УДК 539.370

АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК В ТЕРМОЦИКЛЕ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
E-mail: shkutin@icm.krasn.ru

Приведена математическая постановка нелинейных задач об осесимметричных деформациях пластин и оболочек в двухфазных зонах аустенитно-мартенситных превращений. На основе численного решения задач прямого и обратного превращений построены гистерезисные петли термомеханических циклов для нагруженных давлением круговых пластин и пологих сферических сегментов-куполов, изготовленных из сплава NiTi (никелид титана). Обнаружена возможность динамической неустойчивости процесса деформирования купола в зонах превращений при нагрузках, существенно меньших по сравнению с верхними критическими значениями в изотермических состояниях материала вне зоны превращений. В результате теоретического анализа определены внешние нагрузки, ниже которых не происходит потери устойчивости купола в термоцикле фазовых превращений материала.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы, фазовые превращения, фазовые деформации, термоцикл, межфазный гистерезис, пластины, оболочки, выпучивание, численный анализ.

В данной работе, в отличие от [1, 2], изучаются процессы деформирования тонкостенных образцов из сплавов с памятью формы в термоцикле фазовых превращений. При этом фазовые (структурные) деформации вводятся более общими, чем в [1, 2], микромеханическими определяющими соотношениями, предложенными и обоснованными в работах [3, 4]. Рассматриваемые ниже нелинейные термомеханические задачи сформулированы в предположении малой скорости изменения межфазных напряжений по сравнению со скоростями фазовых деформаций без учета влияния переменных напряжений на фазовый состав сплава (в несвязной постановке [5]). Вследствие этого процессы прямых и обратных фазовых превращений в образцах моделируются нелинейными краевыми задачами термоупругости с неявной зависимостью от температуры (с помощью фазового параметра, имитирующего объемную долю кристаллов новой фазы).

Микромеханические определяющие соотношения. Для того чтобы установить связь между деформациями и напряжениями в интервале прямого фазового превращения, используем систему микромеханических определяющих соотношений более общего, чем в [1, 2], вида:

$$w_{11} = \varphi_{11} + (S_{11} - \nu S_{22})/E \quad (1 \leftrightarrows 2), \qquad w_{13} = \varphi_{13} + S_{13}/G,$$

$$\frac{d\varphi_{ii}}{dq} = (1-q)^\lambda \Big(\varkappa \varphi_{ii} + \frac{\tilde S_{ii}}{\sigma}\Big), \qquad \frac{d\varphi_{13}}{dq} = (1-q)^\lambda \Big(\varkappa \varphi_{13} + \frac{S_{13}}{\sigma}\Big), \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00267).

$$q = \sin\Big(\frac{\pi}{2}\frac{T_+ - T}{T_+ - T_-}\Big), \qquad T_- \leqslant T \leqslant T_+.$$

Здесь w_{iJ}, φ_{iJ} — полные и фазовые деформации; S_{iJ}, $\tilde{S}_{ii}$ — компоненты тензора и девиатора напряжений; E, G — модули упругого растяжения-сжатия и сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\varkappa$, λ, σ — экспериментальные константы сплава в интервале прямого превращения; T_+, T_- — температуры начала и завершения прямого превращения; T — текущая температура; $0 \leqslant q \leqslant 1$ — внутренний параметр состояния, трактуемый как объемная доля мартенситной фазы; запись $1 \leftrightarrows 2$ подразумевает наличие уравнений и соотношений, которые получаются из предыдущего заменой индекса 1 на 2, а индекса 2 на 1.

Согласно (1) рост фазовых деформаций прекращается при $q = 1$. Эти соотношения предложены в [3, 4] наряду с более простыми, соответствующими значению $\lambda = 0$. Очевидно, что сплав с параметром $\lambda > 0$ более жесткий, чем сплав с параметром $\lambda = 0$. Как и в [2], предполагается, что фазовое превращение — квазистатический процесс с равномерным распределением температуры по объему образца, поэтому параметр q не зависит от координат.

Присутствующие в (1) модули упругости сплава не остаются постоянными в интервале фазового превращения, а изменяются от их значений в аустените до значений в мартенсите. В интервале фазового превращения эти модули можно представить в виде осредненных зависимостей

$$E = qE_- + (1-q)E_+, \qquad \nu = q\nu_- + (1-q)\nu_+, \qquad G = E/(2+2\nu), \tag{2}$$

где нижний индекс “$-$” соответствует мартенситной фазе, “$+$” — аустенитной фазе.

Полагая, что напряжения зависят от параметра q значительно слабее, чем фазовые деформации [2], найдем приближенное решение дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{gathered}\varphi_{11} \simeq \eta\,\frac{2S_{11} - S_{22}}{3\sigma\varkappa}, \qquad \varphi_{22} \simeq \eta\,\frac{2S_{22} - S_{11}}{3\sigma\varkappa}, \qquad \varphi_{13} \simeq \eta\,\frac{S_{13}}{\sigma\varkappa}, \\ \eta(q) \equiv \exp\big(\varkappa[1-(1-q)^{1+\lambda}]/(1+\lambda)\big) - 1.\end{gathered} \tag{3}$$

Соотношения (3) отличаются от соотношений (8) в работе [2] видом функции $\eta(q)$. Данное решение удовлетворяет физическим условиям: фазовые деформации отсутствуют в аустените и достигают максимальных значений в мартенсите.

Подставляя функции (3) в первые три уравнения системы (1), получим приближенные определяющие соотношения

$$\begin{gathered}E_0 w_{11} \simeq \eta_1 S_{11} - \eta_2 S_{22}, \qquad E_0 w_{22} \simeq \eta_1 S_{22} - \eta_2 S_{11}, \qquad E_0 w_{13} \simeq \eta_3 S_{13}, \\ \eta_1(q) \equiv \frac{E_0}{E} + \eta\,\frac{2E_0}{3\sigma_0\varkappa_0}, \qquad \eta_2(q) \equiv \nu\,\frac{E_0}{E} + \eta\,\frac{E_0}{3\sigma_0\varkappa_0}, \qquad \eta_3(q) \equiv \frac{E_0}{G} + \eta\,\frac{E_0}{\sigma_0\varkappa_0}.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь E_0 — константа с размерностью напряжения, которую удобно отождествить с одной из констант E_-, E_+.

Уравнения (4) описывают однонаправленное фазовое превращение как термоупругую деформацию с неявной зависимостью от температуры (с помощью параметра q).

Формулировка полной системы уравнений. Для анализа осесимметричных деформаций используются механические уравнения нелинейной модели оболочки с независимыми полями конечных перемещений и поворотов [2]. Полная система уравнений относительно неизвестных функций

$$y_0 = \theta, \quad y_1 = a_2 M_{11} l/H_0, \quad y_2 = r/l, \quad y_3 = z/l, \quad y_4 = a_2 T_1/(\varepsilon C_0), \quad y_5 = a_2 T_3/(\varepsilon C_0)$$

приведена в работе [2] (см. формулы (12)). При численном интегрировании системы ее решения отыскиваются для дискретных значений параметра q в интервале $0 \leqslant q \leqslant 1$. Последнее равенство в (1) связывает параметр q с температурой сплава.

Представленные ниже решения краевых задач получены для образцов, изготовленных из сплава NiTi (никелид титана), при следующих экспериментальных значениях параметров термоупругого мартенситного превращения [6, 7]: $T_- = 23$ °C, $T_+ = 43$ °C, $E_- = 28$ ГПа, $E_+ = 84$ ГПа, $E_0 = E_+$, $\sigma_0 = 0{,}049E_+$, $\varkappa_0 = 0{,}0718$, $\nu_- = 0{,}48$, $\nu_+ = 0{,}33$. Параметр λ в расчетах варьировался.

Выпучивание пластины под действием равномерного давления. Рассматривается шарнирная круговая пластина, нагруженная в аустенитной фазе равномерным нормальным давлением интенсивности P. Исходная форма базовой поверхности задается параметрами $\theta_0 = 0$, $z = 0$, $r = lt$, причем l — радиус ее опорного контура.

Изучается осесимметричная деформация пластины в интервале фазового превращения. Компоненты поверхностной нагрузки для системы дифференциальных уравнений задаются функциями $p_1 = p\sin y_0$, $p_3 = p\cos y_0$, $q_2 = 0$, где $p = Pl/(\varepsilon C_0)$ — параметр давления. Граничные условия на опорном контуре выражаются равенствами

$$y_1(1) = 0, \qquad y_2(1) = 1, \qquad y_3(1) = 0. \tag{5}$$

В полюсе пластины должны выполняться условия

$$T_{13}(0) = 0, \qquad T_{11}(0) - T_{22}(0) = 0, \qquad M_{11}(0) - M_{22}(0) = 0, \tag{6}$$

сформулированные через основные неизвестные функции [2].

Численный анализ нелинейной краевой задачи (система дифференциальных уравнений (12) в [2] с краевыми условиями (5), (6)) в интервале прямого мартенситного превращения выполнен в [2] методом стрельбы. Для анализа полного термоцикла для пластины необходимо решить задачу обратного превращения. Рассматриваемое ниже решение получено в виде разности решений двух краевых задач: прямой задачи (система дифференциальных уравнений (12) в [2] с краевыми условиями (5), (6)) и чисто упругой задачи (без фазовых деформаций) с переменными модулями упругости (2). Обе задачи решены в интервале $0 \leqslant q \leqslant 1$ при одних и тех же значениях параметров: $\varepsilon = 0{,}025$, $\lambda = 0$, $p = 0{,}01$.

Полный термоцикл, полученный по результатам решения задач прямого и обратного превращений, представлен на рис. 1 в виде зависимости наибольшего значения деформации D (в полюсе пластины) от температуры T. При этом для диапазона обратного превращения приняты значения температуры $T_- = 49$ °C и $T_+ = 69$ °C [7]. Кривая *1* на рис. 1 соответствует прямому процессу, кривая *2* — обратному. Горизонтальный участок кривой *1* соответствует деформации пластины в аустенитной фазе ($q = 0$) при $p = 0{,}01$. Интенсивный рост деформации начинается и заканчивается при охлаждении, в интервале прямого превращения 23 °C $\leqslant T \leqslant$ 43 °C. Сброс нагрузки при $T_- = 20$ °C (стрелка на оси ординат) приводит к уменьшению накопленной деформации в результате исчезновения упругой составляющей.

Дальнейший нагрев ненагруженной (но с накопленной фазовой деформацией) пластины происходит в соответствии с кривой *2*. До начала обратного превращения фазовая деформация остается постоянной (горизонтальный участок кривой *2*), а при обратном превращении наблюдается интенсивная релаксация накопленной деформации до полного восстановления исходной (плоской) формы пластины.

Выпучивание сферического купола под действием равномерного давления. Исходная форма меридиана купола задается параметрами

$$r = la_2, \qquad z = la_3, \qquad \theta_0 = \alpha t,$$

где α — угол наклона меридиана в опорной точке. Условия шарнирного опирания купола формулируются равенствами вида (5), причем $y_2(1) = b/l = \alpha^{-1}\sin\alpha$, где b — радиус опорного контура. Условия (6) остаются неизменными.

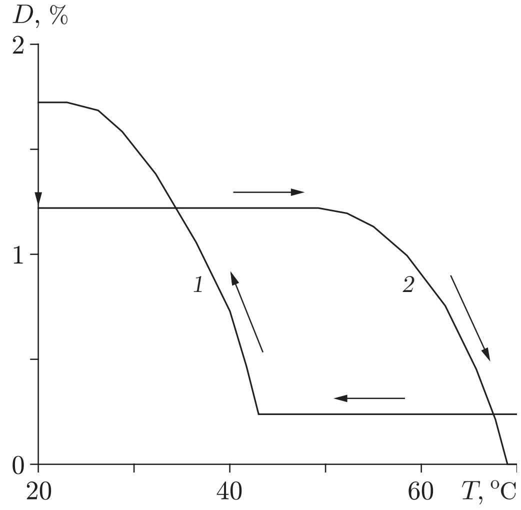

Рис. 1

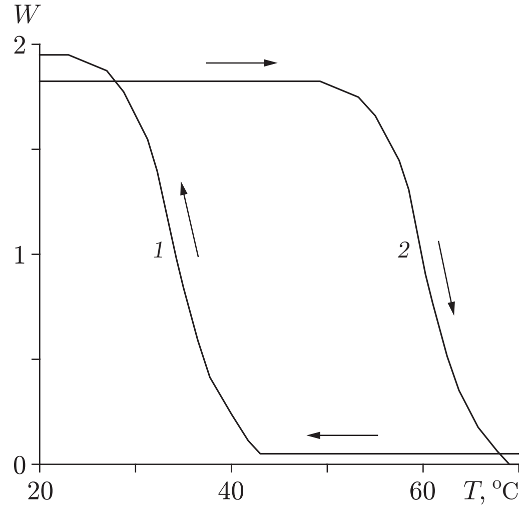

Рис. 2

Рис. 1. Межфазный гистерезис круговой пластины в термомеханическом цикле ($\varepsilon = 0{,}025$, $p = 0{,}01$):
1 — траектория прямого превращения, *2* — траектория обратного превращения

Рис. 2. Межфазный гистерезис нехлопающего сферического купола в термомеханическом цикле ($\varepsilon = 0{,}025$, $p = 0{,}002$):
1 — траектория прямого превращения, *2* — траектория обратного превращения

Результаты численного анализа задач прямого и обратного превращений для купола с геометрическими параметрами $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0{,}025$ и с параметром $\lambda = 0$ представлены на рис. 2. Траектории осесимметричных деформаций такого купола, как и пластины, монотонны по параметрам p и q, все равновесные состояния устойчивы и выпучивание купола происходит без хлопка [2]. Полный термоцикл для рассматриваемого купола представлен на рис. 2 в виде зависимости максимального прогиба W (отнесенного к высоте купола) от температуры T. Прямое превращение рассчитано при нагрузке $p = 0{,}002$. Обратное превращение рассчитано без нагрузки. Рис. 2 качественно согласуется с рис. 1.

Термоцикл, сопровождающийся хлопком оболочки, рассчитан для более тонкого купола с параметрами $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0{,}01$. Сначала анализировались изотермические процессы деформирования купола вне интервала превращения (в аустенитной и мартенситной фазах) при изменении параметра нагрузки. Траектории равновесных состояний этого купола в зависимости от параметра p показаны на рис. 3 кривой *1* для аустенитной фазы ($q = 0$) и кривой *2* для мартенситной фазы ($q = 1$). Обе траектории немонотонны и содержат по две критические точки (p, W): $(0{,}0144, 0{,}55)$, $(0{,}0028, 1{,}63)$ — верхняя и нижняя точки траектории *1*; $(0{,}006, 0{,}56)$, $(0{,}001\,24, 1{,}64)$ — верхняя и нижняя точки траектории *2*.

Следует отметить, что зависимости, представленные на рис. 3, получены в результате решения двух чисто упругих задач с параметрами упругости E_+, ν_+ (кривая *1*) и E_-, ν_- (кривая *2*). Заданные значения модулей Юнга различаются в три раза, а соответствующие значения верхних и нижних критических нагрузок — более чем в два раза. Вместе с тем критические значения прогиба различаются незначительно.

Траектория равновесных состояний купола в зависимости от параметра q (в интервале фазового превращения при $\lambda = 1$, $p = 0{,}002$) показана на рис. 4. Эта траектория имеет две критические точки (q, W): верхнюю $(0{,}69, 0{,}56)$ и нижнюю $(0{,}04, 1{,}63)$. Видно, что критические значения прогиба те же, что и для изотермических зависимостей W от параметра p

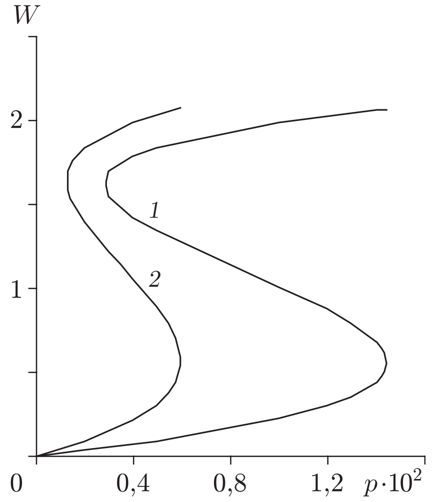

Рис. 3

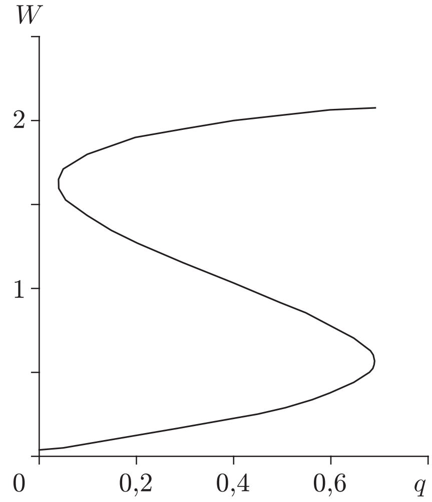

Рис. 4

Рис. 3. Траектории равновесных состояний сферического хлопающего купола вне интервала фазового превращения:
1 — аустенитная фаза ($q = 0$), *2* — мартенситная фаза ($q = 1$)

Рис. 4. Траектория равновесных состояний в интервале фазового превращения ($p = 0{,}002$)

на рис. 3. Наличие критических точек у траекторий деформирования свидетельствует о возможности скачкообразного изменения равновесных состояний купола.

Следует отметить, что при заданном значении $p = 0{,}002$ потеря устойчивости купола невозможна ни в аустенитной, ни в мартенситной фазе, но имеет место в температурном интервале фазового превращения. При уменьшении параметра p верхнее критическое значение параметра q увеличивается: $q = 1$ при $p \simeq 0{,}0017$. При меньших значениях параметра нагрузки фазовая деформация купола накапливается без потери устойчивости. Следовательно, теоретический анализ позволяет определить внешние нагрузки, ниже которых не происходит потери устойчивости деформации купола в интервале фазового превращения материала.

Результаты расчета полного термоцикла представлены на рис. 5 в виде зависимости максимального прогиба W от температуры T. Процесс прямого превращения рассчитан при нагрузке $p = 0{,}002$, существенно меньшей по сравнению с верхними критическими нагрузками купола в аустенитной и мартенситной фазах. Процесс обратного превращения рассчитан в отсутствие нагрузки. Сплошная линия *1* — траектория прямого превращения со скачком в верхней критической точке ($q \simeq 0{,}69$, $T \simeq 33{,}3$ °C). Сплошная линия *2* — траектория обратного превращения со скачком в нижней критической точке ($q \simeq 0{,}04$, $T \simeq 68{,}5$ °C). Сплошные линии *1, 2* образуют гистерезисную петлю динамического термоцикла, сопровождающегося мгновенными перескоками от одной равновесной формы к другой при фиксированной температуре. Видно, что потеря устойчивости хлопком возможна и при прямом, и при обратном превращениях. Штриховые кривые *1, 2* на рис. 5 образуют гистерезисную петлю статического термоцикла, который реализуется при условии, что фазовые деформации направлены вдоль траектории равновесных состояний купола (см. рис. 4).

В таблице приведены более подробные данные об эволюции фазовых деформаций купола при $p = 0{,}002$. Для ряда значений параметра q указаны локальные значения проги-

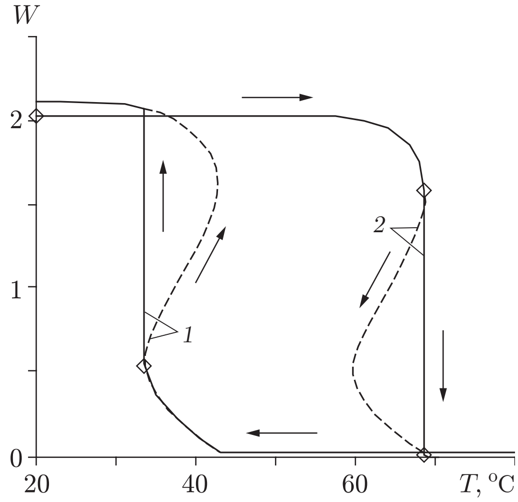

Рис. 5. Межфазный гистерезис сферического хлопающего купола в термомеханическом цикле ($\varepsilon = 0{,}01$, $p = 0{,}002$):
сплошные линии — ветви динамического гистерезиса, штриховые — ветви статического гистерезиса; *1* — траектория прямого превращения, *2* — траектория обратного превращения

q	W	$-\vartheta(1)$	$-\tau_1(1)$	$-s_i(0)$	$(s_3)_{\max}$	$-w_i(0)$, %	$(w_3)_{\max}$, %
0	0,0335	0,0024	0,9010	2,0202	0,0232	0,0135	0,000 62
0,25	0,1433	0,0098	1,0058	2,3505	0,0217	0,0557	0,001 76
0,50	0,2899	0,0188	1,1454	2,8956	0,0213	0,1106	0,002 77
0,68	0,4984	0,0300	1,3989	4,0485	0,0203	0,1879	0,003 26
0,68	0,6222	0,0357	1,5927	5,0327	0,0281	0,2336	0,004 51
0,50	0,9104	0,0480	2,2594	8,7404	0,0646	0,3339	0,008 40
0,25	1,2165	0,0627	3,7385	17,4250	0,1493	0,4130	0,012 12
0,04	1,6129	0,0918	7,6227	46,2170	0,4040	0,4403	0,014 37
0,04	1,6530	0,0952	7,2754	46,0360	0,4016	0,4386	0,014 28
0,25	1,9257	0,1185	1,5717	17,4240	0,1488	0,4130	0,013 42
0,50	2,0301	0,1286	0,5227	10,3420	0,1214	0,3951	0,015 78
0,68	2,0750	0,1330	0,2511	8,3241	0,1113	0,3864	0,017 85
1,00	2,1230	0,1378	0,0398	6,6667	0,1018	0,3768	0,021 53

ба W, угла поворота ϑ, параметров радиального усилия $\tau_1 = 100T_1/(\varepsilon C_0)$, напряжений $s_i = 100S_{ii}/(\varepsilon E_0)$, $s_3 = 100S_{13}/(\varepsilon E_0)$ и деформаций $w_i = w_{ii}$, $w_3 = w_{13}$ [2]. Тангенциальные компоненты тензоров напряжений и деформаций достигают наибольших значений в полюсе, поперечные (на порядок меньшие) — на опорном контуре и внутри интервала. Из таблицы следует, что предположение о малой скорости изменения напряжений по параметру q несправедливо в области неустойчивых послекритических, преимущественно изгибных деформаций и справедливо в областях устойчивых докритических и “вывернутых” форм купола, где преобладают тангенциальные деформации. Именно эти формы фиксируются в динамическом термоцикле купола.

Сравнительный анализ определяющих уравнений (4) при $\lambda = 1$, 0 показал, что при одном и том же значении q фазовые деформации образца из сплава с параметром $\lambda = 1$ существенно меньше фазовых деформаций образца из сплава с параметром $\lambda = 0$.

Расчетные графики межфазных гистерезисов пластины и нехлопающего купола подобны зависимостям, полученным при экспериментальном анализе фазовых превращений в классических образцах из сплавов с памятью формы [7]. Результаты экспериментального исследования динамической неустойчивости пологого купола в интервале термоцикла приведены в [8]. Однако в [8] отсутствуют данные, необходимые для количественного сопоставления теоретических и экспериментальных результатов. В работе [5] доказано, что в случае, когда фазовое превращение происходит под действием постоянного напряжения, фазовые деформации при прямом и обратном превращениях одинаковы в точках с одним и тем же значением параметра фазового состава. Это является подтверждением достоверности предложенного приближенного метода анализа термоциклов при медленно изменяющихся напряжениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шкутин Л. И.** Анализ плоских фазовых деформаций стержней и пластин // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 156–164.
2. **Шкутин Л. И.** Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 163–171.
3. **Мовчан А. А.** Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
4. **Мовчан А. А.** Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 173–181.
5. **Мовчан А. А.** Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 4. С. 136–144.
6. **Мовчан А. А.** Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 79–90.
7. **Мовчан А. А., Казарина С. А.** Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
8. **Хусаинов М. А.** Исследование эффекта осесимметричного выпучивания круглых пластин // Журн. техн. физики. 1997. Т. 67, № 6. С. 118–120.

Поступила в редакцию 23/I 2007 г.,
в окончательном варианте — 27/III 2007 г.