

вает поведения оптических свойств, показанных на фиг. 5. По этой причине нельзя обойтись без привлечения представлений о пределе упругости смолы при давлениях в импульсе ~ 1 ГПа.

Другим интересным фактом оказалось увеличение при высокоскоростной деформации (10^6 — 10^7 с $^{-1}$) предельной прочности на сжатие примерно на порядок. Общеизвестно мнение, что для стеклообразных полимеров (например, ПММА, полистирол) увеличение скорости нагружения приводит к тому, что практически сразу после превышения предела упругости (~ 100 МПа) вместе с началом пластических деформаций развивается система трещин, т. е. наблюдается хрупкое разрушение [1, 7, 8]. В нашем случае это не происходило. Следует отметить, что контрольные эксперименты проводились также с полиметилметакрилатом.

Таким образом, экспериментально показано, что результаты определения фотоупругих свойств стеклообразных полимеров при упругоупругом деформировании могут быть использованы для изучения физики высокоскоростного деформирования материалов, а также для применения эпоксидных смол в качестве датчиков давления.

Метод фотоупругости является, по-видимому, единственным, обладающим хорошей чувствительностью и позволяющим непосредственно получать информацию о разности главных напряжений при ударном сжатии. Более грубые методы [9] отмеченного выше перегиба в зависимости не обнаружили.

Авторы хорошо понимают, что выполненная работа в большей мере ставит вопросы, чем дает ответы. Поэтому они будут заранее благодарны за любые обсуждения изложенных результатов с заинтересованными исследователями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973.
2. Метод фотоупругости. Т. 1, 2/Под ред. Н. А. Стрельчука, Г. Л. Хесина. М.: Стройиздат, 1975.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
4. Мак-Куин Р., Марш С. и др. Уравнение состояния твердых тел по результатам исследования ударных волн.— В кн.: Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973.
5. Silano A. A., Pae K. D., Sauer J. A. Effects of hydrostatic pressure on shear deformation of polymers.— J. Appl. Phys., 1977, vol. 48, N10.
6. Аскадский А. А. Деформация полимеров. М.: Химия, 1973.
7. Ramsteiner F. Einfluß von Verarbeitungs- und Produktparametern auf die Schlagzähigkeit von Styrol-Polymerisaten.— Kunststoffe, 1977, Bd 67, N 9.
8. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: ИЛ, 1955.
9. Chartagnac P. F. Determination of mean and deviatoric stress in shock loaded solids.— J. Appl. Phys., 1982, vol. 53, N 2.

Поступила 22/IX 1983 г.

УДК 539.3

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРЕСКА

Г. И. БЫКОВЦЕВ, А. В. КОЛОКОЛЬЧИКОВ, П. Н. СЫГУРОВ

(Куйбышев)

Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругоупругого тела при условии пластичности Мизеса рассматривались в [1—4], где решения краевых задач сводятся к решению двухточечных задач нелинейных дифференциальных уравнений с особыми точками. Ниже показывается, что при условии пластичности Треска эти уравнения интегрируются в квадратурах, что позволяет достигнуть значительных упрощений.

1. Уравнения, описывающие поведения тела Прандтля — Рейсса, имеют вид

$$(1.1) \quad e_{ij} = e_{ij}^p + e_{ij}^e, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e$$

$$(1.2) \quad \sigma_{i,j,j} - \rho \dot{v}_i = 0, \quad v_i = \dot{u}_i,$$

где u_i — перемещение; точка обозначает дифференцирование по времени.

Рассмотрим плоскую деформацию среды при условии пластичности Треска

$$(1.3) \quad |\tau_{\max}| = k.$$

Пусть σ_{33} — третье главное напряжение σ_3 . Два других переименуем так, что $\sigma_1 > \sigma_2$. Рассмотрим возможные варианты.

А. Пусть $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$. Тогда условие (1.3) принимает вид

$$(1.4) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k.$$

Из ассоциированного закона течения следует

$$\dot{e}_1^p + \dot{e}_2^p = 0, \quad \dot{e}_3^p = \dot{\sigma}, \quad \dot{e}_1^p > 0.$$

Так как $e_{33} = 0$, $e_{33}^e = 0$, из (1.1) имеем

$$\sigma_3 = \sigma_{33} = (1/2)(\sigma_{11} + \sigma_{22})\lambda(\lambda + \mu)^{-1}.$$

Для главных напряжений, лежащих в плоскости Ox_1x_2 , имеем

$$(1.5) \quad \sigma_1, \sigma_2 = \sigma \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.$$

Из соотношений (1.4) и (1.5) следует

$$(1.6) \quad (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2.$$

Ассоциированный закон течения имеет вид

$$(1.7) \quad \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}} = \frac{\dot{e}_{11}^p - \dot{e}_{22}^p}{2\dot{e}_{12}^p}, \quad \dot{e}_{11}^p + \dot{e}_{22}^p = 0.$$

Условие (1.6) удовлетворим, положив

$$(1.8) \quad \sigma_{11} = \sigma + k \cos 2\theta, \quad \sigma_{22} = \sigma - k \cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = k \sin 2\theta,$$

где θ — угол между первым главным направлением и осью Ox_1 . Подставляя (1.8) в соотношения (1.1), (1.2) и (1.7) для определения σ , θ , v_1 , v_2 , получаем систему уравнений:

$$(1.9) \quad \sigma_{,1} - 2k(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) - \rho \dot{v}_1 = 0;$$

$$(1.10) \quad \sigma_{,2} - 2k(\theta_{,2} \sin 2\theta + \theta_{,1} \cos 2\theta) - \rho \dot{v}_2 = 0;$$

$$(1.11) \quad 2k\dot{\theta} = \mu(v_{2,2} - v_{1,1}) \sin 2\theta + \mu(v_{1,2} + v_{2,1}) \cos 2\theta;$$

$$(1.12) \quad \dot{\sigma} = (\lambda + \mu)(v_{1,1} + v_{2,2}).$$

Главные значения скоростей деформаций определяются по формулам

$$\dot{e}_1^p = \dot{e}_{11}^p \cos^2 \theta + \dot{e}_{22}^p \sin^2 \theta + 2\dot{e}_{12}^p \sin \theta \cos \theta,$$

$$\dot{e}_2^p = \dot{e}_{11}^p \sin^2 \theta + \dot{e}_{22}^p \cos^2 \theta - 2\dot{e}_{12}^p \sin \theta \cos \theta.$$

Соотношения (1.9)–(1.12) имеют место при условии $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ и $\dot{e}_1^p > 0$.

Эти условия имеют вид

$$(1.13) \quad (\lambda + \mu)k > \mu\sigma > -(\lambda + \mu)k;$$

$$(1.14) \quad (v_{2,2} - v_{1,1}) \cos 2\theta - (v_{1,2} + v_{2,1}) \sin 2\theta < 0.$$

Б. Пусть $\sigma_3 = \sigma_2$. Тогда напряженное состояние соответствует пересечению двух граней условия пластичности

$$(1.15) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2k.$$

Из обобщенного ассоциированного закона течения следует

$$\dot{e}_1^p + \dot{e}_2^p + \dot{e}_3^p = 0, \quad \dot{e}_1^p > 0, \quad \dot{e}_2^p < 0, \quad \dot{e}_3^p < 0.$$

Из (1.1) и (1.15) получаем

$$(1.16) \quad \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_3 = (3\lambda + 2\mu)(v_{1,1} + v_{2,2}).$$

Из (1.15) имеем $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}$, и (1.16) принимает вид

$$(1.17) \quad \dot{\sigma} = (\lambda + (2/3)\mu)(v_{1,1} + v_{2,2}).$$

Отметим, что первое условие (1.15) и условие (1.4) совпадают, и, проводя рассуждения и вычисления, как и в случае А, приходим к выводу, что на ребре условия пластичности Треска σ , θ , v_1 , v_2 удовлетворяют уравнениям (1.9)–(1.11), а уравнение (1.12) заменяется на (1.17).

На рассматриваемом ребре должны иметь место неравенства $\dot{\epsilon}_2^p < 0$, $\dot{\epsilon}_3^p < 0$, т. е.

$$(v_{1,1} - v_{2,2}) \cos 2\theta + (v_{1,2} + v_{2,1}) \sin 2\theta \geq (1/3)(v_{1,1} + v_{2,2}) \geq 0.$$

В. Пусть $\sigma_1 = \sigma_3$. Тогда напряженное состояние соответствует ребру условия Треска, которое является пересечением граней

$$(1.18) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad \sigma_3 - \sigma_2 = 2k.$$

Из обобщенного ассоциированного закона течения следует

$$\dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_1^p > 0, \quad \dot{\epsilon}_2^p < 0, \quad \dot{\epsilon}_3^p > 0.$$

Проводя рассуждения, как и в случае Б, получаем, что на рассматриваемом ребре σ , θ , v_1 , v_2 удовлетворяют уравнениям (1.9)–(1.11), (1.17), а неравенства $\dot{\epsilon}_1^p > 0$, $\dot{\epsilon}_3^p > 0$ принимают вид

$$(1.19) \quad (v_{1,1} - v_{2,2}) \cos 2\theta + (v_{1,2} + v_{2,1}) \sin 2\theta \geq -(1/3)(v_{1,1} + v_{2,2}) \geq 0.$$

Г. Пусть $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, тогда условие пластичности имеет вид

$$(1.20) \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2k.$$

Из ассоциированного закона течения получаем

$$(1.21) \quad \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_2^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_1^p > 0, \quad \dot{\epsilon}_3^p < 0.$$

Напряжения и скорости пластических деформаций выражаются через главные значения по формулам

$$(1.22) \quad \sigma_{11} = \sigma + \gamma \sin^2 \theta, \quad \sigma_{22} = \sigma + \gamma \cos^2 \theta, \quad \sigma_{12} = -\gamma \cos \theta \sin \theta,$$

$$\gamma = \sigma_2 - \sigma_1, \quad \dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_1^p \cos^2 \theta, \quad \dot{\epsilon}_{22}^p = \dot{\epsilon}_1^p \sin^2 \theta, \quad \dot{\epsilon}_{12}^p = \dot{\epsilon}_1^p \sin \theta \cos \theta.$$

Из уравнений движения получаем

$$(1.23) \quad \sigma_{1,1} + \gamma_{,1} \sin^2 \theta - \gamma_{,2} \sin \theta \cos \theta + \gamma(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) = \rho \dot{v}_1,$$

$$\sigma_{1,2} + \gamma_{,2} \cos^2 \theta - \gamma_{,1} \sin \theta \cos \theta - \gamma(\theta_{,2} \sin 2\theta + \theta_{,1} \cos 2\theta) = \rho \dot{v}_2.$$

Дифференцируя (1.1) по времени и подставляя выражения (1.22), после исключения $\dot{\epsilon}_1^p$, $\dot{\epsilon}_3^p$ получим

$$(1.24) \quad 3\dot{\sigma}_1 + \dot{\gamma} = (3\lambda + 2\mu)(v_{1,1} + v_{2,2}),$$

$$(\dot{\sigma}_1 - \dot{\gamma}) \sin 2\theta - 2\dot{\gamma} \cos 2\theta = \lambda(v_{1,1} + v_{2,2}) \sin 2\theta + 2\mu(v_{1,2} + v_{2,1}),$$

$$\dot{\gamma} \theta + \mu(v_{2,2} - v_{1,1}) \sin 2\theta + \mu(v_{1,2} + v_{2,1}) \cos 2\theta = 0.$$

Таким образом, для определения пяти неизвестных функций σ_1 , γ , θ , v_1 , v_2 на грани (1.20) имеем систему пяти уравнений (1.23), (1.24). Используя (1.1), из условий (1.24) получаем, что уравнения (1.23), (1.24) имеют место при условиях

$$(v_{2,2} - v_{1,1}) \cos 2\theta - (v_{1,2} + v_{2,1}) \sin 2\theta \leq v_{1,1} + v_{2,2}, \quad -2k < \gamma < 0.$$

Д. Пусть $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$, тогда условие пластичности имеет вид

$$\sigma_3 - \sigma_2 = 2k.$$

Из ассоциированного закона течения получаем

$$\dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_1^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_2^p < 0, \quad \dot{\epsilon}_3^p > 0.$$

Для компонент напряжений и скоростей пластической деформации имеем

$$\sigma_{11} = \sigma_2 - \gamma \cos^2 \theta, \quad \sigma_{22} = \sigma_2 - \gamma \sin^2 \theta, \quad \sigma_{12} = -\gamma \cos \theta \sin \theta,$$

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_2^p \sin^2 \theta, \quad \dot{\epsilon}_{22}^p = \dot{\epsilon}_2^p \cos^2 \theta, \quad \dot{\epsilon}_{12}^p = -\dot{\epsilon}_2^p \sin \theta \cos \theta.$$

Далее, проводя рассуждения, как и в случае Г, получаем систему уравнений для определения σ_2 , θ , γ , v_1 , v_2 в виде

$$(1.25) \quad \sigma_{2,1} - \gamma_{,1} \cos^2 \theta - \gamma_{,2} \sin \theta \cos \theta + \gamma(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) = \rho \dot{v}_1,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2} - \gamma_{,2} \sin^2 \theta - \gamma_{,1} \sin \theta \cos \theta - \gamma(\theta_{,2} \sin 2\theta + \theta_{,1} \cos 2\theta) &= \rho v_2, \\ (\dot{\sigma}_2 + \dot{\gamma}) \sin 2\theta + 2\gamma\dot{\theta} \cos 2\theta + 2\mu(v_{2,1} + v_{1,2}) &= \lambda(v_{1,1} + v_{2,2}) \sin 2\theta, \\ \dot{\gamma}\theta + \mu(v_{2,2} - v_{1,1}) \sin 2\theta + \mu(v_{1,2} + v_{2,1}) \cos 2\theta &= 0, \\ 3\dot{\sigma}_2 - \dot{\gamma} &= (3\lambda + 2\mu)(v_{1,1} + v_{2,2}). \end{aligned}$$

Уравнения (1.25) будут иметь место при условии

$$(v_{2,2} - v_{1,1}) \cos 2\theta - (v_{1,2} + v_{2,1}) \sin 2\theta \geq -(v_{1,1} + v_{2,2}), \quad -2k < \gamma < 0.$$

Е. Пусть $\sigma_1 = \sigma_2$. Тогда $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$, $\sigma_{12} = 0$ и из уравнений движения следует

$$(1.26) \quad \sigma_{,1} - \rho\dot{v}_1 = 0, \quad \sigma_{,2} - \rho\dot{v}_2 = 0.$$

Условие пластичности будет выполнено, если

$$(1.27) \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2k, \quad \sigma_3 - \sigma_2 = 2k.$$

Из ассоциированного закона течения следует

$$(1.28) \quad \dot{e}_1^p + \dot{e}_2^p + \dot{e}_3^p = 0, \quad \dot{e}_1^p < 0, \quad \dot{e}_2^p < 0, \quad \dot{e}_3^p > 0.$$

Из (1.27) следует $\dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}_{,3} = \dot{\sigma}$, а из (1.1) получаем

$$(1.29) \quad \sigma = (\lambda + (2/3)\mu)(v_{1,1} + v_{2,2}).$$

Соотношения (1.26) и (1.29) представляют собой замкнутую линейную систему уравнений для определения σ , v_1 , v_2 . Неравенства (1.28) будут выполнены при

$$(1/3)(v_{1,1} + v_{2,2}) + \sqrt{(v_{1,1} - v_{2,2})^2 + (v_{1,2} + v_{2,1})^2} < 0.$$

Если условие пластичности имеет вид $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$, $\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$, то имеет место (1.29), а ассоциированный закон течения

$$\dot{e}_1^p + \dot{e}_2^p + \dot{e}_3^p = 0, \quad \dot{e}_1^p > 0, \quad \dot{e}_2^p > 0, \quad \dot{e}_3^p < 0$$

будет выполняться, если

$$(1/3)(v_{1,1} + v_{2,2}) - \sqrt{(v_{1,1} - v_{2,2})^2 + (v_{1,2} + v_{2,1})^2} > 0.$$

Таким образом, в плоской упругопластической задаче в отличие от жесткопластической ребра условия пластичности Треска играют такую же роль, что и грани, т. е. приводят к замкнутой системе уравнений при наличии ограничений, где данная система имеет место. Идея использования ребра условия пластичности Треска для решения осесимметричных краевых задач впервые использовалась в [5], в дальнейшем эта идея в [6] широко использовалась для решения пространственных задач. Определенные упрощения можно достигнуть и при решении плоских упругопластических задач.

2. Рассмотрим автомодельные решения уравнений плоской задачи динамики упругопластического тела при условии пластичности Треска.

В качестве автомодельной переменной выберем угол

$$\varphi = \arctg [x_2(x_1 - ct)^{-1}],$$

где $c = \text{const}$, $c > c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)\rho^{-1}}$.

Переходя в (1.9)–(1.12) к автомодельным переменным, получим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} -\sigma' \sin \varphi + 2k\theta' \cos(\varphi - 2\theta) - \rho c v_1' \sin \varphi &= 0, \\ \sigma' \cos \varphi - 2k\theta' \sin(\varphi - 2\theta) - \rho c v_2' \sin \varphi &= 0, \\ c\sigma' \sin \varphi + (\lambda + \mu)(v_1' \sin \varphi - v_2' \cos \varphi) &= 0, \\ 2k\theta' c \sin \varphi + \mu v_1' \cos(\varphi - 2\theta) - \mu v_2' \sin(\varphi - 2\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Система уравнений (2.1) имеет тривиальные решения, т. е. σ , θ , v_1 , v_2 — постоянные величины, не зависящие от φ .

Другие решения этой системы возможны только при условии обращения в нуль ее определителя:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p^2(1 - p^2) \cos^2 2(\varphi - \theta) &= M^2 \sin^2 \varphi (1 - M^2 \sin^2 \varphi), \\ M &= c c_1^{-1}, \quad p = c_2 c_1^{-1}, \quad c_2^2 = \mu \rho^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $0 < p^2 < 1/2$, то из (2.2) действительные значения θ можно получить только при φ , удовлетворяющих неравенствам

$$(2.3) \quad 0 \leq M^2 \sin^2 \varphi \leq p^2, \quad 1 - p^2 \leq M^2 \sin^2 \varphi \leq 1.$$

Дифференцируя (2.2) по φ и исключая θ' из уравнений (2.1), после интегрирования решения можно представить в виде

$$(2.4) \quad \frac{p}{2k} \sigma = \text{sign}(\cos 2(\varphi - \theta)) \left[\frac{1 - 2p^2}{4p} \times \right. \\ \left. \times \ln \left| \frac{pM \sin \varphi - \sqrt{(1-p^2)(1-M^2 \sin^2 \varphi)}}{pM \sin \varphi + \sqrt{(1-p^2)(1-M^2 \sin^2 \varphi)}} \right| + \sqrt{1-p^2} \arcsin(M \sin \varphi) \right] - \\ - \text{sign}(\sin 2(\varphi - \theta)) \sqrt{1-p^2} \int \frac{\sqrt{1-M^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1-p^2-M^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + C_1;$$

$$(2.5) \quad \frac{v_2 \rho c p \sqrt{1-p^2}}{k} = - \text{sign}(\sin 2(\varphi - \theta)) \left[2 \sqrt{(p^2 - M^2 \sin^2 \varphi)(1-p^2 - M^2 \sin^2 \varphi)} - \right. \\ \left. - (1-2p^2) \ln \left| \sqrt{p^2 - M^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{1-p^2 - M^2 \sin^2 \varphi} \right| \right] - \\ - \text{sign}(\cos 2(\varphi - \theta)) \left[(2p^2 - M^2) \ln \left| M \cos \varphi + \sqrt{1-M^2 \sin^2 \varphi} \right| + \right. \\ \left. + 2p \sqrt{M^2 + p^2 - 1} \ln \left| \frac{M \cos \varphi - \sqrt{(M^2 + p^2 - 1)(1-M^2 \sin^2 \varphi)}}{M \cos \varphi + \sqrt{(M^2 + p^2 - 1)(1-M^2 \sin^2 \varphi)}} \right| \right] + \\ + 2M \cos \varphi \sqrt{1-M^2 \sin^2 \varphi} + C_2.$$

Из (2.2) следует, что неравенство (1.14) всегда выполняется для значений M и φ , принадлежащих интервалу (2.3).

Анализ автомодельных решений для ребра (1.15) проводится аналогично. Условие обращения в нуль определителя имеет вид

$$(2.6) \quad p^2(1 - (4/3)p^2) \cos^2 2(\varphi - \theta) = (1 - (1/3)p^2 - M^2 \sin^2 \varphi)M^2 \sin^2 \varphi.$$

Действительные значения θ могут быть определены для значений φ , удовлетворяющих неравенствам

$$(2.7) \quad p^2 \geq \frac{3}{7}, \quad 0 \leq M^2 \sin^2 \varphi \leq 1 - \frac{4}{3} p^2, \quad p^2 \leq M^2 \sin^2 \varphi \leq 1 - \frac{1}{3} p^2, \\ p^2 < \frac{3}{7}, \quad 0 \leq M^2 \sin^2 \varphi \leq p^2, \quad 1 - \frac{4}{3} p^2 \leq M^2 \sin^2 \varphi \leq 1 - \frac{1}{3} p^2.$$

Выражения для σ , v_2 получаем в виде

$$(2.8) \quad \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}}{2kp} \sigma = \text{sign}(\cos 2(\varphi - \theta)) \left[\frac{1 - \frac{7}{3} p^2}{4p \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}} \times \right. \\ \left. \times \ln \left| \frac{pM \sin \varphi - \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3} p^2\right) \left(1 - \frac{p^2}{3} - M^2 \sin^2 \varphi\right)}}{pM \sin \varphi + \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3} p^2\right) \left(1 - \frac{p^2}{3} - M^2 \sin^2 \varphi\right)}} \right| + \arcsin \left(\frac{M \sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{3}}} \right) \right] + \\ + \text{sign}(\sin 2(\varphi - \theta)) \int \frac{p^2 - M^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2 - M^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + C_3;$$

$$(2.9) \quad \frac{\rho c}{2k} v_2 = - \frac{\text{sign}(\sin 2(\varphi - \theta))}{2p \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}} \left[\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + p^2 \ln \left| \frac{p^2 t^2 - 1 + \frac{4}{3} p^2}{p^2 t^2 - 1} \right| \right] + \\ + \frac{1 - \frac{7}{3} p^2}{2(t^2 - 1)} - \frac{p}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}} \ln \left| \frac{pt + \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}}{pt - \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}} \right| - \frac{\text{sign}(\cos 2(\varphi - \theta))}{p \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \ln \left| M \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{1}{3} p^2 - M^2 \sin^2 \varphi} \right| + \operatorname{sign}(\cos 2(\varphi - \theta)) \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}}{2p} \times \\ & \times \left(1 - \frac{1}{3} p^2 - 2M^2 \right) \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} p^2 - 2M^2 \right)^{-1} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \right. \\ & + \frac{1 + M^2 \left(\frac{7}{3} p^2 - 1 \right) - \frac{13}{3} p^2 + \frac{28}{9} p^4}{2p \left(1 - \frac{4}{3} p^2 \right) \left(1 - \frac{1}{3} p^2 - M^2 \right) \sqrt{M^2 + \frac{4}{3} p^2 - 1}} \ln \left| \frac{p+t \sqrt{M^2 + \frac{4}{3} p^2 - 1}}{p-t \sqrt{M^2 + \frac{4}{3} p^2 - 1}} \right| + \\ & \left. + \frac{M \left(1 - \frac{1}{3} p^2 \right)}{2 \left(1 - \frac{4}{3} p^2 \right) \left(M^2 + \frac{p^2}{3} - 1 \right)} \ln \left| \frac{Mt + \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}}{Mt - \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}} \right| \right\} + C_4, \end{aligned}$$

где
$$t^2 = \left(1 - \frac{4}{3} p^2 - M^2 \sin^2 \varphi \right) (p^2 - M^2 \sin^2 \varphi)^{-1}.$$

3. Пусть острый клин с углом раствора 2α движется со сверхзвуковой постоянной скоростью c в упругопластической среде. Предполагая, что контактное трение отсутствует, краевые условия запишем в виде

$$(3.1) \quad \sigma_{12}(x_1, 0) = 0, \quad v_2(x_1, 0) = -c \operatorname{tg} \alpha, \quad x_1 < 0.$$

Перед клином в области $a'Oa$ (фиг. 1) среда не возмущена, т. е. $\sigma_{ij} = 0, v_i = 0$. Линии Oa и Oa' движутся в направлении нормали со скоростью безвихревых волн $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, являющейся максимально возможной скоростью распространения возмущений в упругопластической среде [7].

В [7] показано, что в упругопластических средах существуют нейтральные волны сильного разрыва, на которых выполняются следующие соотношения:

$$(3.2) \quad \rho c_1^2 = \lambda + 2\mu, \quad [v_i] = \omega v_i^1, \quad [e_{ij}^p] = 0, \quad -c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu v_i^1 v_j^1) \omega;$$

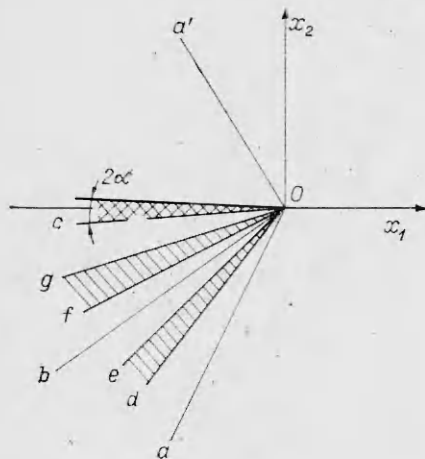
$$(3.3) \quad \rho c_2^2 = \mu, \quad [v_k] v_k^2 = 0, \quad [e_{ij}^p] = 0, \quad -c_2 [\sigma_{ij}] = \mu ([v_i] v_j^2 + [v_j] v_i^2),$$

где c_1, c_2 — скорости упругих волн; v_i^1, v_i^2 — нормали к волновым поверхностям:

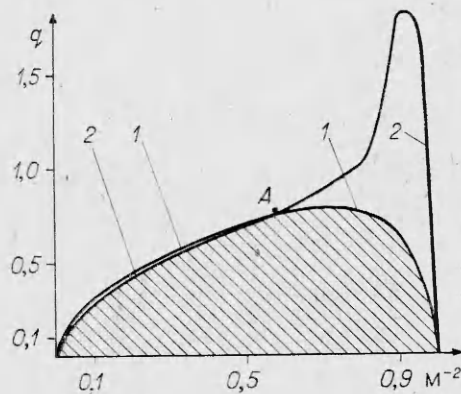
$$v_1^1 = M^{-1}, \quad v_2^1 = -M^{-1} \sqrt{M^2 - 1}, \quad v_3^1 = v_3^2 = 0, \quad v_1^2 = pM^{-1}, \quad v_2^2 = -M^{-1} \sqrt{M^2 - p^2}.$$

При внедрении клин возбуждает две нейтральные волны сильного разрыва Oa и Ob , движущиеся со скоростями c_1 и c_2 соответственно. Напряженное состояние в aOb из (3.2) получаем в виде

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\rho c_1 (1 - 2p^2 + 2p^2 M^{-2}) \omega, & \sigma_{22} &= -\rho c_1 (1 - 2p^2 M^{-2}) \omega, \\ \sigma_{12} &= 2\rho c_1 p^2 \sqrt{M^2 - 1} M^{-2} \omega, & \sigma_{33} &= -\rho c_1 (1 - 2p^2) \omega. \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В ωOc из (3.3) и (3.4) получаем

$$(3.5) \quad \begin{aligned} v_1 &= \omega M^{-1} - p^{-1}[v_2] \sqrt{M^2 - p^2}, \quad v_2 = -\omega M^{-1} \sqrt{M^2 - 1} - [v_2], \\ \sigma_{11} &= -\rho c_1(1 - 2p^2 + 2p^2 M^{-2})\omega + 2\rho c_2 M^{-1} \sqrt{M^2 - p^2} [v_2], \\ \sigma_{22} &= -\rho c_1(1 - 2p^2 M^{-2})\omega - 2\rho c_2 M^{-1} \sqrt{M^2 - p^2} [v_2], \\ \sigma_{12} &= 2\rho c_1 p^2 M^{-2} \sqrt{M^2 - 1} \omega - \rho c_2 p^{-1} M^{-1} [v_2] (M^2 - 2p^2), \\ \sigma_{33} &= -\rho c_2(1 - 2p^2)\omega. \end{aligned}$$

Из краевых условий (3.1) и соотношений (3.5) следует

$$(3.6) \quad \omega = c_1 \operatorname{tg} \alpha (M^2 - 2p^2)(M^2 - 1)^{-1/2}, \quad [v_2] = 2c_1 p^2 M^{-1} \operatorname{tg} \alpha.$$

Из (3.4) и (3.6) получаем, что в области aOb среда будет в упругом состоянии, если

$$(3.7) \quad q = p^2 \rho c_1^2 k^{-1} \operatorname{tg} \alpha < \sqrt{M^2 - 1} (M^2 - 2p^2)^{-1} = r.$$

При $q = r$ в области aOb будет пластическое состояние, соответствующее ребру $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k$. Если выполнено неравенство (3.7), то среда в области bOc будет находиться в упругом состоянии при

$$(3.8) \quad \begin{aligned} 1 < M^2 < 2p^2 + 2(1 - \sqrt{2p}), \\ q < \sqrt{M^2 - 1} (M^2 - 2p^2)^{-1} (-1 + 2M^{-2} - 2T)^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$(3.9) \quad T = 2pM^{-2}(M^2 - 2p^2)^{-1} \sqrt{(M^2 - 1)(M^2 - p^2)}.$$

На фиг. 2 при $p^2 = 0,3$ в плоскости (M^{-2}, q) , где $q = p^2 \rho c_1^2 k^{-1} \operatorname{tg} \alpha$, построены кривая 1, ниже которой выполнено неравенство (3.7), и кривая 2, ниже которой выполнено неравенство (3.8), пересекающиеся в точке A . Из фиг. 2 следует, что как в окрестности $M = 1$, так и при достаточно больших M всегда существуют значения q , упругое решение при которых невозможно. Упругое решение возможно только в области, лежащей ниже обеих кривых (заштрихованная область на фиг. 2).

Анализ неравенств (3.7)–(3.9) показывает, что при $p^2 < 1/4$, а также при $p^2 \geq 1/4$, $4p^4(4p^2 - 1)^{-1} \geq M^2 \geq 2p^2 + 2(1 - \sqrt{2p})$ с увеличением $\operatorname{tg} \alpha$ пластичность впервые появляется в области aOb , если $q = \sqrt{M^2 - 1} (M^2 - 2p^2)^{-1}$. Максимальное касательное напряжение достигает значения k в области bOc только при $p^2 > 1/4$, $M^2 \geq 4p^4(4p^2 - 1)^{-1}$, а также при $p^2 < 1/2$ и $1 \leq M \leq 2p^2 + 2(1 - \sqrt{2p})$. При увеличении $\operatorname{tg} \alpha$ пластичность впервые появляется, если

$$q = \sqrt{M^2 - 1} (M^2 - 2p^2)^{-1} (1 - 2M^{-2} + 2T)^{-1}, \quad q = \sqrt{M^2 - 1} (M^2 - 2p^2)^{-1} (-1 + 2M^{-2} - 2T)^{-1}$$

соответственно. Из (3.5) для нормального давления на грань клина получаем

$$\sigma_{22} = -\rho c_1^2 M^{-2} [4p^3 \sqrt{M^2 - p^2} + (M^2 - 2p^2)^2 (M^2 - 1)^{-1/2}] \operatorname{tg} \alpha.$$

Пусть в области bOc среда находится в пластическом состоянии, в aOb — в упругом, тогда в aOb решение определяется по формуле (3.4), в bOf — по формулам (3.5), в fOg происходит пластическое деформирование и выполняются интегралы (2.2), (2.4), (2.5), в gOc напряжения и скорости перемещений постоянны и равны их значениям на линии Og . Из (3.1) на линии Og получаем $\theta = 0$, а для определения φ_1 (угла наклона Og к оси x_1) из (2.2) имеем уравнение

$$(3.10) \quad p^2(1 - p^2) \cos^2 2\varphi_1 = M^2 \sin^2 \varphi_1 (1 - M^2 \sin^2 \varphi_1).$$

Уравнение (3.10) в bOc , где $M^2 \sin^2 \varphi \leq p^2$, имеет решение

$$(3.11) \quad \sin^2 \varphi_1 = \frac{M^2 + 4p^2(1 - p^2) - M \sqrt{M^2(1 - 2p^2)^2 + 8p^2(1 - p^2)}}{2M^4 + 8M^2(1 - p^2)}.$$

В bOf происходит пластическое деформирование, из (1.6) и (3.5) следует

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \omega^2 p^2 + [v_2]^2 M^2 - 4p^2 M^{-3} \omega [v_2] (\sqrt{M^2 - 1} (M^2 - 2p^2) - \\ - p (M^2 - 2) \sqrt{M^2 - p^2}) = k^2 p^{-2} (\rho c_1^2)^{-1}. \end{aligned}$$

На линии Of , где $\varphi = \varphi_2$, имеет место нетривиальное решение

$$(3.13) \quad p^2(1 - p^2) \cos^2 2(\varphi_2 - \theta_2) = (1 - M^2 \sin^2 \varphi_2) M^2 \sin^2 \varphi_2.$$

Из условия непрерывности σ_{12} на линии Of получаем

$$(3.14) \quad 2\rho c_1 p^2 \sqrt{M^2 - 1} M^{-2} \omega - \rho c_1 (M^2 - 2p^2) M^{-1} [v_2] = k \sin 2\theta_2.$$

При $\varphi = \varphi_2$ из (3.6) имеем $v_2(\varphi_2) = -[v_2] - \omega M^{-1} \sqrt{M^2 - 1}$, поэтому из (2.8) и (3.4) следует соотношение

$$(3.15) \quad \text{sign}(\sin 2(\varphi - \theta)) \left[2 \sqrt{(p^2 - M^2 \sin^2 \varphi)(1 - p^2 - M^2 \sin^2 \varphi)} - \right. \\ \left. - (1 - 2p^2) \ln \left| \sqrt{p^2 - M^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - p^2 - M^2 \sin^2 \varphi} \right| \right] + \\ + (2p^2 - M^2) \ln \left| M \cos \varphi + \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \varphi} \right| + 2p \sqrt{M^2 + p^2 - 1} \times \\ \times \ln \left| \frac{M \cos \varphi - \sqrt{(M^2 + p^2 - 1)(1 - M^2 \sin^2 \varphi)}}{M \cos \varphi + \sqrt{(M^2 + p^2 - 1)(1 - M^2 \sin^2 \varphi)}} \right| + 2M \cos \varphi \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \varphi} + \\ + [v_2] + \omega \sqrt{M^2 - 1} M^{-1} = c \operatorname{tg} \alpha.$$

Из соотношений (3.12)–(3.15) по заданным значениям M , $\operatorname{tg} \alpha$ определяются значения ω , $[v_2]$, φ_2 , θ_2 . Это решение имеет место, пока $|\omega| p^2 \rho c_1 \leq k$. При $\omega = k(p^2 \rho c_1)^{-1}$ в области aOb достигается предел текучести. Подставляя в (3.12) и (3.15) полученное значение ω , получаем максимальные значения q , при которых это решение еще возможно. Ограничимся решением уравнений (3.12)–(3.15) для больших M . При этом $\sin^2 \varphi_1 = p^2 M^{-2} - 4p^4(1 - p^2)(1 - 2p^2)^{-1} M^{-4} + o(M^{-6})$. Максимальное значение q , при котором в aOb среда находится в упругом состоянии, а в bOc в зоне fOg происходит пластическое деформирование, имеет вид

$$(3.16) \quad q \leq M^{-2} \sqrt{M^2 - 1}.$$

Полагая $\sin^2 \varphi_2 = p^2 M^{-2} - bM^{-4}$, где b — неизвестная величина, из (3.12)–(3.15) имеем

$$b = p^2(1 - p^2)(1 - 2p^2)^{-1} [2p - qM^3(M^2 - 4p^2)^{-1}]^2.$$

Нормальное давление на грань клина выражается в виде

$$\sigma_{22} = -k - (1 - p^2) \rho c_1^2 M^2 (M^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{tg} \alpha + kM^{-2} p^{-2} (a - b),$$

где

$$a = 4p^4(1 - p^2)(1 - 2p^2)^{-1}.$$

Пусть в области aOb среда находится в состоянии пластического деформирования, а в области bOc — в упругом состоянии. Тогда в зоне eOd решение определяется по формулам (2.6)–(2.9), а в bOc — по формулам (3.5), причем в bOc напряжения и скорости перемещений постоянны и равны значениям непосредственно за линией Ob . В aOd напряжения и скорости перемещений определяются по формулам (3.4), где интенсивность безвихревой волны $\omega = kp^{-2}(\rho c_1)^{-1}$. Для сред с $p^2 > 3/7$ допустимые значения M из (2.7) малы. Если среда характеризуется значениями $1/4 < p^2 < 3/7$, возможно деформирование в указанной форме при больших M .

Максимальное значение q , полученное в предположении достижения за линией Ob состояния пластичности, при котором еще возможно деформирование указанного типа, выражается в виде

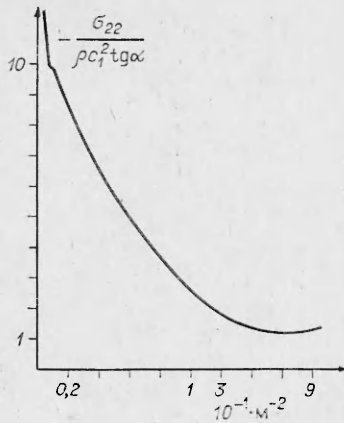
$$(3.17) \quad q \leq M^{-2} \sqrt{M^2 - 1} + \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right) \left(\ln \frac{r}{a}\right) \left(\sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2} 2M\right)^{-1},$$

где

$$M^2 \sin^2 \varphi_1 = 1 - \frac{4}{3} p^2 + rM^{-2}, \\ M^2 \sin^2 \varphi_4 = 1 - \frac{4}{3} p^2 + aM^{-2} = 1 - \frac{4}{3} p^2 + 4p^2 \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right) \times \\ \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}\right)^2 \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right)^{-1} M^{-2}.$$

Из краевого условия (3.4) следует уравнение для определения r

$$q = M^{-2} \sqrt{M^2 - 1} + \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right) \left(2M \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}\right)^{-1} \ln \frac{r}{a} + \\ + p^2 M^{-1} (M^2 - 2p^2)^{-1} \left[2 \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2} - \sqrt{r \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right) \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right)^{-1} p^{-2}} \right] + \\ + 3p \sqrt{1 - \frac{7}{3} p^2} \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right)^{-1/2} M^{-3} + \frac{1}{4} \left[(r - a) \left(1 + \frac{5}{2} p^2\right) p^{-2} - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right) \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right) \ln \frac{r}{a} \right] \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right)^{-1/2} M^{-3}.$$



Фиг. 3

Нормальное давление на грань клина выражается в виде

$$\sigma_{22} = -\frac{k}{p^2} - \frac{k}{p^2} \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right) \ln \frac{r}{a} + o\left(\frac{1}{M^2}\right).$$

Если неравенство (3.16) или (3.17) не выполняется, то как в области aOb , так и в области bOc среда будет находиться в состоянии пластичности.

При этом в aOd решения определяются по формулам (3.4), в dOe происходит пластическое деформирование и имеют место интегралы (2.2)—(2.5), в dOb напряжения и скорости перемещений постоянны и равны их значениям на линии Oe .

В зоне bOf решения определяются по формулам (3.5), в fOg имеют место интегралы (2.2)—(2.5), а за линией Og напряжения и скорости перемещений сохраняют свои значения, равные значениям на линии Og . Для больших значений M обозначим

$$M^2 \sin^2 \varphi_1 = p^2 - 4p^2 \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right) \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right)^{-1} M^{-2} = p^2 - kM^{-2},$$

$$M^2 \sin^2 \varphi_2 = p^2 - eM^{-2}, \quad M^2 \sin^2 \varphi_3 = 1 - \frac{4}{3} p^2 + rM^{-2},$$

$$M^2 \sin^2 \varphi_4 = 1 - \frac{4}{3} p^2 + 4p^2 \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right) \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right)^{-1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2}\right)^2 M^{-2} = 1 - \frac{4}{3} p^2 + aM^{-2}.$$

В зонах dOe и fOg пластическое деформирование происходит при одном и том же условии (1.18), следовательно, имеет место равенство

$$\rho c_2 [v_2] = 2kp^2 M^{-2} [M^{-1} p^{-1} (M^2 - 2p^2) \sin 2\theta_3 - 2M^{-1} \sqrt{M^2 - p^2} \cos 2\theta_3].$$

Из условия непрерывности σ_{12} на линии Of получим

$$e + r = 4p^2 \left(1 - \frac{4}{3} p^2\right) \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right)^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2} - p\right)^2.$$

Из краевого условия (3.1) следует

$$\ln \frac{r}{a} = -2Mq \sqrt{1 - \frac{4}{3} p^2} \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right)^{-1}.$$

Нормальное давление на грань клина выражается в виде

$$\sigma_{22} = -\frac{k}{p^2} + \frac{k}{p^2} \left(1 - \frac{7}{3} p^2\right) \ln \frac{r}{a} + o\left(\frac{1}{M}\right).$$

На фиг. 3 показано изменение давления на грань клина при $p^2 = 0,3$ и $q = 0,1$ в зависимости от скорости проникновения клина. Минимальное давление получаем в упругом решении при $M^2 = 1,18$. При уменьшении и увеличении M давление растет. Со значения $M^2 = 99,82$ наступает пластическое течение у грани клина (область bOc на фиг. 1) и рост давления затормаживается. При $M^2 = 100,20$ пластичность наступает и в области aOb . В дальнейшем с увеличением M давление растет пропорционально M .

ЛИТЕРАТУРА

1. Блейх Г. Г., Мэтьюз А. Т. Движение со сверхзвуковой скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства.— Сб. пер. Механика, 1968, № 1 (107).
2. Баскаков В. А., Быковцев Г. И. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде.— ПММ, 1974, т. 35, вып. 1.
3. Баскаков В. А. Взаимодействие ударных волн в упругопластической среде с упрочнением.— ПМТФ, 1979, № 6.
4. Баскаков В. А. Пластическое деформирование среды при взаимодействии сдвиговых ударных волн.— ПМТФ, 1982, № 2.
5. Шилд Р. О. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии.— Сб. пер. Механика, 1957, № 1.
6. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статике сыпучей среды.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
7. Быковцев Г. И., Кретова Л. Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.

Поступила 22/XI 1983 г.