

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В НЕУСТОЙЧИВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Н. А. Желтухин, Н. М. Терехова
(Новосибирск)

Анализ большого количества экспериментальных данных по структуре области перехода ламинарного режима течения в турбулентный на плоской пластине [1, 2] позволяет сделать вывод, что за стадией линейного развития исходной неустойчивости и следующей за ней стадией слабо нелинейного развития возмущений следует стадия трехмерного роста их и с некоторого момента развития волнового движения является неизбежно трехмерным. Эксперименты фиксируют существование длинноволновых вихреобразований с осью вдоль направления основного течения, в результате чего происходит перераспределение количества движения среднего течения и появление вторичного трехмерного режима. Наблюдаемые в экспериментах продольные вихри имеют строго периодический по координате z характер и схематично изображены на фиг. 1. В настоящее время достигнут значительный прогресс в изучении нелинейной стадии перехода, чего нельзя сказать об анализе трехмерных эффектов применительно к среднему течению.

Первые попытки описать механизм трехмерного взаимодействия были предприняты в работах [3, 4] для некоторых сдвиговых течений, моделирующих реальные течения типа пограничного слоя. По имени авторов продольные периодические вихри известны теперь под именем «вихрей Бенни — Линя». Предложенная ими модель (линейное приближение) позволила получить средний вторичный поток, индуцированный возмущениями. Аналогичные предположения использованы в работе [5], где в качестве исходного рассматривался пограничный слой, близкий к экспериментальному (семейство Фокнера — Скэн). Существенным моментом этих работ является рассмотрение взаимодействия волн разной размерности (плоской и трехмерной) с исходным течением и исследование изменения формы вихря при разных соотношениях амплитуд этих волн. Искажение исходного осредненного течения не рассматривалось. В данной работе проводится более полное исследование течения в поле трехмерных возмущений конечной интенсивности в несжимаемом потоке на плоской пластине на основе точного решения уравнений Рейнольдса как для осредненного, так и для вихревого течения.

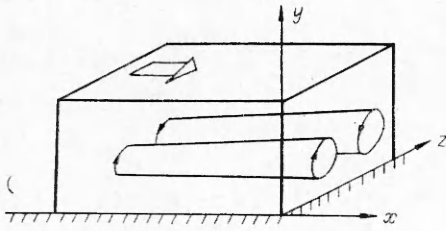
Хотя вопрос о конкурентном взаимодействии волн возмущений разной размерности и является очень интересным, принято, что именно наличие трехмерных волн является определяющим в общей картине появления завихренности, поэтому в работе рассмотрено именно их взаимодействие с исходным плоским пограничным слоем, взятым в виде решения Фокнера — Скэн при нулевом продольном градиенте давления. Методика, используемая здесь, в принципе не исключает дальнейшего усложнения задачи в данном направлении. В качестве исходной модели взят симметричный кроссинг волн — пара пересекающихся косых волн Толлмина — Шлихтинга, дающий возможность в простом виде выразить момент сил в общей картине взаимодействия. В работе также в линейном приближении исследована эволюция временного спектра уравнения Орра — Зоммерфельда, что может быть полезным для оценки фазовых скоростей возмущений получающихся трехмерных течений.

1. Рассмотрим две волны возмущения в виде косых волн Толлмина — Шлихтинга произвольной начальной интенсивности κ . Предположим для простоты, что волны распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями $C = C_r + iC_i$ и волновыми числами α, γ

$$(1.1) \quad \kappa \{u', v', w', p'\}(x, y, z, t) = \kappa \{u, v, w, p\}(y) \exp(\theta \pm i\gamma z),$$

$$\theta = i\alpha(x - Ct).$$

Если γ вещественно, то можно построить линейную комбинацию этих волн, при тех же α и C обращающуюся в некоторых точках оси z в нуль, т. е. решение типа стоячей волны. Основные уравнения движения инвариантны относительно одновременного изменения знака у z и w , поэтому



Фиг. 1

для амплитуд возмущений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_1(y) &= u_2(y) = u(y), \\ v_1(y) &= v_2(y) = v(y), \\ w_1(y) &= -w_2(y) = w(y), \\ p_1(y) &= p_2(y) = p(y), \end{aligned}$$

а суммарная волна возмущения представится в виде

$$\begin{aligned} u'_1 + u'_2 &= u(y) \exp \theta (\exp i\gamma z + \exp (-i\gamma z)) = 2u(y) \exp \theta \cdot \cos \gamma z, \\ v'_1 + v'_2 &= 2v(y) \exp \theta \cdot \cos \gamma z, \quad w'_1 + w'_2 = 2iw(y) \exp \theta \cdot \sin \gamma z, \\ p'_1 + p'_2 &= 2p(y) \exp \theta \cdot \cos \gamma z. \end{aligned}$$

Если начальное течение плоскопараллельное $U = U(y)$, $V = W = 0$, то линеаризованные уравнения Навье — Стокса для амплитуд возмущений имеют вид [6]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v_{yy} - Bv &= \operatorname{Re} p_y, \\ u_{yy} - Bu &= \operatorname{Re} U_y v + i\alpha \operatorname{Re} p, \quad w_{yy} - Bw = i\gamma \operatorname{Re} p, \\ v_y + i\alpha u + i\gamma w &= 0, \quad B = \alpha^2 + \gamma^2 + i\alpha \operatorname{Re} (U - C), \\ \operatorname{Re} &= U_0 \delta / \nu, \quad v_y = dv/dy. \end{aligned}$$

Краевыми условиями для них являются условия прилипания на стенке

$$u = v = w = 0, \quad y = 0$$

и условия ограниченности возмущений на бесконечности

$$u, v, w \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

В работе рассматривается автомодельный пограничный слой на плоской пластине, описываемый уравнением Фокнера — Скэн [7]:

$$(1.3) \quad \Phi_{yyy} = -\Phi \Phi_{yy}$$

с краевыми условиями

$$\Phi = \Phi_y = 0 \quad (y = 0), \quad \Phi_y \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow \infty).$$

Краевая задача сводится к задаче Коши

$$\Phi = \Phi_y = 0, \quad \Phi_{yy} = 0,4696 \quad (y = 0),$$

а безразмерные скорости выражаются в виде

$$U = \Phi_y, \quad U_y = \Phi_{yy}.$$

Уравнение решается в интервале $0 \leq y \leq \delta$, где толщина пограничного слоя δ выбрана из условия $U(\delta) = 0,9999$ ($\delta = 4,85$). Воспользовавшись преобразованиями Сквайра, сведем трехмерную задачу к эквивалентной двумерной. Оставляя неизменными фазовую скорость C и $v = v$, введем новые переменные u_0, p_0, χ, k, R следующим образом:

$$k^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad ku_0 = \alpha u + \gamma w, \quad kR = \alpha \operatorname{Re}, \quad \chi = \gamma u - \alpha w, \quad p_0 R = p \operatorname{Re}.$$

Тогда для амплитуд возмущений получим эквивалентную уравнению Орра — Зоммерфельда систему

$$(1.4) \quad \begin{aligned} v_{yy} - Av &= R p_{0y}, \quad u_{0yy} - Au_0 = R U_y v + ikR p_0, \\ v_y + ik u_0 &= 0, \quad A = k^2 + ikR(U - C) \end{aligned}$$

и неоднородное уравнение для χ

$$(1.5) \quad \chi_{yy} - A\chi = \gamma \operatorname{Re} U_y v$$

с краевыми условиями

$$(1.6) \quad u_0 = v = \chi = 0 \quad (y = 0), \quad u_0, v, \chi \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty).$$

Решение системы (1.4), (1.6) составляет предмет исследования линейной теории гидродинамической устойчивости. К настоящему времени разработано достаточно много надежных методов получения как собственных значений k , R , C , так и собственных функций [8]. Для пограничного слоя конечной толщины условия затухания возмущений на бесконечности заменяются условиями непрерывности и ограниченности возмущений на внешней границе пограничного слоя, которые принимают вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{0yy} + (k + \beta)u_{0y} + k\beta u_0 = 0, \\ \varepsilon_2 &= v_{yy} + (k + \beta)v_y + k\beta v = 0, \quad \beta^2 = k^2 + ikR(1 - C). \end{aligned}$$

Решение (1.5) может быть также получено одним из упомянутых методов, а для χ по внешней границе в первом приближении справедливо соотношение

$$\chi_y + \beta\chi = 0.$$

2. Если предположить, что на всех этапах своего развития возмущения удовлетворяют линейризованным уравнениям Навье — Стокса, то квазистационарное течение удовлетворяет уравнениям Рейнольдса:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} UU_x + VU_y + WU_z + \frac{1}{\rho} P_x - \nu \Delta U &= -(\langle u'^2 \rangle_x + \langle u'v' \rangle_y + \langle u'w' \rangle_z), \\ UV_x + VV_y + WV_z + \frac{1}{\rho} P_y - \nu \Delta V &= -(\langle u'v' \rangle_x + \langle v'^2 \rangle_y + \langle v'w' \rangle_z), \\ UW_x + VW_y + WW_z + \frac{1}{\rho} P_z - \nu \Delta W &= -(\langle u'w' \rangle_x + \langle v'w' \rangle_y + \langle w'^2 \rangle_z), \\ U_x + V_y + W_z &= 0, \quad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2, \end{aligned}$$

где в правой части стоят напряжения Рейнольдса, полученные статистическим осреднением величин u'^2 , $v'w'$ и т. д. Вопрос о замыкании (2.1) рассмотрен в рамках моногармонического приближения [8]. Для выбранной системы волн (1.1) получаем, что напряжения Рейнольдса не зависят от координаты x , например,

$$\langle u'^2 \rangle = 2|u|^2 \cos^2 \gamma z, \quad \langle u'w' \rangle = 2(u_i w_r - u_r w_i) \sin 2\gamma z.$$

Суммарная волна возмущения представляет собой кроссинг с ненулевым моментом (y, z), поэтому соответствующая ему пара сил вызовет появление в пограничном слое продольной завихренности $\omega = V_z - W_y$, а течение приобретет вид $U = U(y, z)$, $V = V(y, z)$, $W = W(y, z)$. Для такого течения система (2.1) разделяется, и можно найти решение для ω независимо от U .

В переменных ω, ψ ($V = -\psi_z$, $W = \psi_y$) три последних уравнения (2.1) запишутся в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} -\psi_z \omega_y + \psi_y \omega_z &= (1/\operatorname{Re})(\omega_{yy} + \omega_{zz}) + \kappa^2 F(y, z), \\ \omega &= -(\psi_{yy} + \psi_{zz}), \end{aligned}$$

где

$$F(y, z) = -\mathcal{F}(y) \sin 2\gamma z; \quad \mathcal{F}(y) = \langle uv \rangle_{yy} + 2\gamma(\langle uv \rangle_y + \langle wv \rangle_y + 2\gamma \langle vw \rangle).$$

Так как возмущения имеют периодическую по z структуру, следует ожидать, что и вторичное течение будет периодически по z с тем же периодом

$T = 2\pi/2\gamma$. Рассмотрим линейное приближение полной задачи (2.2), названное здесь «вязким вихрем». Линейная задача хорошо описывает форму вихря при малых интенсивностях возмущений, когда нелинейные конвективные члены меньше вязких линейных, ее можно также рассматривать как первое приближение полной задачи для произвольных амплитуд. Этим и ограничиваются в работах [3—5]. Формально, воспользовавшись разложением в ряд Фурье, для первого члена примем

$$(2.3) \quad \psi(y, z) = \bar{\Psi}(y) \sin 2\gamma z.$$

Тогда $\omega = -(\Psi_{yy} - 4\gamma^2\Psi) \sin 2\gamma z$, и из (2.2) получим для $\Psi(y)$ неоднородное уравнение четвертого порядка

$$\Psi_{yyyy} - 2(2\gamma)^2\Psi_{yy} + (2\gamma)^2\Psi = -\kappa^2 \mathcal{F}(y).$$

Граничные условия следуют из физических представлений

$$\begin{aligned} V = W = 0 & \quad \text{при } y = 0, \text{ что дает } \Psi = \Psi_y = 0, \\ V, W \rightarrow 0 & \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \text{ что дает } \Psi, \Psi_y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Последние условия переносятся на внешнюю границу пограничного слоя, где можно принять закон убывания Ψ в виде $\Psi = (D_1 + D_2 y) \times \exp(-2\gamma y)$, что приводит к соотношениям, аналогичным (1.7):

$$\Psi_{yy} + 4\gamma(\Psi_y + \gamma\Psi) = 0, \quad \Psi_{yyy} + 4\gamma(\Psi_{yy} + \gamma\Psi_y) = 0.$$

Компоненты скорости вторичного течения определяются из (2.3)

$$V(y, z) = -2\gamma\Psi(y) \cos 2\gamma z, \quad W(y, z) = \Psi_y(y) \sin 2\gamma z.$$

Решение полной задачи (2.2) в области $G(0 \leq y \leq Y, 0 \leq z \leq T)$ найдено с использованием неявного конечно-разностного метода второго порядка точности [9]. На левой и правой границах ($z = 0, z = T$) требовалось выполнение условий периодичности:

$$\begin{aligned} \psi(y, 0) = \psi(y, T), \quad \omega(y, 0) = \omega(y, T), \\ \psi_z(y, 0) = \psi_z(y, T), \quad \omega_z(y, 0) = \omega_z(y, T). \end{aligned}$$

Граничное условие на стенке ($y = 0$) $V = 0$ дает возможность определить $\psi(0, z) = \text{const}$, в частности, можно принять $\psi(0, z) = 0$. Выполнение второго условия $W = 0$ проверялось в процессе сходимости решения. Для завихренности ω из второго уравнения (2.2) имеем $\omega(0, z) = -\psi_{yy}(0, z)$. Так как завихренность линейных волн возмущения быстро затухает с ростом y , следует ожидать, что и завихренность индуцируемого ими вторичного течения для достаточно больших y можно принять равной нулю. Верхняя граница расчетной области широко варьировалась $\delta \leq Y \leq 3\delta$, оказалось, что ω практически равна нулю уже для $y \sim 1,5\delta$.

Функция тока тоже затухает на бесконечности, но существенно медленней. Поэтому, чтобы ограничить область решения, воспользуемся асимптотическими соотношениями. Для постановки граничных условий используем условие периодичности ψ по z ($\psi(y, z) = \psi(y) \sin 2\gamma z$) и из второго уравнения (2.2) и условия $\omega(Y, z) = 0$ получим, что для амплитудной функции $\psi(y)$ должно выполняться $\psi_{yy} - 4\gamma^2\psi = 0$. Если теперь предположить, что асимптотика $\psi(y)$, удовлетворяющая этому уравнению, имеет вид $\psi(y) \sim D \exp(-2\gamma y)$, где D — произвольная постоянная, то соотношение вида $\psi_y + 2\gamma\psi = 0$ может быть принято в качестве граничного условия при $y = Y$. Более точные результаты может дать асимптотическое представление $\psi(y, z)$ для больших y в виде гармонического ряда

$$\psi(y, z) = \sum_{i=1}^n D_i \exp(-2\gamma i y) \sin(2\gamma i z).$$

Решения, полученные для граничных условий в виде ряда при $n > 3$

и соотношения $\psi_y + 2\gamma\psi = 0$, очень близки. В качестве начального приближения задавалось распределение (2.3). Для получения продольной компоненты скорости основного течения $U(y, z)$ должно быть решено первое уравнение системы (2.1) ($P_x = 0$ для пластины):

$$VU_y + WU_z = (1/\text{Re})(U_{yy} + U_{zz}) - \kappa^2 H,$$

где H — напряжения Рейнольдса

$$H = f + \langle uv \rangle_y, \quad f = (\langle uv \rangle_y + 2\gamma \langle uw \rangle) \cos 2\gamma z.$$

Чтобы получить отсюда эпюры скоростей $U(y, z) = U(y)$, соответствующие распределению (1.3) в ламинарном пограничном слое без возмущений (или для бесконечно малых возмущений при $\kappa^2 \rightarrow 0$) и без индуцированных ими вторичных образований ($V = W = 0$), в правую часть этого уравнения были введены добавочные силы $F_d = -(1/\text{Re})\varphi_{yy}$, имеющие вид сил Фокнера — Скэн (1.3). Таким образом, уравнение Рейнольдса приняло вид

$$(2.4) \quad VU_y + WU_z = (1/\text{Re})(U_{yy} + U_{zz}) - \kappa^2 H + F_d.$$

Область решения — прямоугольник G_1 ($0 \leq y \leq Y_1$, $0 \leq z \leq T$), при $Y = Y_1$ области G и G_1 совпадали. Величина Y_1 также варьировалась, $\delta \leq Y_1 \leq 3\delta$. Для $U(y, z)$ ставились следующие краевые условия:

$$U(y, 0) = U(y, T), \quad U_z(y, 0) = U_z(y, T), \quad U(0, z) = 0, \quad U_y(Y_1, z) = 0,$$

возможным вариантом последнего условия является асимптотическое раз-

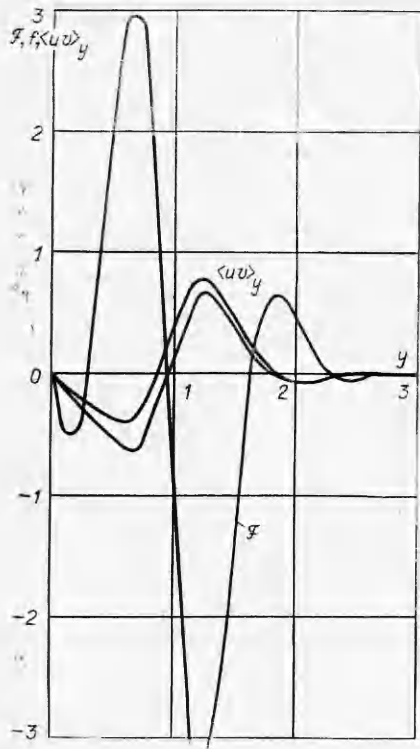
ложение $U(Y_1, z) = 1 + \sum_{i=1}^n D_i \exp(-2\gamma Y_1 i) \cos(2\gamma z i)$. В качестве начального приближения бралось распределение (1.3). Для решения (2.4) была использована неявная схема второго порядка точности (схема Писмена — Раффорда) [10].

Исследование эволюции временного спектра уравнения Орра — Зоммерфельда (1.4) для вторичного осредненного течения $\langle U(y) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U(y, z) dz$

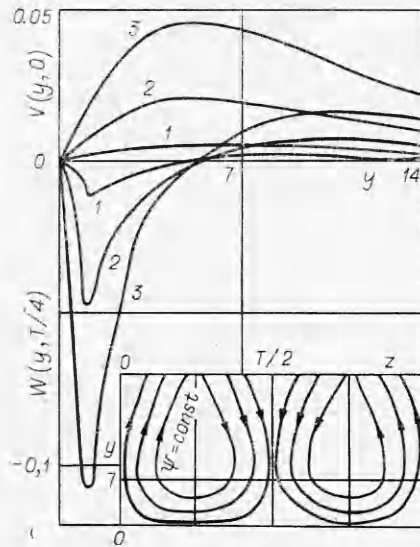
проводилось методами линейной теории устойчивости. На внешней границе Y_1 искался нуль функции ε_2 из (1.7). Эта функция аналитична относительно своего аргумента $C = C_r + iC_i$, поэтому использование условий Коши — Римана существенно упрощало расчет. Осредненное течение $\langle U \rangle$ и его производные аппроксимировались кубическими сплайн-функциями.

3. Представленные ниже результаты получены для критического числа Рейнольдса по линейной теории: $k_1 = 0,301$, $R_1 = 519,2$, $C = 0,3959 + i0$ ($k = 0,24745$, $R = 426,7$) для двумерных возмущений при различных значениях трансверсального волнового числа $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15; (0,2k, 0,4k, 0,6k$ соответственно). Переход к параметрам трехмерных возмущений осуществляется по формулам Сквайра, а $k_1 = k\delta_1$, $R_1 = R\delta_1$.

На фиг. 2 представлены амплитуды напряжений Рейнольдса \mathcal{F} , f , $\langle uv \rangle_y$ для $\gamma = 0,1$. Интегральная кривая $\mathcal{F}(y)$ отрицательна, следовательно, вращение, вызываемое ею, должно проходить по часовой стрелке. Для этих же значений на фиг. 3 показаны амплитуды вторичных «вязких вихрей» (линейное приближение), Y выбрано $\sim 3\delta$ для получения замкнутой формы вихря, линии тока $\Psi = \text{const}$ изображены здесь же. Кривые 1—3 соответствуют интенсивности возмущений $\kappa = 0,01; 0,02$ и $0,03$. Вторичный вихрь симметричен по z , центр его находится в $y = 4$, $z = T/4$ для всех κ , а на периоде $0 \leq z \leq T$ располагаются два вихря с правым и левым вращением.



Ф и г. 2

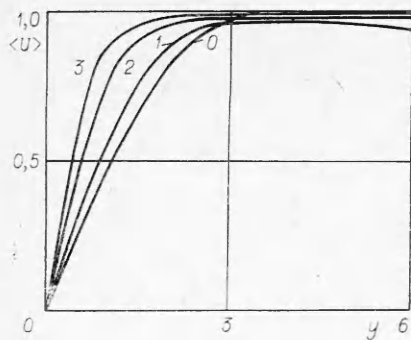


Ф и г. 3

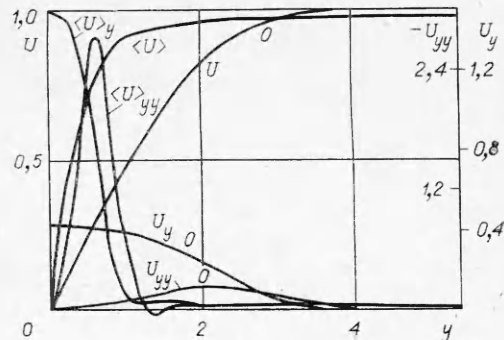
Осредненное вторичное течение $\langle U(y) \rangle$ представлено на фиг. 4 для $0,01 \leq \kappa \leq 0,03$ (кривые 1—3) с шагом $\Delta \kappa = 0,01$. Индексом 0 отмечены ламинарный профиль (1.3). Из графика видно, что вторичные продольные вихри, индуцированные в пограничном слое

трехмерными возмущениями, приводят к существенной перестройке течения — в пристенной области профиль становится более наполненным, увеличивается толщина пограничного слоя. Выход на скорость невозмущенного течения происходит для $y \sim 4-5\delta$, где δ — исходная толщина (1.3).

На фиг. 5 показано изменение суммарных характеристик осредненного течения $\langle U \rangle$, $\langle U \rangle_y$, $\langle U \rangle_{yy}$ для $\kappa = 0,05$ по сравнению с ламинарными формами, отмеченными индексом 0. Оказалось, что все характерные величины изменяются в пристенном слое $y < 3$, как это и свойственно турбулентным течениям. Подобные же результаты получены для других значений γ (0,05 и 0,15), причем с ростом γ при тех же κ растут как интенсивность вихря, так и заполненность профиля. Интересные результаты получены при изучении эволюции временного спектра уравнения Орра — Зоммерфельда в рамках линейного приближения. Предварительно было

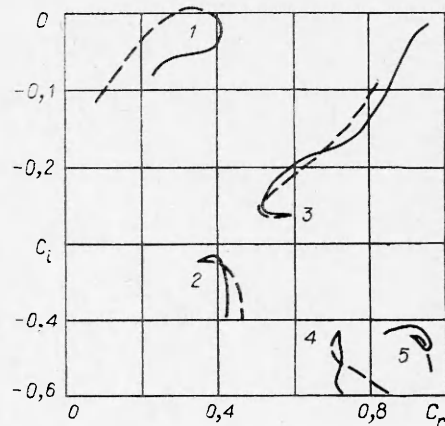


Ф и г. 4

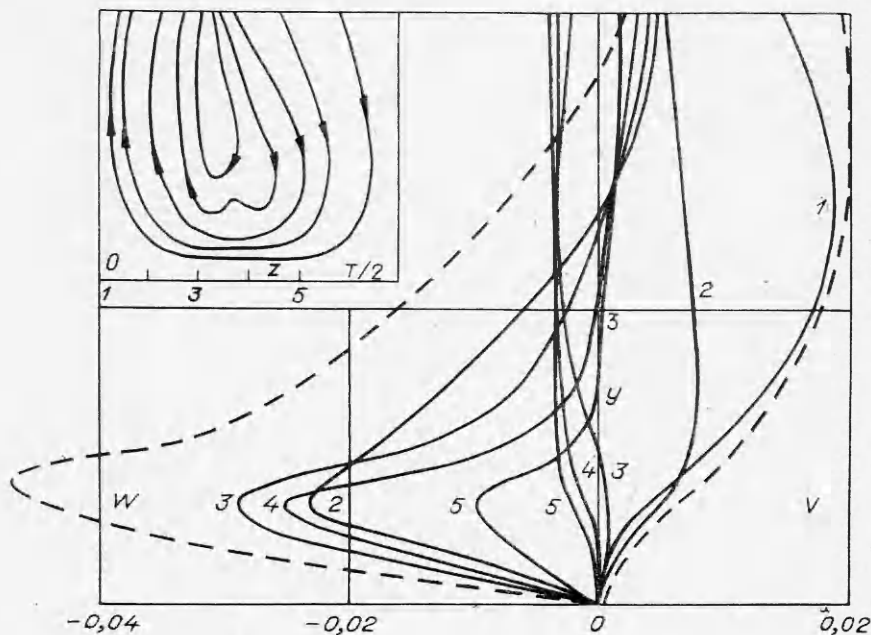


Ф и г. 5

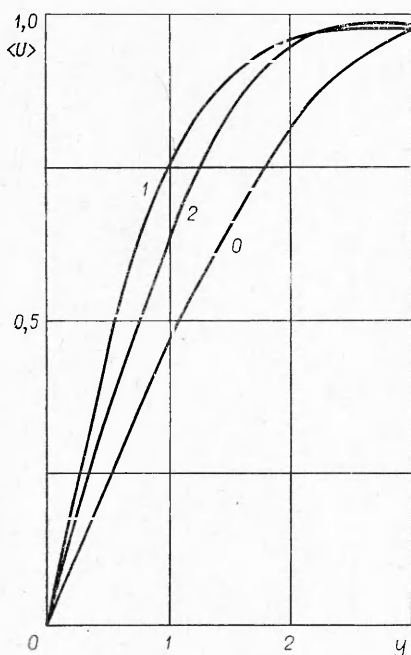
найденно, что в ламинарном пограничном слое для критического числа Рейнольдса существуют шесть спектральных мод, первая из которых нейтрально устойчива ($C_i = 0$). Отправным моментом в этом поиске служили данные [11]. В процессе эволюции течения происходит перестройка этой картины, показанная на фиг. 6 для $\gamma = 0,05$ (штриховые линии) и $\gamma = 0,1$ при $\kappa = 0,05$; мода 1 для $\gamma = 0,05$ проходит через слабо неустойчивое положение $C_i > 0$, а затем так же, как и 2–5, становится «сильно» устойчивой (большие отрицательные C_i). Интерес вызывает поведение третьей моды. Для $\gamma \geq 0,1$ значение C_i для профиля установления очень близко к нулю ($\gamma = 0,1, C = 0,96 - 0,007i$). Из этого можно сделать заключение о том, что возможная неустойчивость вторичного течения может быть связана с возмущениями, фазовая скорость которых имеет порядок скорости набегающего потока, что как раз характерно для вихреобразований пограничного слоя, наблюдаемых экспериментально ($U \sim 0,8U_0$). Для $\gamma = 0,05$ это не столь отчетливо. Шестая мода для вторичного течения не прослеживается. В рамках полной задачи получен вид вихря и профиля осредненного течения. Один из вариантов расчета для $\kappa = 0,02$ показан на фиг. 7, 8. На фиг. 7 представлены величины V и W в различных сечениях z , для сравнения нанесены максимальные амплитуды «вязкого» приближения. Получающийся вихрь смещен и деформирован по y и z по сравнению с «вязким».



Фиг. 6



Фиг. 7



Ф и г. 8

мушения κ . Таким образом, можно считать, что в рамках принятой модели турбулизация течения определяется интенсивностью возмущений.

Результаты позволяют проследить влияние конвективных членов. Если для $\kappa \leq 0,01$ значения V и W обоих приближений очень близки (для $\kappa = 0,005$ отличие $W_{\max} \sim 3\%$, а амплитуды V практически совпадают), то для интенсивностей возмущений $\kappa > 0,01$ амплитуды скоростей полного вихря значительно меньше, т. е. затраты энергии на конвективное перемешивание способствуют гашению вихрей. Подобное сглаживание видно и на профиле осредненной скорости (фиг. 8), оно ведет к меньшей наполненности профиля в пристенной области (здесь 0 — ламинарный профиль, 1 — вязкое приближение, 2 — полная задача).

Сделана попытка рассчитать степень турбулизации ε_T получающегося течения. По аналогии со степенью турбулентности примем $\varepsilon_T = ((1/3)\langle u'^2 \rangle + \langle (V + v')^2 \rangle + \langle (W + w')^2 \rangle)^{1/2}$. Оказалось, что хотя получено $\varepsilon_T = \varepsilon_T(y, z)$, но это значение очень близко к изначальное значению интенсивности воз-

Поступила 16 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Klebanoff P. S., Titstrom K. D. Evolution of amplified waves leading to transition in boundary layer with zero pressure gradient. NASA, Tech. Note, 1959, ND-495.
2. Klebanoff P. S., Titstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary layer instability.— J. Fluid. Mech., 1962, vol. 12, p. 1.
3. Benny D. J., Lin C. C. On the secondary motion induced by oscillations in shear flow.— Phys. Fluids, 1960, vol. 3, p. 656.
4. Benny D. J. Finite amplitude effects in an unstable boundary layer.— Phys. Fluids, 1964, vol. 7, p. 319.
5. Antral V. N., Collins F. G. Numerical calculation of finite amplitude effects in unstable laminar boundary layers.— Phys. Fluids, 1975, vol. 18, N 3.
6. Бетчов П., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
8. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. М.: Наука, 1977.
9. Джакупов К. Б. О некоторых численных методах расчета уравнений Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Труды Всесоюз. семин. по численным методам вязкой жидкости. Новосибирск: Наука, 1969.
10. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
11. Mack L. M. A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 73, p. 3.