ЛИТЕРАТУРА

1. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
2. **Purdy K. R., Jackson T. W., Gorton C. W.** Viscous fluid flow under the influence of a resonant acoustic field. Trans. ASME, 1964, C 86, N 1, 97—106. Рус .пер. Порди, Джексон, Гортон. Влияние резонансного акустического поля на течение вязкой жидкости.—«Теплопередача», 1964, т. 86, № 1.
3. **Physical** acoustics. Vol. II., pt. B. Properties of polimers and nonlinear acoustics. Academic press. N. Y.— L., 1965. Рус. пер. Физическая акустика под ред. У. Мэзона. Т. II, ч. Б. Свойства полимеров и нелинейная акустика. М., 1969, гл. 5.
4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970, с. 261.

УДК 532.51

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

О. А. Лихачев

(*Новосибирск*)

Исследуется характер потери устойчивости течения в пограничном слое с отсосом по отношению к малым, но конечным возмущениям. Показано, что для рассматриваемого течения осуществляется жесткое возбуждение автоколебаний. Неустойчивый автоколебательный режим существует в некоторой окрестности нейтральной кривой в области устойчивости исходного течения при всех числах Рейнольдса Re.

Использование внешних управляющих факторов (отрицательный градиент давления, отсос, поперечное магнитное поле в случае проводящей среды и т. д.) позволяет затянуть ламинарный режим течения в пограничном слое до довольно больших чисел Рейнольдса, что достигается бо́льшей заполненностью профилей скорости. В то же время оказывается, что такой затянутый ламинарный режим взрывообразно теряет устойчивость по отношению к конечным возмущениям при числах Рейнольдса, меньших критического, вычисленного по линейной теории.

После потери устойчивости исходное стационарное течение сменяется периодическим по однородным переменным автоколебательным режимом. Существование таких автоколебаний, как решения уравнений Навье — Стокса, ответвляющиеся от стационарного решения, было доказано в работе [1]. Автоколебания ответвляются при числах Рейнольдса, соответствующих точкам нейтральной кривой по линейной теории устойчивости. В работе [2] исследована нелинейная устойчивость течения в плоском канале и доказан жесткий характер потери устойчивости исходного течения.

1. При однородном отсосе с постоянной скоростью v_0 асимптотический профиль пограничного слоя, построенный по толщине вытеснения $\delta_* = \nu/|v_0|$ и скорости на бесконечности u_∞, имеет вид

$$u = 1 - e^{-y}. \tag{1.1}$$

Причем (1.1) является точным решением уравнений Навье — Стокса для случая плоскопараллельного движения [3]. С учетом поперечной компоненты скорости функция тока возмущенного движения удовлетворяет уравнению

$$(1.2)\quad \partial\Delta\psi/\partial t + u\partial\Delta\psi/\partial x - u''\partial\psi/\partial x - (1/\mathrm{Re})\Delta\Delta\psi - (1/\mathrm{Re})\partial\Delta\psi/\partial y = \\ = (\partial\psi/\partial x)\partial\Delta\psi/\partial y - (\partial\psi/\partial y)\partial\Delta\psi/\partial x$$

с граничными условиями прилипания на стенке и требованием минимального роста при $y \to \infty$. Здесь $\mathrm{Re} = u_\infty \delta_*/\nu$ построено по толщине вытеснения пограничного слоя δ_*; Δ — оператор Лапласа.

Следуя [2], выберем на нейтральной кривой линеаризованного уравнения (1.2) произвольную точку, соответствующую Re_0. Положим

$$(1.3)\qquad \mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 + \varepsilon^2 f,\ f = \pm 1$$

и будем искать решение (1.2) в виде ряда по малому параметру ε

$$(1.4)\qquad \psi = \frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(x - ct, y),\ \mathrm{Re}c = \mathrm{Re}_0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k.$$

Подставляя (1.4) в (1.2) и приравнивая нулю коэффициенты при ε^k, получим цепочку уравнений

$$(1.5)\qquad \Delta\Delta\psi_k - \mathrm{Re}_0\left[(u - c_0)\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x} - u''\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right] + \frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial y} = \\ = f\left[u\frac{\partial\Delta\psi_{k-2}}{\partial x} - u''\frac{\partial\psi_{k-2}}{\partial x}\right] + \sum_{j=1}^{k-1}\left[\left(\frac{\partial\psi_{k-j}}{\partial y} - \mathrm{Re}_0 c_{k-j}\right)\times \\ \times\frac{\partial\Delta\psi_j}{\partial x} - \frac{\partial\psi_{k-j}}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_j}{\partial y}\right].$$

При $k=1$ уравнение (1.5) однородно и его решение имеет вид

$$\psi_1(x - ct, y) = \beta\{\varphi(y)\exp[i\alpha(x - ct)] + \bar\varphi(y)\exp[-i\alpha(x - ct)]\},$$

где $\varphi(y)$ является решением модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда,

$$(1.6)\quad L_\alpha\varphi \equiv \varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi - i\alpha\,\mathrm{Re}_0[(u - c_0)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi] + \\ + (\varphi''' - \alpha^2\varphi') = 0$$

с граничными условиями $\varphi = \varphi' = 0$ при $y=0$ и требованием минимального роста $\varphi(y)$ на бесконечности. При достаточно больших y можно принять $u'' = 0$, $u = 1$. Тогда решения (1.6), затухающие на бесконечности, имеют вид

$$\varphi = C_1\exp(-\alpha y) + C_2\exp(-\gamma y),$$

где

$$\gamma = \gamma_r + i\gamma_i;\ \gamma_r = 1/2 + \varkappa_r;\ \varkappa_r = \left(\sqrt{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)/2; \\ \gamma_i = b/2\varkappa_r;\ a = \alpha^2 + 1/4;\ b = \alpha\,\mathrm{Re}_0(1 - c_0).$$

С учетом такого характера затухания возмущений граничные условия на внешней границе при достаточно больших y могут быть записаны в виде

$$(\varphi'' - \alpha^2\varphi)' + \gamma(\varphi'' - \alpha^2\varphi) = 0; \\ (\varphi'' - \gamma^2\varphi)' + \alpha(\varphi'' - \gamma^2\varphi) = 0,\ y = A.$$

Численные расчеты осуществлялись для конечной области значений $0 < y < A$, где $A=10$. Увеличение интервала интегрирования практически не меняло результаты.

В разложении (1.4) для функции тока член при $k=2$ имеет вид

$$\psi_2 = \beta^2\{V_0(y) + V_1(y)\exp[2i\alpha(x-ct)] + \bar{V}_1(y)\exp[-2i\alpha(x-ct)]\}.$$

Функция $V_1(y)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению

$$L_{2\alpha}V_1 = i\alpha(\varphi'^2 - \varphi\varphi'')'$$

с граничными условиями $V_1 = V_1' = 0$ при $y=0$ и с условием минимального роста на бесконечности. Функция $V_0(y)$ удовлетворяет краевой задаче

$$V_0^{IV} + V_0'' = i\alpha(\bar{\varphi}\varphi' - \varphi\bar{\varphi}')'', \quad V_0 = V_0' = 0 \ \text{при} \ y = 0$$

и условию минимального роста $V_0(y)$ на бесконечности, которое можно представить в виде

$$\begin{cases} V_0' - V_0'' = 0; \\ V_0'' + V_0''' = 0 \ \text{при} \ y = A. \end{cases}$$

Условием разрешимости (1.5) при $k > 1$ является равенство $c_k=0$ при нечетных k.

Из (1.5) следует, что ψ_3 будет суммой гармонических колебаний с волновыми числами α и 3α. Условие разрешимости уравнения для амплитуды первой гармоники имеет вид

$$-c_2\,\mathrm{Re}_0 I_1 + \beta^2 I_2 + f I_3 = 0, \tag{1.7}$$

где

$$I_1 = \int_0^\infty \theta(y)(\varphi'' - \alpha^2\varphi)\,dy;$$

$$I_2 = \int_0^\infty \theta(y)\,[V_0'(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - V_1'(\bar{\varphi}'' - \alpha^2\bar{\varphi}) - 2V_1(\bar{\varphi}''' - \alpha^2\bar{\varphi}') - \varphi V_0''' + 2\bar{\varphi}'(V_1'' - 4\alpha^2 V_1) + \bar{\varphi}(V_1''' - 4\alpha^2 V_1')]\,dy;$$

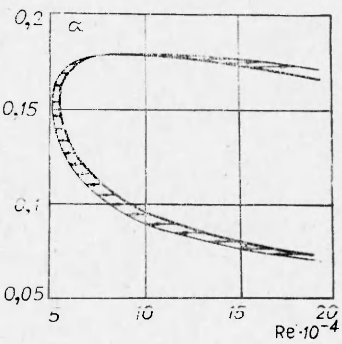
$$I_3 = \int_0^\infty \theta(y)\,[u(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi]\,dy.$$

Здесь $\theta(y)$ — решение задачи, сопряженной (1.6). Интегрирование ведется по бесконечной области, но интегралы сходятся в силу экспоненциального затухания подынтегральных функций. Знак f в (1.7) ввиду того, что на нейтральной кривой

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{Re}} = f\beta^2 \int_0^\infty (|\varphi'|^2 + \alpha^2|\varphi|^2)\,dy,$$

где E — энергия автоколебаний, совпадает со знаком производной $\partial E/\partial\mathrm{Re}$ при условии $\beta^2 > 0$. Это совпадение можно интерпретировать как существование сверхкритических или докритических автоколебаний (см. (1.3)).

Численные расчеты, которые проводились методом дифференциальной прогонки со стыковкой [4], показали, что в рассматриваемом случае на всей нижней ветви нейтральной кривой и части верхней ветви $\partial E/\partial\,\mathrm{Re} < 0$, т. е. автоколебания ответвляются в сторону меньших чисел Рейнольдса. Автоколебания существуют в области устойчивости исходного течения и сами неустойчивы. Вышеизложенные результаты иллюстрирует фигура, где дана нейтральная кривая для асимптотического течения в пограничном слое с отсосом. Стрелками показано, где существуют автоколебательные режимы, их направление соответствует знаку производной $\partial E/\partial\,\mathrm{Re}$. Смена знака $\partial E/\partial\,\mathrm{Re}$, которая проходит в точке $\alpha = 0{,}1807$, $\mathrm{Re} = 87612$ через нуль, не имеет принципиального значения, а связана с изменением ориентации области устойчивости относительно нейтральной кривой. Принципиальное значение имеет характер ветвления на носике нейтральной кривой при $\alpha_* = 0{,}1557$, $\mathrm{Re}_* = 54370$. Если автоколебания ответвляются в область устойчивости, то при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_*$ исходное течение неустойчиво по отношению к конечным возмущениям и впервые могут возникнуть сразу конечные по амплитуде автоколебания или турбулентность. Таким образом, нелинейное критическое число Рейнольдса меньше, чем вычисленное по линейной теории. Те же результаты по исследованию характера ветвления получены, когда в уравнении (1.2) опускался член, ответственный за наличие поперечной скорости отсоса, но при некотором изменении критических параметров: $\mathrm{Re}_* = 47100$, $\alpha_* = 0{,}1625$.



2. Профиль скорости пристенного течения проводящей несжимаемой жидкости при достаточно большом поперечном магнитном поле имеет вид (1.1) с той лишь разницей, что толщина вытеснения $\delta_* = 1/G$, где G — число Гартмана. В уравнении (1.2) вместо члена, связанного с постоянной поперечной скоростью, т. е. $-(1/\mathrm{Re})\partial\Delta\psi/\partial y$, будет дополнительный член вида $(1/\mathrm{Re}_*)\partial^2\psi/\partial y^2$. Параметры носика нейтральной кривой следующие: $\mathrm{Re}_* = 48\,300$, $\alpha_* = 0{,}1617$. В остальном картина ветвления стационарных решений полностью аналогична описанной выше. На всей нейтральной кривой автоколебания ответвляются в область устойчивости исходного течения. На носике нейтральной кривой $\partial E/\partial\,\mathrm{Re} < 0$, т. е. автоколебания существуют при числах Рейнольдса, меньших критического по линейной теории. Расчеты во всех случаях проводились до бо́льших значений Re, чем приведено на фигуре.

Известен результат о мягком характере потери устойчивости течения Блазиуса и жестком характере потери устойчивости уже при небольших отрицательных градиентах давления, хотя отрицательный градиент давления повышает устойчивость течения в пограничном слое по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Таким образом, используя управляющие факторы, можно затянуть ламинарный режим до очень больших значений Re. При этом конечные по амплитуде возмущения приводят к потере устойчивости исходного стационарного режима, по-видимому, при числах Рейнольдса, значительно меньших числа Рейнольдса, даваемого линейной теорией. Это говорит о свойствах консервативности нелинейного критического Re по отношению к внешним управляющим факторам.

Автор благодарит М. А. Гольдштика и В. Н. Штерна за внимание к работе.

Поступила 10 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Юдович В. И.** Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 638—655.
2. **Андрейчиков И. П., Юдович В. И.** Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.—«Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 4, с. 791—794.
3. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969, с. 742.
4. **Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н.** Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости.— ПМТФ, 1970, № 2, с. 56—61.

УДК 532.516

РАСЧЕТ АВТОКОЛЕБАНИЙ ТИПА АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ЦИЛИНДРАМИ, ВРАЩАЮЩИМИСЯ В РАЗНЫЕ СТОРОНЫ

А. Л. Уринцев

(*Ростов-на-Дону*)

Методом Ляпунова — Шмидта на основе уравнений Навье — Стокса исследован характер потери устойчивости течения Куэтта между цилиндрами при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. Рассмотрен случай вращения цилиндров в разные стороны при таком соотношении угловых скоростей, когда роль наиболее опасных возмущений переходит от вращательно-симметричных к невращательно-симметричным возмущениям. Ответвляющиеся нестационарные вторичные течения (автоколебания) разыскиваются в виде волн, бегущих по азимуту; продольное волновое число α и азимутальное число m предполагаются заданными. Для случая $m = 1$ рассчитаны амплитуда автоколебаний и скорость волн и показано, что в зависимости от значения α возможно как мягкое возбуждение устойчивых, так и жесткое — неустойчивых автоколебаний, причем волновому числу α, для которого критическое число Рейнольдса минимально, соответствует устойчивый волновой режим, существующий в закритической области.

Линейная задача устойчивости кругового течения вязкой жидкости относительно невращательно-симметричных возмущений рассматривалась в работах [1—3]. Ди Прима [1] численно решал задачу методом Галеркина, ограничиваясь случаем, когда зазор мал и цилиндры вращаются в одну сторону. Анализ Ди Прима распространен в работе [2] на случай цилиндров, вращающихся в разные стороны, а в работе [3] — на случай немалых зазоров. Нелинейная задача устойчивости рассмотрена в [4], где для фиксированного $\alpha = 3$ и вращающихся в разные стороны цилиндров рассчитано осесимметричное стационарное вторичное течение — вихри Тейлора. Образование азимутальных волн в жидкости между цилиндрами подробно исследовалось в экспериментах Коулза [5].

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ и кинематической вязкости ν заполняет пространство между двумя соосными цилиндрами, которые имеют радиусы r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) и вращаются с угловыми скоростями соответственно Ω_1 и Ω_2. Примем за единицы длины, времени и массы величины $r_2 - r_1$, $(r_2 - r_1)^2/\nu$, $(r_2 - r_1)^3/\rho$ и введем безразмерные параметры: $\mathrm{Re} = \Omega_1 r_1 (r_2 - r_1)/\nu$ — число Рейнольдса; $\mu = \Omega_2/\Omega_1$