{22} & & & \text{sym} & \\ k_{31}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & k_{31}\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}} & \tilde{A}_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{\tilde{A}_{22}\tilde{A}_{33}} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{44}\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{33}} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-k_{21})\sqrt{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22}} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

В (42) содержатся пять свободных параметров: A_{11}, A_{33}, k_{21}, k_{31}, k_{44}, а в (43) — шесть: $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{A}_{22}$, $\tilde{A}_{33}$, k_{21}, k_{31}, k_{44}. Коэффициенты преобразования задаются формулами (33). Если в (43) $\tilde{A}_{11} = \tilde{A}_{22}$, то (42), (43) будут соответствовать двум конгруэнтным трансверсально-изотропным материалам.

Из условий положительной определенности для трансверсально-изотропного материала

$$A_{11} + A_{21} > 2A_{31}^2, \qquad A_{11} > A_{21}, \qquad A_{44} > 0$$

следуют ограничения на параметры k_{21}, k_{31}, k_{44}:

$$2k_{31}^2 - 1 < k_{21} < 1, \qquad -1 < k_{31} < 1, \qquad k_{44} > 0.$$

Из (28), (34) следует, что ортотропный материал преобразуется в ортотропный:

$$\tilde{A}_{pq} = \begin{bmatrix} \beta_1^4 A_{11} & & & & & \\ \beta_1^2\beta_2^2 A_{21} & \beta_2^4 A_{22} & & & \text{sym} & \\ \beta_1^2\beta_3^2 A_{31} & \beta_2^2\beta_3^2 A_{32} & \beta_3^4 A_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2^2\beta_3^2 A_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1^2\beta_3^2 A_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1^2\beta_2^2 A_{66} \end{bmatrix}.$$

Используя формулы (28), (34), можно определить модули упругости конгруэнтных материалов и для остальных сингоний [17]: кубической, тригональной, тетрагональной, моноклинной.

Таким образом, полученные в данной работе соотношения позволяют находить решения краевых задач теории упругости не для одного конкретного материала, а для целых классов конгруэнтных анизотропных или изотропных материалов. Так как статические уравнения линейной теории упругости инвариантны относительно группы аффинных преобразований, то для получения инвариантных решений можно использовать методы [18] непрерывных групп Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михлин С. Г.** Плоская деформация в анизотропной среде // Тр. Сейсмол. ин-та. 1936. № 76. С. 1–19.
2. **Lodge A. S.** A new theorem in the classical theory of elasticity // Nature. 1952. V. 169, N 4309. P. 926, 927.
3. **Lodge A. S.** The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. V. 8, N 2. P. 211–225.
4. **Lang H. A.** The affine transformation for orthotropic plane-stress and plane-strain problems // J. Appl. Mech. 1956. V. 23, N 1. P. 1–6.

5. **Карташов В. А.** Об одной аналогии в теории упругости // Тр. Саратов. автомобильно-дор. ин-та. 1957. Сб. 15, т. 1. С. 42–51.
6. **Benthem J. P.** On the affine transformation for aelotropic plane-stress and plane-strain problems // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1963. V. 30, N 1. P. 143, 144.
7. **Клячко С. Д.** Моделирование плоской и пространственной задач теории упругости в случае анизотропного тела // Тр. Новосиб. ин-та инженеров ж.-д. трансп. 1967. Вып. 62. С. 71–90.
8. **Фролов В. Н., Спиваков Ю. Л.** О сведении анизотропных задач теории упругости к изотропным // Тез. XXXIII Науч.-произв. конф. профессор.-преподават. состава секции мелиорации и гидротехн. сооруж., механиз. гидромелиорат. работ. Ташкент: Б. и., 1974. С. 45, 46.
9. **Ильюшин А. А.** Изоморфизм упругопластических свойств анизотропных тел // VI Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Аннот. докл. Ташкент: Б. и., 1986. С. 312.
10. **Алфутова Н. Б., Мовчан А. Б., Назаров С. А.** Алгебраическая эквивалентность плоских задач для ортотропных и анизотропных сред // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1991. Вып. 3. С. 64–68.
11. **Куликов А. А., Назаров С. А., Нарбут М. А.** Аффинные преобразования в плоской задаче анизотропной теории упругости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2000. Вып. 2. С. 91–95.
12. **Матченко И. Н.** Собственные упругие и пластические состояния анизотропных сред. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Чебоксары, 2004.
13. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
14. **Бехтерев П. В.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение метода преобразований координат // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1926. Т. 58, вып. 3. С. 415–446.
15. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
16. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
17. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.
18. **Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н.** Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

Поступила в редакцию 11/X 2005 г.