УДК 532.542

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ БИНГАМА — ПАПАНАСТАСИУ НАД ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКОМ

Н. А. Хан, Ф. Султан*

Университет г. Карачи, 75270 Карачи, Пакистан
* Инженерно-технологический университет Надиршо Эдулджи Диншоу, 75270 Карачи, Пакистан
E-mails: njbalam@yahoo.com, faqiha.sultan0@gmail.com

Исследуется течение жидкости Бингама — Папанастасиу, вызванное вращением бесконечного диска. Для того чтобы исключить разрывный характер определяющих соотношений в модели Бингама, в модель Бингама — Папанастасиу, являющуюся обобщением модели пластической среды Бингама, вводится параметр продолжения. С использованием автомодельного решения Кармана система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно. Исследуется влияние числа Бингама и параметра продолжения на радиальную, тангенциальную и осевую составляющие вектора скорости, на распределение давления, радиальный и тангенциальный коэффициенты поверхностного трения.

Ключевые слова: вязкопластическая среда, модель Бингама — Папанастасиу, вращающийся диск, решение Кармана.

DOI: 10.15372/PMTF20180409

Введение. Основным параметром модели вязкопластической жидкости является предел текучести. В соответствии с этой моделью материал не деформируется, если второй инвариант тензора напряжений меньше предела текучести, и деформируется, если он больше предела текучести. Определяющие соотношения зависят от характера течения. Модели пластических сред Бингама, Кэссона, Гершеля — Балкли являются моделями вязкопластических сред и содержат разрыв параметров при переходе от жесткого состояния к состоянию текучести. В случае простых течений для указанных выше сред построены аналитические решения, однако в общем случае для таких моделей возможно построение только численных решений. Процедуру построения решений можно упростить, введя в эти модели параметр продолжения, при соответствующем выборе которого можно построить автомодельные решения. Экспоненциальная модель, предложенная в [1], является удачной модификацией модели Бингама. С использованием этой модели авторы работы [2], изменяя число Бингама (предел текучести), исследовали течение различных вязкопластических сред: от ньютоновской жидкости до полностью пластических сред. В работе [3] численно исследовано течение пластической жидкости Бингама в квадратной полости, обусловленное наличием градиента давления. В [4] с использованием модели Бингама —

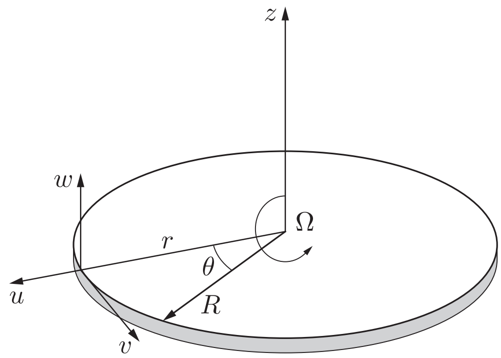

Рис. 1. Схема задачи

Папанастасиу исследовано восходящее течение вязкопластической жидкости. В работе [5] построены аналитические решения задачи об осесимметричном течении неньютоновской жидкости над вращающимся бесконечным диском. Задача о течении жидкости над вращающимся диском вызывает большой интерес исследователей, так как имеет многочисленные приложения в различных областях науки и техники. Большое количество работ посвящено изучению течения жидкости над бесконечным вращающимся диском. В работе [6] с использованием моментной теории численно исследовано течение магнитогидродинамического потока. В [7] изучено влияние магнитного поля на течение жидкости Джеффри над бесконечным вращающимся диском. В [8] рассмотрено ламинарное течение жидкости Бингама над вращающимся диском. Авторами работы [9] обобщены результаты работы [8] и получено аналитическое решение задачи о завихренном течении пластической жидкости Бингама над бесконечным вращающимся диском. В [10] найдено решение Кармана для случая течения пластической жидкости Бингама. В [11] исследовалось течение жидкости Эйринга — Пауэлла над вращающимся диском с учетом анизотропного проскальзывания. В работе [12] исследованы производство энтропии и влияние анизотропного проскальзывания на течение микрополярной жидкости над вращающимся диском.

Модель жидкости Бингама — Папанастасиу описывает течения агрегированных суспензий, примером которых является течение в илистых реках. Такое течение встречается также во многих технологических процессах.

Целью настоящей работы является исследование течения жидкости Бингама — Папанастасиу над вращающимся диском. Уравнения задачи, описывающие реологические свойства течения, с использованием автомодельных переменных сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решены численно с помощью процедуры bvp4c пакета MATLAB.

1. Физическая и математическая постановки задачи. Рассматривается трехмерное установившееся ламинарное течение несжимаемой жидкости Бингама — Папанастасиу, создаваемое вращающимся диском, на который действует постоянное давление P_∞. Диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω, находится в плоскости $z = 0$. Рассматривается течение в полупространстве $z > 0$ (рис. 1).

Уравнение неразрывности и уравнения движения несжимаемой жидкости имеют вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0,$$

$$\rho(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = -\nabla p + \nabla \tau_{ij},$$

где $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости с компонентами u, v, w; ρ — плотность жидкости; p — гидростатическое давление; τ_{ij} — компоненты девиатора напряжений жидкости Бингама —

Папанастасиу:

$$\tau_{ij} = \Big(\mu_p + \frac{\tau_y}{\dot\gamma}\,(1 - \mathrm{e}^{-m\dot\gamma})\Big) A_1,$$

μ_p — пластическая вязкость; τ_y — предел текучести; m — параметр продолжения; $A_1 = \nabla \cdot \boldsymbol{V} + (\nabla \cdot \boldsymbol{V})^{\mathrm{т}}$ — тензор скоростей деформаций; ∇ — дифференциальный оператор; $\dot\gamma$ — второй инвариант тензора скоростей деформаций:

$$\dot\gamma = \sqrt{\operatorname{tr} A^2/2}\,.$$

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) выражения для компонент тензора напряжений в области течения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\tau_{rr} = 2\Big(\mu_p + \frac{\tau_y}{\dot\gamma}\Big)\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = \Big(\mu_p + \frac{\tau_y}{\dot\gamma}\Big)\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\Big), \quad \tau_{rz} = \Big(\mu_p + \frac{\tau_y}{\dot\gamma}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\Big),\\ \tau_{\theta\theta} = 2\Big(\mu_p + \frac{\tau_y}{\dot\gamma}\Big)\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\Big), \quad \tau_{\theta z} = \Big(\mu_p + \frac{\tau_y}{\dot\gamma}\Big)\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial z}\Big), \quad \tau_{zz} = 2\Big(\mu_p + \frac{\tau_y}{\dot\gamma}\Big)\frac{\partial w}{\partial z}\end{gathered} \tag{1}$$

$(\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r},\ \tau_{rz} = \tau_{zr},\ \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta})$. Тогда второй инвариант тензора скоростей деформаций записывается следующим образом:

$$\dot\gamma = \Big[2\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{v}{r}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\Big)^2 + {} \\ {} + 2\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2\Big]^{1/2}.$$

Уравнения, описывающие течение жидкости Бингама — Папанастасиу над вращающимся диском, в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{2}$$

$$\rho\Big(u\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w\,\frac{\partial u}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r}; \tag{3}$$

$$\rho\Big(u\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w\,\frac{\partial v}{\partial z}\Big) = \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} + 2\,\frac{\tau_{r\theta}}{r}; \tag{4}$$

$$\rho\Big(u\,\frac{\partial w}{\partial r} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r}. \tag{5}$$

Задача решается при следующих краевых условиях:

$$z = 0\colon \qquad u = 0, \quad v = r\Omega, \quad w = 0,$$

$$z \to \infty\colon \qquad u \to 0, \quad v \to 0, \quad w \to 0, \quad P \to 0.$$

Для записи уравнений движения в безразмерных переменных используются преобразования [5]

$$f(\xi) = \frac{u}{r\Omega}, \quad g(\xi) = \frac{v}{r\Omega}, \quad h(\xi) = \frac{w}{\sqrt{v\Omega}}, \quad P(\xi) = \frac{p}{\rho v\Omega}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\Omega}{v}}\,z, \quad \mathrm{Re} = \frac{\Omega r^2}{\nu_p}, \tag{6}$$

где функции f, g, h — безразмерные радиальная, тангенциальная и осевая компоненты вектора скорости; ξ — безразмерная координата z; Re — число Рейнольдса; $\nu_p = \mu_p/\rho$ — кинематическая пластическая вязкость; P — безразмерное динамическое давление в жидкости.

С использованием переменных [12] уравнения неразрывности и движения (2)–(5) приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$2f + h' = 0,$$

$$f'' + \frac{\mathrm{Bn}}{\dot\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})f'' + \frac{2M\,\mathrm{Bn}\,\mathrm{e}^{-M\dot\gamma}}{\dot\gamma^2}(3ff'^2 + g'^2 f + f'h'h'') +$$
$$+ \frac{M\,\mathrm{Bn}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{-M\dot\gamma}}{\dot\gamma^2}(f''f'^2 + f'g'g'') - \frac{2\,\mathrm{Bn}}{\dot\gamma^3}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})(3ff'^2 + g'^2 f + f'h'h'') -$$
$$- \frac{\mathrm{Bn}\,\mathrm{Re}}{\dot\gamma^3}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})(f''f'^2 + f'g'g'') + g^2 - hf' - f^2 = 0,$$

$$g'' + \frac{\mathrm{Bn}}{\dot\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})g'' - 2fg + \frac{2M\,\mathrm{Bn}\,\mathrm{e}^{-M\dot\gamma}}{\dot\gamma^2}(2ff'g' + g'h'h'') +$$
$$+ \frac{M\,\mathrm{Bn}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{-M\dot\gamma}}{\dot\gamma^3}(f'g'f'' + g'^2 g'') - \frac{2\,\mathrm{Bn}}{\dot\gamma^3}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})(2ff'g' + g'h'h'') -$$
$$- \frac{\mathrm{Bn}\,\mathrm{Re}}{\dot\gamma^3}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})(f'g'f'' + g'^2 g'') - hg' = 0,$$

$$P' + hh' - 2(f' + h'') - \frac{2\,\mathrm{Bn}}{\dot\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})(f' + h'') - \frac{4M\,\mathrm{Bn}\,\mathrm{e}^{-M\dot\gamma}}{\dot\gamma^2}(2ff'h' + h'^2 h'') +$$
$$+ \frac{4\,\mathrm{Bn}}{\dot\gamma^3}(1 - \mathrm{e}^{-M\dot\gamma})(2ff'h' + h'^2 h'') - \frac{M\,\mathrm{Bn}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{-M\dot\gamma}}{\dot\gamma^3}(f'^3 + f'g'^2 + 2f'h'f'' + h'g'g'') +$$
$$+ \frac{\mathrm{Bn}\,\mathrm{Re}}{\dot\gamma^3}(f'^3 + f'g'^2 + 2f'h'f'' + h'g'g'') = 0,$$

краевые условия записываются в виде

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1, \quad h(0) = 0, \quad P(0) = 0, \quad f(\infty) = 0, \quad g(\infty) = 0,$$

где $\dot\gamma = \sqrt{4f^2 + \mathrm{Re}\,(f'^2 + g'^2) + 2h'^2}$; $M = m\Omega$ — параметр продолжения; $\mathrm{Bn} = \tau_y/(\mu_p\Omega)$ — число Бингама.

Радиальный C_f и тангенциальный C_g коэффициенты локального поверхностного трения вычисляются по формулам

$$C_f = \frac{\tau_{rz}}{\mu_p\Omega}\Big|_{z=0}, \qquad C_g = \frac{\tau_{rz}}{\mu_p\Omega}\Big|_{z=0}.$$

С использованием (1), (6) выражения для коэффициентов локального поверхностного трения записываются в следующем виде:

$$\mathrm{Re}^{-1/2}\, C_f = \Big(1 + \frac{\mathrm{Bn}\,(1 - \mathrm{e}^{-M\sqrt{4(f(0))^2 + \mathrm{Re}\,((f'(0))^2 + (g'(0))^2) + 2(h'(0))^2}})}{\sqrt{4(f(0))^2 + \mathrm{Re}\,((f'(0))^2 + (g'(0))^2) + 2(h'(0))^2}}\Big) f'(0),$$

$$\mathrm{Re}^{-1/2}\, C_g = \Big(1 + \frac{\mathrm{Bn}\,(1 - \mathrm{e}^{-M\sqrt{4(f(0))^2 + \mathrm{Re}\,((f'(0))^2 + (g'(0))^2) + 2(h'(0))^2}})}{\sqrt{4(f(0))^2 + \mathrm{Re}\,((f'(0))^2 + (g'(0))^2) + 2(h'(0))^2}}\Big) g'(0).$$

2. Результаты численных расчетов и их обсуждение. В таблице приведены вычисленные значения радиального и тангенциального коэффициентов поверхностного трения.

Модель жидкости Бингама — Папанастасиу представляет интерес, поскольку характер течения жидкости, описываемого этой моделью, зависит от двух основных параметров. В случае если число Бингама $\mathrm{Bn} = 0$ или параметр продолжения $M = 0$, жидкость становится вязкой. При $M \to \infty$ данная модель переходит в модель пластической среды Бингама. В настоящей работе исследуются эти особенности модели Бингама — Папанастасиу.

Значения радиального и тангенциального коэффициентов поверхностного трения при $\mathrm{Re} = 10$ и различных значениях Bn, M

Bn	M	$\mathrm{Re}^{-1/2}\, C_f$	$\mathrm{Re}^{-1/2}\, C_g$
10		1,3630	1,5773
20		1,8846	2,2816
30	1	2,2416	2,8502
40		2,4903	3,3722
50		2,6637	3,8825
	10	1,6466	3,4672
	20	1,4979	4,1659
10	30	1,4010	4,3415
	40	1,2438	4,4204
	50	1,1529	4,4624

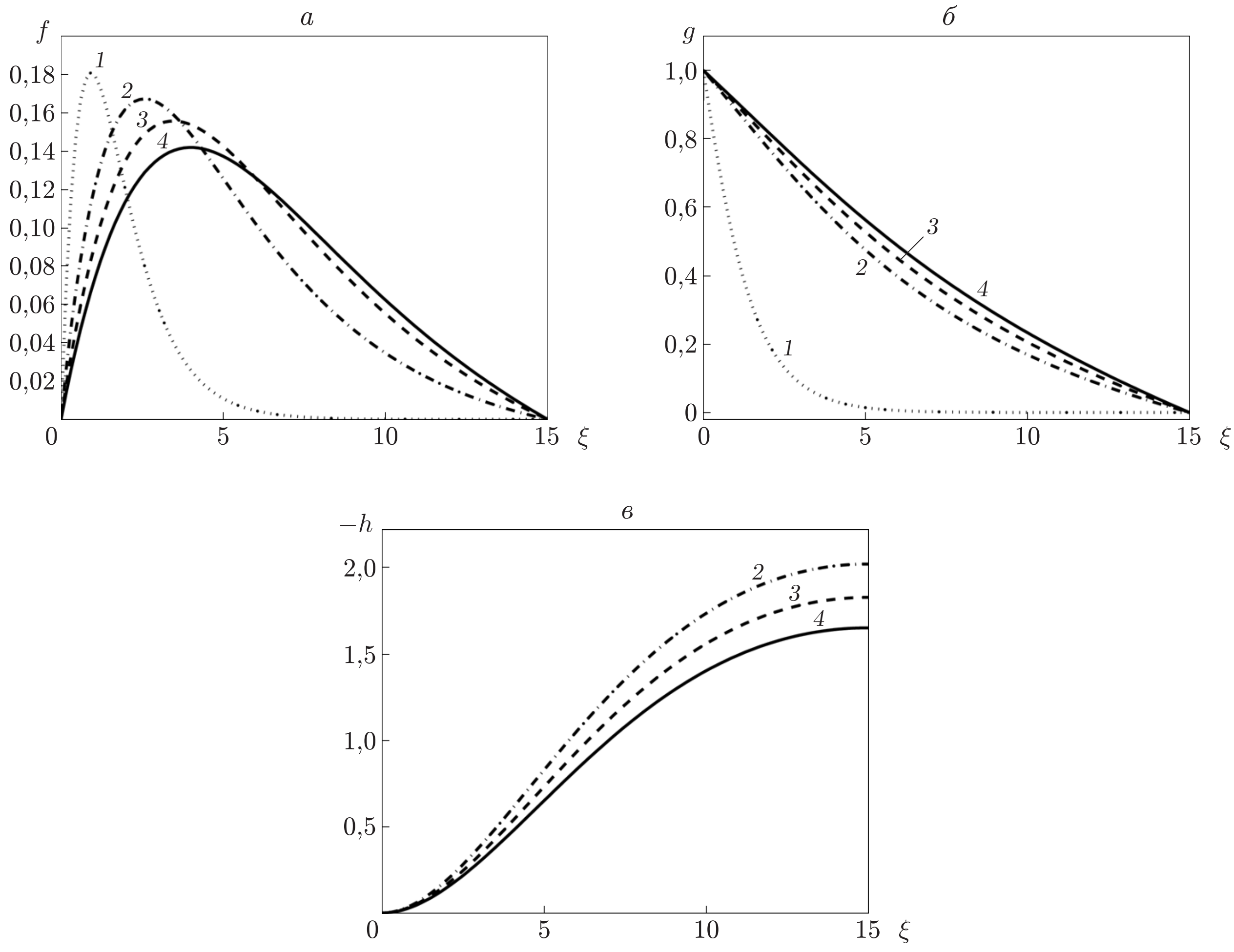

Рис. 2. Зависимости радиальной (a), тангенциальной ($б$) и осевой ($в$) составляющих вектора скорости от координаты ξ при различных значениях числа Бингама:
1 — $\mathrm{Bn} = 0$, *2* — $\mathrm{Bn} = 10$, *3* — $\mathrm{Bn} = 20$, *4* — $\mathrm{Bn} = 30$

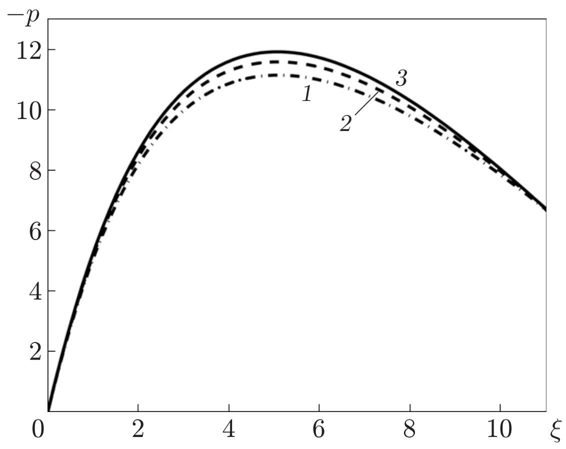

Рис. 3. Зависимость давления от координаты ξ при различных значениях числа Бингама:
1 — Bn = 10, *2* — Bn = 20, *3* — Bn = 30

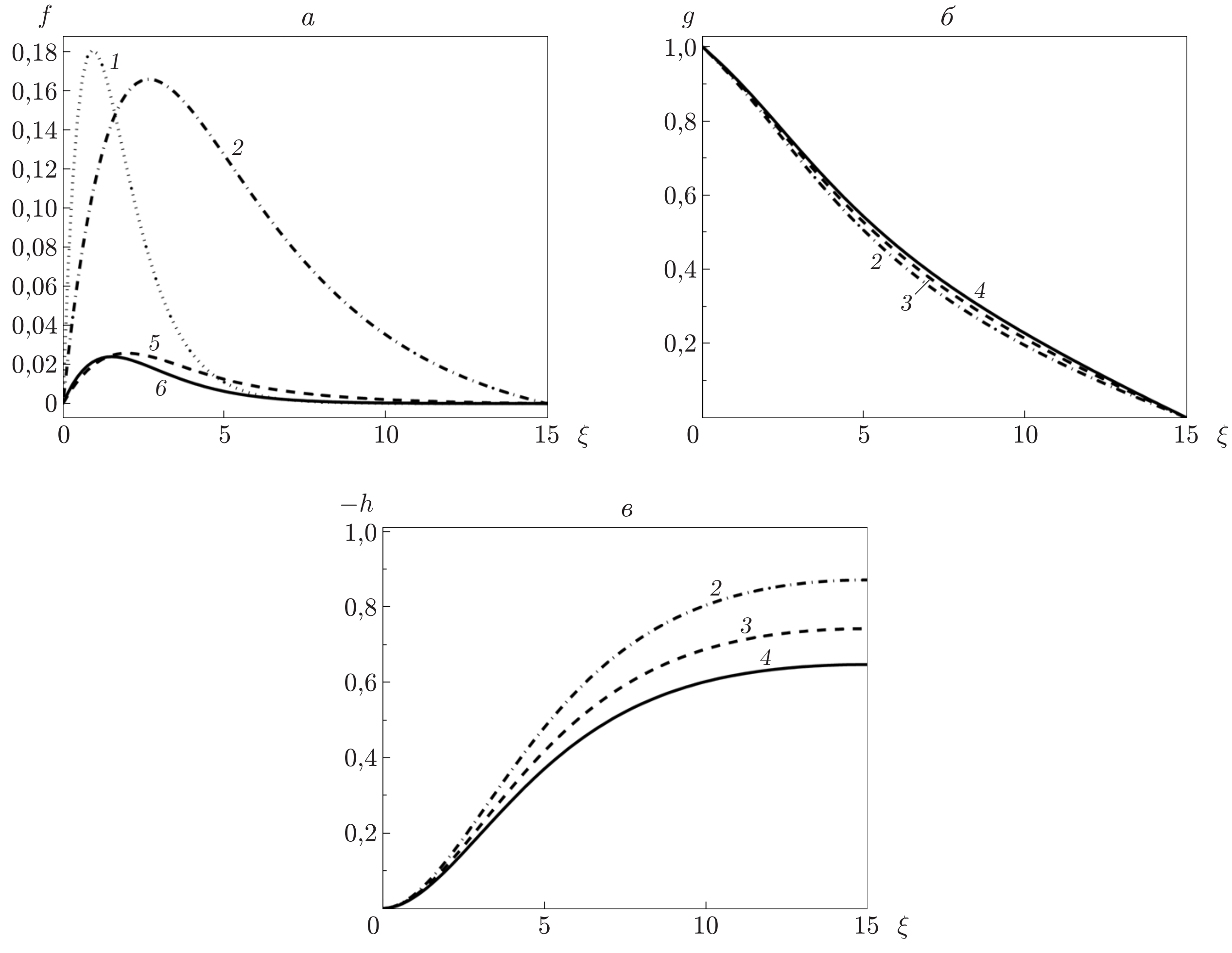

Рис. 4. Зависимости радиальной (*а*), тангенциальной (*б*) и осевой (*в*) составляющих вектора скорости от координаты ξ при различных значениях параметра продолжения M:
1 — $M = 0$, *2* — $M = 1$, *3* — $M = 2$, *4* — $M = 3$, *5* — $M = 30$, *6* — $M = 900$

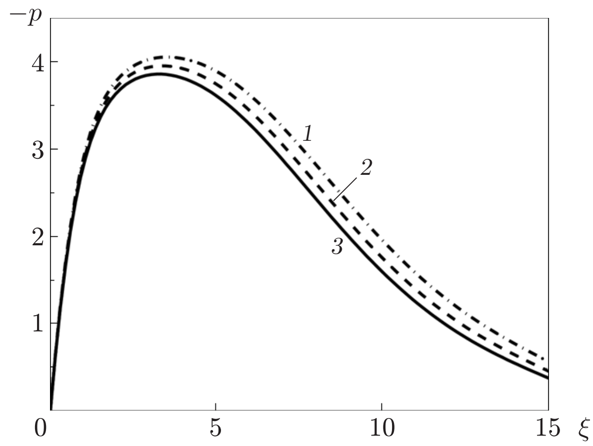

Рис. 5. Зависимость давления от координаты ξ при различных значениях параметра продолжения M:
1 — $M = 1$, *2* — $M = 2$, *3* — $M = 3$

На рис. 2 приведены зависимости радиальной, тангенциальной, осевой компонент вектора скорости от координаты ξ при различных значениях числа Бингама. Видно, что с увеличением числа Бингама радиальная и осевая компоненты уменьшаются, тангенциальная составляющая вектора скорости увеличивается. На рис. 3 аналогичная зависимость приведена для давления. На рис. 2,*а,б* зависимости при $\mathrm{Bn} = 0$ соответствуют вязкой жидкости.

На рис. 4, 5 приведены зависимости радиальной, тангенциальной, осевой компонент вектора скорости и давления от координаты ξ при различных значениях параметра M. Радиальная и осевая составляющие вектора скорости, а также давление увеличиваются при увеличении параметра M, тангенциальная составляющая вектора скорости уменьшается. На рис. 4,*а* приведена зависимость для случая вязкой жидкости ($M = 0$) и для случая пластической среды Бингама ($M \to \infty$). В последнем случае в численных расчетах полагалось, что $M = 900$.

Данные, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что радиальный и тангенциальный коэффициенты поверхностного трения увеличиваются с увеличением числа Бингама. С увеличением параметра M радиальный коэффициент поверхностного трения уменьшается, тангенциальный — увеличивается.

Заключение. В работе исследовано течение жидкости Бингама — Папанастасиу над вращающимся диском. С использованием автомодельного решения Кармана система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых получено численным методом. Показано, что число Бингама и параметр продолжения оказывают существенное влияние на радиальную, тангенциальную, осевую компоненты вектора скорости и давление.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Papanastasiou T. C.** Flows of materials with yield // J. Rheology. 1987. V. 31, N 5. P. 385–404.
2. **Abdali S., Mitsoulis E., Markatos N.** Entry and exit flows of Bingham fluids // J. Rheology. 1992. V. 36, N 2. P. 389–407.
3. **Mitsoulis E., Marangoudakis S., Spyratos M., et al.** Pressure-driven flows of Bingham plastics over a square cavity // J. Fluids Engng. 2006. V. 128, N 5. P. 993–1003.

4. **Mitsoulis E.** Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2010. V. 165, N 1/2. P. 45–55.
5. **Karman T. von.** Über laminare und turbulente Reibung // Z. angew. Math. Mech. 1921. Bd 1, N 4. S. 233–252.
6. **Khan N. A., Aziz S., Khan N. A.** Numerical simulation for the unsteady MHD flow and heat transfer of couple stress fluid over a rotating disk // PLoS One. 2014. V. 9, N 5. e95423.
7. **Hayat T., Nawaz M., Awais M., Obaidat S.** Axisymmetric magnetohydrodynamic flow of Jeffrey fluid over a rotating disk // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2012. V. 70, N 6. P. 764–774.
8. **Rashaida A. A.** Flow of a non-Newtonian Bingham plastic fluid over a rotating disk. Saskatoon: Univ. of Saskatchewan, 2005.
9. **Ahmadpour A., Sadeghy K.** Swirling flow of Bingham fluids above a rotating disk: An exact solution // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2013. V. 197. P. 41–47.
10. **Ahmadpour A., Ghasemi M., Jamali J., Sadeghy K.** On the validity of boundary layer theory for simulating von Karman flows of Bingham fluids // J. Soc. Rheology Japan. 2014. V. 42, N 3. P. 161–167.
11. **Khan N. A., Sohail A., Sultan F.** Effect of anisotropic slip and magnetic field on the flow and heat transfer of Eyring — Powell fluid over an infinite rotating disk // Intern. J. Fluid Mech. Res. 2017. V. 44, N 3. P. 1–17.
12. **Khan N. A., Naz F., Sultan F.** Entropy generation analysis and effects of slip conditions on micropolar fluid flow due to a rotating disk // Open Engng. 2017. V. 7, N 1. P. 185–198.

Поступила в редакцию 4/X 2017 г.