

### К АЛГОРИТМУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предлагается в сформулированном ранее алгоритме для решения задач пластичности [1], вычисляя напряжения на шаге по времени, точно определять моменты достижения предела текучести и начала пластического течения. В качестве примера применения алгоритма приведено решение задачи о растяжении пластины с полукруговыми вырезами.

Уравнения теории пластического течения с линейным упрочнением имеют вид [1, 2]

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}' &= 2G(e_{ij}' - \eta_{ij}'), & \sigma_{nn}' &= 3Ke_{nn}', \\ s_j' &= \theta\eta_{ij}', & \eta_{ij}' &= 3\Lambda(\sigma_{ij}' - s_{ij}), & s_{nn}' &= 0; \\ \sigma_{ij}' &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{nn}, & e_j' &= e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{nn} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \Lambda &= c\chi W, & \chi &= \frac{G}{(2G + \theta_1)S^2}, \\ W &= (\sigma_{ij}' - s_{ij})e_{ij}', & S^2 &= \frac{3}{2}(\sigma_{ij}' - s_{ij})(\sigma_{ij}' - s_{ij}), \\ c &= \begin{cases} 0, & \text{если } S < S_* \text{ или } S = S_*, W \leq 0, \\ 1, & \text{если } S = S_*, W > 0, \end{cases} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}, & K &= \frac{E}{3(1-2\nu)}, & \theta_1 &= \frac{2}{3} \frac{EE_1}{E - E_1}. \end{aligned}$$

Здесь  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $E_1$  — касательный модуль на пластическом участке диаграммы зависимости напряжения от деформации в одноосном напряженном состоянии;  $E_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta$  — константы материала ( $0 \leq \theta \leq \theta_1$ ; в частности, для чисто изотропного упрочнения  $\theta = 0$ ,  $\theta_1 > 0$ , чисто трансляционного упрочнения  $\theta = \theta_1 > 0$ , идеальной пластичности  $\theta = \theta_1 = 0$ );  $S$  — функция поверхности нагружения;  $S_*$  — предел текучести;  $e_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензоров соответственно полных и пластических деформаций и напряжений;  $s_{ij}$  — координаты центра поверхности нагружения;  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера;  $i, j = 1, 2, 3$ ; выполняется суммирование по повторяющимся индексам  $i, j, n = 1, 2, 3$ ; штрих означает переход к компонентам тензора девиатора; точка сверху — дифференцирование по параметру нагружения (времени)  $\tau$ .

Опишем вычисление напряжений, выполняемое на шаге от  $\tau$  до  $\tau + \Delta\tau$  в каждом узле квадратурной формулы для интегрирования по объему элемента (или в точке интегрирования). Применяя алгоритм [1], имеем значения деформаций  $e_{ij\tau}$ ,  $e_{ij\tau+\Delta\tau}$  в начале и в конце шага (здесь и в дальнейшем значения функций помечаем индексом того момента времени, к которому они относятся). Скорости деформаций считаем постоянными на всем шаге и равными  $e_{ij}' = (e_{ij\tau+\Delta\tau} - e_{ij\tau})/\Delta\tau$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

В случае чисто упругого деформирования напряжения принимают значения

$$(2) \quad \sigma_{ijt} = \sigma_{ij\tau} + (t - \tau) 2G \left( e_{ij}' + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e_{nn}' \right) \quad (t \geq \tau) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Находим точки пересечения луча (2) с поверхностью нагружения как корни  $t$  уравнения  $S_t^2 = S_{*\tau}^2$  или

$$(3) \quad a_0(t - \tau)^2 + 2a_1(t - \tau) + a_2 = 0,$$

где

$$a_0 = 6G^2 e_{ij}' e_{ij}'; \quad a_1 = 3GW_{\tau}; \quad a_2 = S_{\tau}^2 - S_{* \tau}^2.$$

Чисто упругое деформирование принимается в интервале от  $\tau$  до момента  $\tau_1$  — наибольшего корня  $\tau_1 = t$  в (3), когда  $\tau_1 > \tau$ . Если действительных корней нет и  $S_{\tau} > S_{* \tau}$ ,  $W_{\tau} < 0$ , то задаем  $\tau_1 = \tau - a_1/a_0$  и, применяя (2) от  $\tau$  до  $\tau_1$ , уменьшаем значение функции  $S$ . В случае  $\tau_1 > \tau + \Delta\tau$  уравнения (2) используются до конца шага.

На оставшейся части шага от  $\tau_1$  до  $\tau + \Delta\tau$ , где осуществляется пластическое течение, полагаем

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij\tau_2} &= \sigma_{ij\tau_1} + (\tau_2 - \tau_1) \dot{\sigma}_{ij\tau_2}, \\ s_{ij\tau_2} &= s_{ij\tau_1} + (\tau_2 - \tau_1) \dot{s}_{ij\tau_2} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} (\tau + \Delta\tau + \tau_1). \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения  $\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{s}_{ij}$  из (1) при  $c = 1$ , решаем полученные уравнения относительно  $\sigma_{ij\tau_2}$ ,  $s_{ij\tau_2}$  итерациями, аналогичными выполняемым в [1]. Затем вычисляем

$$(5) \quad \sigma_{ij\tau+\Delta\tau} = 2\sigma_{ij\tau_2} - \sigma_{ij\tau_1}, \quad s_{ij\tau+\Delta\tau} = 2s_{ij\tau_2} - s_{ij\tau_1} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Из (1), (4), (5) следует

$$\begin{aligned} W_{\tau+\Delta\tau} &= W_{\tau_1} + (\tau + \Delta\tau - \tau_1) W'_{\tau_2}, \quad W_{\tau_2} = \frac{1}{2} (W_{\tau+\Delta\tau} + W_{\tau_1}), \\ S_{\tau+\Delta\tau}^2 &= S_{\tau_1}^2 + (\tau + \Delta\tau - \tau_1) (S^2)_{\tau_2}. \end{aligned}$$

Здесь берутся значения функций

$$\begin{aligned} W' &= 2G \left( e_{ij}' e_{ij}' - \frac{2G + \theta}{2G + \theta_1} \frac{3W^2}{2S^2} \right), \\ (S^2)' &= \frac{6G(\theta_1 - \theta)}{2G + \theta_1} W. \end{aligned}$$

Приходим к последовательности неравенств

$$\begin{aligned} \theta \leq \theta_1, \quad e_{ij}' e_{ij}' &\geq \frac{3W^2}{2S^2}, \quad W' \geq 0, \quad W_{\tau+\Delta\tau} \geq W_{\tau_1} \geq 0, \\ W_{\tau_2} &\geq 0, \quad (S^2)'_{\tau_2} \geq 0, \quad S_{\tau+\Delta\tau} \geq S_{\tau_1} \geq S_{* \tau}, \end{aligned}$$

причем в случаях идеальной пластичности или чисто трансляционного упрочнения  $S_{\tau+\Delta\tau} = S_{\tau_1}$ . Тем самым доказано, что условия для пластического течения в конце шага  $S_{\tau+\Delta\tau} = S_{* \tau+\Delta\tau} \geq S_{* \tau}$ ,  $W_{\tau+\Delta\tau} \geq 0$  не нарушаются. Шаг разбивается на два подынтервала: до  $\tau_1$  имеем чисто упругое деформирование, от  $\tau_1$  до конца шага — упругопластическое.

Приращения напряжений и пластических деформаций определяются на подынтервалах точнее, чем сразу на всем шаге в [1]. Устраняются погрешности в удовлетворении условию  $S \leq S_*$ . Благодаря этому можно вести счет с более крупными шагами по времени. Моменты начала пластического течения внутри шага определяются также в алгоритме, предложенном в [3].

Рассмотрим решение задачи о равновесии пластины с полукруговыми вырезами, растягиваемой равномерно распределенной на ее краях и монотонно возрастающей нагрузкой  $P$  (рис. 1). Используем уравнения (1)

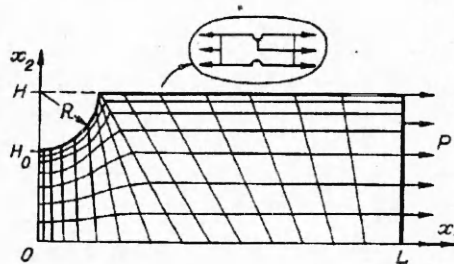


Рис. 1

для упругого идеально пластического материала, линейные выражения деформаций через смещения и уравнения равновесия [2] в плоском напряженном состоянии в декартовой системе координат  $x_1, x_2$ .

Ввиду симметрии решение ищется на одной четверти пластины (рис. 1) ( $x_1, x_2$  — оси симметрии,  $R$  — радиус выреза,  $L = 6R$ ,  $H = 2,5R$ ,  $H_0 = 1,5R$ ). Край  $x_2 = H$  и контур выреза не нагружены. На краю  $x_1 = L$  задаем  $\sigma_{11} = P$ ,  $\sigma_{12} = 0$ . Данная четверть пластины разбивается на 105 четырехугольных девятиузловых изопараметрических лагранжевых конечных элементов (рис. 1), в узлах которых имеем 884 искомые переменные — компоненты смещений. Для вычисления интегралов по площади элемента используется трехточечная квадратурная формула Гаусса [3].

Вводятся безразмерные величины (помечены сверху  $\sim$ ):

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{R} x_i, \quad \tilde{u}_i = \frac{Eu_i}{(1-\nu^2)RP_0}, \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{1}{P_0} \sigma_y \quad (i, j = 1, 2),$$

$$\tilde{S} = \frac{1}{P_0} S, \quad \tilde{S}_* = \frac{1}{P_0} S_*, \quad \tau = \frac{P}{P_0}$$

( $u_1, u_2$  — смещения в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$ ,  $P_0$  — нагрузка, при которой в упругой пластине достигается предел текучести). Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Решение в данных безразмерных величинах не зависит от  $E, R, P_0$ .

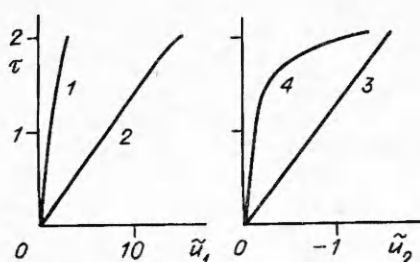
При  $\tau = 1$  максимальное значение интенсивности напряжений в точках интегрирования  $\tilde{S} = \tilde{S}_* = 3,0407$  полагаем равным пределу текучести. Интерполируя напряжения с точек интегрирования на узлы элементов, определяем коэффициент концентрации напряжений на краях вырезов — значение  $\tilde{\sigma}_{11} = 3,1123$  в точке  $(0, H_0)$  (для бесконечно длинной пластины ( $L \rightarrow \infty$ ) коэффициент концентрации напряжений равен 3,109 [4, 5]). Уравнения (1) удовлетворяются только в точках интегрирования, поэтому интенсивности напряжений в других точках могут так же, как и данное значение  $\tilde{\sigma}_{11}$ , ненамного превышать предел текучести.

Счет при пластических деформациях ведется в интервале нагрузок  $1 \leq \tau \leq T = 2,045$  на последовательности из 22 шагов: 4 шага по  $\Delta\tau = 0,075$ ; 11 по 0,05; 6 по 0,03; 1 по 0,015. Указанное  $T$  меньше величины нагрузки  $T_H = 2,0567$ , полученной для жесткопластической пластины в [6, 2]. Отметим, что с увеличением  $\tau$  растет необходимое число итераций скоростей смещений на шаге (до 15 на последнем шаге) и увеличивается время счета на шаге.

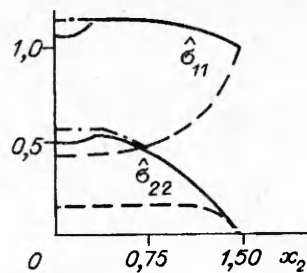
Смещения в области вне некоторых окрестностей вырезов при  $\tau > 1$  продолжают расти почти линейно по  $\tau$ . Зависимости  $\tilde{u}_1$  в точках  $(R, 0)$ ,  $(L, 0)$  и  $\tilde{u}_2$  в точках  $(L, H)$ ,  $(0, H_0)$  от  $\tau$  показаны на рис. 2 линиями 1—4 соответственно. Скорости  $u_2^*$  под вырезом и  $u_1^*$  резко возрастают, когда  $\tau$  приближается к  $T$ .

На рис. 3 представлены распределения напряжений  $\hat{\sigma}_{11} = \sigma_{11}/S_*$ ,  $\hat{\sigma}_{22} = \sigma_{22}/S_*$  в сечении  $x_1 = 0$  и на рис. 4 — окружного напряжения  $\sigma_l$  на краю выреза по длине дуги  $l$ , отсчитываемой от точки  $(0, H_0)$ , при  $\sigma_l = \sigma_l/S_*$ ,  $l = 2l/(\pi R)$ . Штриховые линии относятся к  $\tau = 1$ , сплошные — к  $\tau = T$ , штрихпунктирные на рис. 3 там, где они не сливаются со сплошными линиями, — значения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  в решении [6, 2].

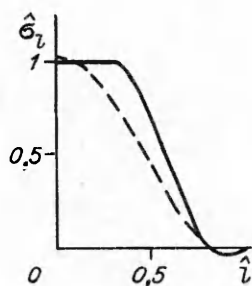
На рис. 5 заштрихованы области пластического течения в центральной части пластины под вырезом для  $\tau = 2$  и  $T$  (а и б). Границы этих областей проведены приближенно, как гладкие кривые, охватывающие дискретные множества тех точек интегрирования, в которых есть ненулевые скорости пластических деформаций. При  $\tau = T$  области пластического течения, расположенные симметрично в каждом квадранте осей координат  $x_1, x_2$ , соединяются на оси  $x_1$ . В данном решении с увеличением  $\tau$  равновесие пластины обеспечивается за счет расширения области пластического течения и перераспределения напряжений. Смещения и деформации остаются ограниченными. Тем не менее из соображений безопасности  $T$  считается предельной



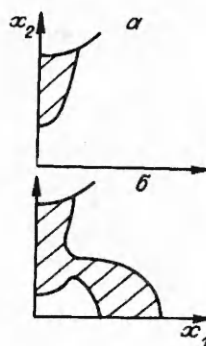
Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5

допустимой нагрузкой  $T = T_*$ . Естественно, значение  $T_*$  может уточняться путем измельчения шагов  $\Delta t$ . Дополнительным признаком достижения  $T_*$  является резкое возрастание скоростей смещений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. Н. Об одном алгоритме решения задач пластичности и ползучести методом конечных элементов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1991.— Вып. 103.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности.— М.: Наука, 1969.
3. Bathe K. J. Finite element procedures in engineering analysis.— Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.
4. Лин Чи-бинь. О коэффициенте концентрации напряжений в узкой пластине с выточками // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикладная механика.— 1968.— Т. 35, № 4.
5. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений.— М.: Мир, 1977.
6. Hill R. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets // J. Mech. and Phys. of Solids.— 1952.— V. 1, N 1.

г. Новосибирск

Поступила 30/XII 1992 г.,  
в окончательном варианте — 10/II 1993 г.

УДК 539.376

В. Н. Маклаков

### ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ СТАДИИ РАЗУПРОЧНЕНИЯ ПРИ ОДНООСНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Рассматриваются вопросы построения определяющих уравнений ползучести и длительной прочности металлических материалов. В качестве критерия разрушения элементарного объема материала использовано условие достижения плотностью внутренней энергии своего предельного значения. Показано, что предложенная модель приводит к линейному закону сум-

© В. Н. Маклаков, 1993