тельными волномерами. Можно только констатировать, что и в этом режиме рост волн оказался ограниченным.

С другой стороны, усиление волн при сложном возмущении (по сравнению с тем, что происходит для порознь взятых его составляющих) может наблюдаться и не в критических условиях. Примером служат данные для режима III при $x_* = 1{,}5$ м, приведенные на рис. 5 (*1* — расчет с учетом (3), *2* — эксперимент). В этом случае усиливаются волны только впереди цилиндра. На указанном расстоянии x_* цуг волн становится практически постоянным. Характерная частота колебаний в нем определяется гочкой пересечения $\omega(k)$ и $\omega_*(k) = U_0k + \Omega$.

На рис. 6 приведены результаты расчетов для режима III при $x_* = 0{,}25$ м в тех же условиях, что и на рис. 5, с учетом (линия *1*) и без учета вязкости и поверхностного натяжения (линия *2*).

Данные рис. 4—6 показывают, что учет вязкости в рассматриваемой задаче даже в рамках линейной теории приводит к неплохому согласию с опытом, особенно по фазовой картине волн. Некоторое превышение амплитуд волн в расчете, видимо, связано с пренебрежением нелинейными членами в граничном условии на поверхности раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стурова И. В.** Внутренние волны, возникающие в двухслойной жидкости при нестационарном движении тела.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985, вып. 70.
2. **Долина И. С.** Усиление колебательного движения тел в стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4.
3. **Dagan G., Miloh T.** Free-surface flow past oscillating singularities at resonant frequency.— J. Fluid Mech., 1982, v. 120.
4. **Akylas T. R.** On the excitation of nonlinear water waves by a moving pressure distribution oscillating at resonant frequency.— Phys. Fluids, 1984, v. 27, N 12.
5. **Чашечкин Ю. Д., Макаров С. А., Беляев В. С.** Присоединенные внутренние волны. Препринт № 214.— М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1983.
6. **Stevenson T. N., Thomas N. H.** Two-dimensional internal waves generated by a travelling oscillating cylinder.— J. Fluid Mech., 1969, v. 36, p. 3.
7. **Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В.** Волны от колеблющегося цилиндра в вязкой двухслойной жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985, вып. 70.
8. **Бородина П. Н., Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В.** Вязкое затухание внутренних волн, возникающих в двухслойной жидкости при движении цилиндра и крыла.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1982, вып. 54.

Поступила 25/IV 1985 г.

УДК 532.51

УСЛОВИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(*Новосибирск*)

Рассмотрена задача устойчивости стационарных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в классах движений, обладающих одним из типов симметрии (трансляционной, осевой, вращательной или винтовой). Получено два типа достаточных условий нелинейной устойчивости, суть доказательств которых состоит в построении двух типов функционалов, имеющих абсолютные минимумы на заданных стационарных решениях. Каждый из используемых функционалов есть сумма кинетической энергии и некоторого другого интеграла, специфичного именно для изучаемого класса движений. Условия устойчивости первого типа — обобщение на случай конечных возмущений и на новые классы течений известного критерия Рэлея [1] о «центробежной» устойчивости вращающихся потоков относительно вращательно-симметричных возмущений. Условия второго типа в этом же смысле обобщают другой, также принадлежащий Рэлею результат, согласно которому плоскопараллельное течение жидкости устойчиво при отсутствии точки перегиба в профиле скорости [1]. Нелинейный вариант последнего утверждения для класса плоских движений впервые получен в [2]. Для систематизации материалов в работе существенно использована аналогия между эффектами плотностной стратификации и вращения в форме [3].

Представленные результаты имеют отношение к проблеме устойчивости широкого класса гидродинамических течений, обладающих требуемой симметрией. Сюда относятся, например, потоки в покоящихся или вращающихся трубах и каналах, течения с концентрированными кольцевыми или спиральными вихрями.

1. Течения с винтовой симметрией. Рассматриваются неустановившиеся движения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости. В цилиндрической системе координат φ, r, z компоненты поля скорости есть u, v, w; p — поле давления. Для изучаемых движений с винтовой симметрией u, v, w и p — функции трех независимых переменных: r, $\mu \equiv a\varphi - bz$ и времени t. Например,

$$p = p(r, \mu, t). \tag{1.1}$$

Через b обозначено любое вещественное число; параметр a можно без ограничения общности считать принимающим только два значения: 0 и 1. При $a = 1$ все решения вида (1.1) будут периодическими по μ с периодом 2π и достаточно рассматривать значения μ из интервала

$$0 \leqslant \mu \leqslant 2\pi. \tag{1.2}$$

При $a = 0$ (случай вращательной симметрии) решения могут и не быть периодическими. Используя обозначения [3]

$$\alpha \equiv au - brw, \quad \beta \equiv bru + aw, \tag{1.3}$$
$$R \equiv a^2 + b^2r^2, \quad g \equiv b^2r/R^2, \quad K \equiv 2ab/R^2,$$

исходные уравнения движения для решений вида (1.1) преобразуем к форме

$$D(r\alpha/R) + K\beta rv = -p_\mu, \tag{1.4}$$
$$Dv - K\beta\alpha - (a\alpha/R)^2/r = -p_r + g\beta^2,$$
$$D\beta = 0, \quad v_r + v/r + \alpha_\mu/r = 0,$$
$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}.$$

Индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные.

Дифференцированием первого уравнения (1.4) по r, второго по μ и вычитанием одного выражения из другого получается

$$D\omega + \left(v\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\frac{2ab\beta}{R^2} + \frac{b^2}{R^2}(\beta^2)_\mu = 0, \tag{1.5}$$

где $\omega \equiv (1/r)[(r\alpha/R)_r - v_\mu]$.

Если движения (1.1) происходят в фиксированной области, то ее границы должны обладать требуемой симметрией, т. е. задаваться функцией двух переменных

$$f(r, \mu) = 0. \tag{1.6}$$

Условия непротекания на (1.6) для истинных компонент скорости u, v, w, записанные в терминах (1.3), (1.6), дают

$$vf_r + f_\mu\alpha/r = 0. \tag{1.7}$$

Область течения будет считаться либо одно-, либо двусвязной; в последнем случае граница (1.6) состоит из двух компонент — внутренней и внешней.

Винтовая геометрия стенок (1.6) может показаться надуманной, однако именно винтовые трубы активно используются в теплообменных аппаратах [4]. В то же время важным частным случаем (1.6) являются круговые цилиндрические границы с областью течения

$$R_1 < r < R_2. \tag{1.8}$$

При $R_1 \neq 0$ (1.8) соответствует течению между двумя концентрическими цилиндрами, при $R_1 = 0$ — в круглой трубе.

При $a = 1$ уравнения (1.4), (1.5) и граничные условия (1.7) удобно рассматривать на плоскости полярных координат r, μ с радиальной координатой r и угловой μ (1.2). На этой плоскости замкнутые кривые (1.6) ограничивают область течения τ. При таком рассмотрении соотношения (1.4)—(1.6) оказываются весьма похожими на уравнения и граничные условия для плоских движений неоднородной по плотности (стратифицированной) жидкости [3]. Роль μ — компоненты скорости — играет величина α, а роль плотности — переменная β (или β^2). Соответствующее «поле массовых сил» направлено по радиусу от центра и имеет величину g (1.3). Для вращательно-симметричных движений ($a = 0$) отмеченное сходство переходит в эквивалентность [3].

Для общего случая задачи (1.4)—(1.7) сходство (1.1) с движениями неоднородной жидкости настолько далеко идущее, что имеет место интеграл энергии E в виде суммы фиктивных «кинетической» T и «потенциальной» Π энергий:

$$E = T + \Pi, \quad T = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}\left(\frac{\alpha^2}{R} + v^2\right)d\tau \quad (d\tau \equiv r\,dr\,d\mu), \tag{1.9}$$

$$\Pi \equiv \int\limits_{\tau} \beta^2 U d\tau, \quad U = U(r) \equiv \int\limits_0^r g(\xi)\,d\xi.$$

В терминах исходных компонент скорости u, v, w величина E представляет собой взятую на одном периоде (1.2) кинетическую энергию. Другой интеграл (1.4)—(1.7) определяется через произвольную функцию $\Phi(\beta)$:

$$I = \int\limits_{\tau} \Phi(\beta)\,d\tau = \mathrm{const}. \tag{1.10}$$

2. Аналоги состояний гидростатического равновесия. Задача (1.4)—(1.7) имеет точные решения — «состояния покоя»:

$$\alpha = v = 0, \quad \beta = \beta_0(r), \tag{2.1}$$

содержащие одну произвольную функцию $\beta_0(r)$. В терминах истинных компонент скорости u, v, w решение (2.1) соответствует течению

$$u = u_0(r), \ v = 0, \ w = w_0(r); \ au_0 = brw_0, \tag{2.2}$$

задающемуся одной произвольной функцией $u_0(r)$ или $w_0(r)$. Для вращательно-симметричных движений ($a = 0$) эквивалентами гидростатических состояний будут течения с круговыми линиями тока

$$u = u_0(r), \ v = w = 0, \tag{2.3}$$

где функция $u_0(r)$ на интервале (1.8) задается произвольно.

Пусть теперь

$$\alpha = \alpha(r, \mu, t), \ v = v(r, \mu, t), \ \beta = \beta(r, \mu, t) \tag{2.4}$$

есть точное нестационарное решение (1.4)—(1.7), рассматриваемое как возмущение «состояния покоя» (2.1). Справедливо

Утверждение 1. Пусть во всей области τ течения (2.1) выполнено неравенство

$$0 \leqslant c^- \leqslant g/(\beta_0^2)_r \leqslant c^+ < \infty \tag{2.5}$$

с постоянными c^- и c^+. Тогда возмущения α, v, $\sigma = \beta^2 - \beta_0^2$ течения (2.1) оцениваются через свои начальные значения α_*, v_*, σ_* следующим образом:

$$\int\limits_{\tau}\left(\frac{\alpha^2}{R} + v^2 + c^-\sigma^2\right)d\tau \leqslant \int\limits_{\tau}\left(\frac{\alpha_*^2}{R} + v_*^2 + c^+\sigma_*^2\right)d\tau. \tag{2.6}$$

Доказательство. Принимаются обозначения $\rho = \beta^2$, $\rho_0 = \beta_0^2$. Из (1.9), (1.10) составляется сохраняющийся функционал

$$F(\alpha, v, \rho) = \int\limits_\tau \left[\frac{\alpha^2}{R} + v^2 + \rho U + \Phi(\rho) \right] d\tau,$$

который представляется в виде трех слагаемых:

$$F(\alpha,\ v,\ \rho) \equiv F(0,\ 0,\ \rho_0) + F_1 + F_2,$$

$$F_1 = \int\limits_\tau \sigma [\varphi(\rho_0) + \Phi'(\rho_0)]\, d\tau,$$

$$F_2 \equiv \int\limits_\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{R} + v^2 \right) + \Phi(\rho_0 + \sigma) - \Phi(\rho_0) - \Phi'(\rho_0)\sigma \right] d\tau.$$

Штрих сверху обозначает производную по аргументу. В F_1 функция $U(r)$ заменена на $U = \varphi(\rho_0)$, полученную исключением r из $U = U(r)$ (1.9) и $\rho = \rho_0(r)$ (2.1). В силу (2.5) функция $\varphi(\rho_0)$ монотонная. Пользуясь произвольностью $\Phi(\rho)$, полагаем $\Phi'(\rho_0) \equiv -\varphi(\rho_0)$, после чего оказывается, что $F_1 \equiv 0$, а функционал F_2 не зависит от времени.

Далее, поскольку

$$\varphi'(\rho_0) = \frac{dU}{dr} \Big/ \frac{d\rho_0}{dr} = -g/(\beta_0^2)_r,$$

то (2.5) равносильно неравенству

$$c^- \leqslant \Phi'' \leqslant c^+, \tag{2.7}$$

выполняющемуся на промежутке изменения ρ_0 в области τ. Пусть функция $\Phi(\rho)$ доопределена для всех остальных значений ρ с сохранением свойства (2.7). Тогда для любых чисел h и l с помощью интегрирования (2.7) можно получить

$$(1/2)c^- l^2 \leqslant \Phi(h + l) - \Phi(h) - \Phi'(h)l \leqslant (1/2)c^+ l^2. \tag{2.8}$$

Теперь из (2.8) и сохранения F_2 вытекает (2.6).

При наличии вращательной симметрии движений ($a = 0$) оценка (2.6) для возмущения течения (2.3), (1.8) редуцируется к форме

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} (v^2 + w^2 + c^-\sigma^2)\, r dr \leqslant \int\limits_{R_1}^{R_2} (v_*^2 + w_*^2 + c^+\sigma_*^2)\, r dr, \tag{2.9}$$

где $\sigma \equiv r^2 (u^2 - u_0^2)$; условие (2.5) дает

$$c^- \leqslant [r^3 (r^2 u_0^2)_r]^{-1} \leqslant c^+. \tag{2.10}$$

Конечная постоянная c^+ существует только при $R_1 > 0$. При $R_1 = 0$ формулировка оценки для практически интересных $u_0(r)$ должна быть изменена.

Несколько более точные, чем (2.6), оценки возмущений могут быть получены в следующих двух случаях.

Утверждение 2. Если во всей области τ течения (2.1) выполнено

$$0 \leqslant g/(\beta_0^2)_r = \mathrm{const} < \infty, \tag{2.11}$$

то для любых возмущений (2.4) не зависит от времени интеграл

$$\int\limits_\tau \left\{ \frac{\alpha^2}{R} + v^2 + [g/(\beta_0^2)_r]\, \sigma^2 \right\} d\tau = \mathrm{const}. \tag{2.12}$$

Доказательство вытекает из совпадения при условии (2.11) функционала (2.12) с F_2.

Для бесконечно малых по амплитуде возмущений прямыми вычислениями можно проверить

Утверждение 3. Если во всей области τ течения (2.1) выполнено

$$(2.13)\qquad 0 \leqslant g/(\beta_0^2)_r < \infty,$$

то имеет место независимость от времени интеграла (2.12), где α, v и σ соответствуют решению линеаризованной на (2.1) задачи (1.4)—(1.7).

Наличие оценок сверху произвольного возмущения через свои начальные данные (2.6), (2.9), (2.12) означает устойчивость в среднеквадратическом решений (2.1)—(2.3) в смысле определения Ляпунова [5, 6].

Оценка (2.9), (2.10) представляет собой нелинейный вариант широко известного в линейной теории устойчивости критерия Рэлея [1,7], гарантирующего устойчивость вращательно-симметричного течения (2.3) относительно вращательно-симметричных же возмущений при условии нарастания квадрата циркуляции $r^2u_0^2$ с увеличением радиуса r. Утверждения 1 и 2 дают нелинейные аналоги критерия Рэлея для течений (2.2) более сложной (винтовой) геометрии.

3. Аналоги плоских движений однородной жидкости. В силу уравнения $D\beta = 0$ решения системы (1.4) с $\beta = \mathrm{const}$ составляют самостоятельный класс. Задание начальных данных в этом классе гарантирует принадлежность решения ему же. При этом порядок системы уравнений (1.4) по времени уменьшается на единицу, она становится системой первого порядка. После замены двух первых уравнений (1.4) на следствие из (1.5) получается система

$$(3.1)\qquad D\lambda = 0,\ \lambda \equiv \omega + 2ab\beta/R,\ v_r + v/r + \alpha_\mu/r = 0,$$

сводящаяся после введения функции тока ψ ($rv = -\psi_\mu$, $\alpha = \psi_r$) к одному уравнению на ψ. Граничное условие (1.7) сводится к $\psi = \mathrm{const}$ на (1.6), причем значения постоянных могут быть различными на каждом из компонентов границы.

Интеграл I (1.10) для рассматриваемого класса движений бессодержателен. В то же время здесь имеется другой интеграл, справедливый только для движений с $\beta = \mathrm{const}$ и определяемый через произвольную функцию $\Phi(\lambda)$:

$$(3.2)\qquad J = \int \Phi(\lambda)\, d\tau = \mathrm{const}.$$

В частном случае $\Phi(\lambda) \equiv \lambda$ преобразование интеграла J к поверхностному по $\partial\tau$ дает аналог сохранения циркуляции скорости по границе течения:

$$(3.3)\qquad \Gamma[\psi] = \oint\limits_{\partial\tau} \left(\frac{\psi_r}{R}\, r d\mu - \frac{\psi_\mu}{r}\, dr\right) = \mathrm{const}.$$

Непосредственно из уравнений движения (1.4) следует, что если граница $\partial\tau$ состоит из двух замкнутых компонентов (область τ двусвязна), то величина интеграла (3.3) сохраняется отдельно для каждого из них.

Пусть задано некоторое стационарное решение (3.1), (1.7):

$$(3.4)\qquad \psi = \psi_0(r,\ \mu),\ \beta = \beta_0 = \mathrm{const},\ \lambda = \lambda_0(r,\ \mu,\ \beta_0).$$

Из уравнения $D\lambda = 0$ вытекает существование функциональной зависимости $\psi_0 = \Psi(\lambda_0)$. Далее, пусть $\psi(r, \mu, t) = \psi_0 + \varphi(r, \mu, t)$, $\lambda(r, \mu, t) = \lambda_0 + \varkappa(r, \mu, t)$ есть некоторое нестационарное решение (3.1), (1.7), рассматриваемое как возмущение течения (3.4). При $t = 0$ на каждом из компонентов границы $\partial\tau$ полагается выполненным $\Gamma[\varphi] = 0$, тогда в силу (3.3) на них $\Gamma[\varphi] = 0$ в любой момент времени. Справедливо

Утверждение 4. Пусть во всей области τ течения (3.4) выполнено неравенство

$$(3.5)\qquad 0 \leqslant c^- \leqslant d\Psi/d\lambda_0 \leqslant c^+ < \infty$$

с постоянными c^- и c^+. Тогда возмущения φ, $\varkappa$ оцениваются через свои начальные значения φ_*, $\varkappa_*$ следующим образом:

$$(3.6)\qquad \int\limits_{\tau}\left(\frac{\varphi_r^2}{R}+\frac{\varphi_\mu^2}{r^2}+c^-\varkappa^2\right)d\tau\leqslant\int\limits_{\tau}\left(\frac{\varphi_{*r}^2}{R}+\frac{\varphi_{*\mu}^2}{r^2}+c^+\varkappa_*^2\right)d\tau.$$

Доказательство с небольшими изменениями повторяет проведенное для утверждения 1 и здесь не приводится. Достаточно указать, что используются интегралы E (1.9) и J (3.2).

Наложенное на поля возмущений условие $\Gamma[\varphi]=0$ не является физически ограничительным, поскольку изменение Γ равносильно переходу от (3.4) к другому близкому стационарному решению, устойчивость которого и будет при этом изучаться.

Полученный результат может быть существенно усилен в важных случаях вращательно-симметричных решений (3.4) и круговой геометрии границ (1.8). В терминах исходных компонент скорости u, v, w такие течения задаются двумя связанными между собой функциями от r:

$$(3.7)\qquad u=u_0(r),\ v=0,\ w=w_0(r);\ bru_0+aw_0=\beta_0.$$

Такие течения и условия непротекания на границах (1.8) инвариантны относительно сдвига вдоль оси симметрии (оси z). Это позволяет рассмотреть задачу устойчивости в любой системе координат, движущейся относительно исходной системы вдоль оси z с постоянной скоростью M. В результате получается то же самое утверждение 4, в котором неравенство (3.5) принимает более конкретизированную форму

$$(3.8)\qquad c^-\leqslant\frac{d\Psi}{d\lambda_0}=\frac{d\psi_0}{dr}\Big/\frac{d\lambda_0}{dr}=\frac{\alpha_0+brM}{A}\leqslant c^+,$$

где $\alpha_0=au_0-brw_0$. Величина $A=d\lambda_0/dr$ не зависит от M и задается любым из трех выражений

$$(3.9)\qquad A=\left[\frac{1}{r}\left(\frac{r\alpha_0}{R}\right)_r+\frac{2ab\beta_0}{R^2}\right]_r=\left[\frac{(ru_0)_r}{ar}\right]_r=-\left(\frac{w_{0r}}{br}\right)_r.$$

Тут можно добавить еще, что то же самое неравенство (3.8) получается посредством перехода не в движущуюся поступательно, а в равномерно вращающуюся вокруг оси z систему координат. Таким образом, имеет место

Утверждение 5. Если существует постоянная M такая, что на всем интервале (1.8) выполнено (3.8), то течение (3.7) устойчиво в смысле наличия оценки (3.6).

Это условие устойчивости, в частности, содержит более узкое

Утверждение 6. Если непрерывная функция $A(r)$ (3.9) не имеет внутри интервала (1.8) нулевых значений, то течение (3.7) устойчиво.

Возможность выбора при $A\neq0$ подходящего значения постоянной M для течения между цилиндрами очевидна. Для течения в трубе (в (1.8) $R_1=0$) в качестве пояснения достаточно заметить, что при отсутствии особенностей в распределении завихренности для $r\to0$ всегда $\alpha_0(r)\sim\sim r^n$ с постоянной $n\geqslant1$.

Утверждения 3—6 — обобщение на новые классы движений (1.1) и на возмущения конечной амплитуды широко известного в линейной теории устойчивости результата Рэлея [1] об устойчивости плоскопараллельного течения при отсутствии точки перегиба в профиле скорости. В частном случае ($b=0$) движения из класса (1.1) плоские и утверждения 3—6 дают известные ранее результаты Рэлея [1], Фьортофта [7] и Арнольда [2, 8]. При $a=0$ (для задачи устойчивости осесимметричного потока в круглой трубе) линейный вариант утверждения 6 также получен Рэлеем [9]).

4. Вращающиеся течения с трансляционной симметрией. Рассматриваются движения однородной по плотности жидкости во вращающейся с постоянной скоростью $\Omega/2$ системе координат. Уравнения движения записываются как [6]

$$(4.1)\qquad D\mathbf{u}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}=-\nabla p^*,\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0,\ D=\partial/\partial t+\mathbf{u}\cdot\nabla.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор скорости; p^* — модифицированное давление, включающее в себя «центробежную» добавку.

Пусть $\mathbf{k}$ — единичный вектор, задающий фиксированное (во вращающейся системе) направление и составляющий с вектором $\boldsymbol{\Omega}$ угол $\theta (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Изучается класс решений уравнений (4.1), в которых $\mathbf{u}$ и p^* не изменяются вдоль направления $\mathbf{k}$. Вводится система декартовых координат x, y, z так, что ось z параллельна вектору $\mathbf{k}$, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ лежит в плоскости x, z. Для рассматриваемых движений поля скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и давления p^* не зависят от координаты z:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t), \ p^* = p^*(x, y, t). \tag{4.2}$$

После введения обозначений [3]

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, 0, \Omega_3), \ \rho = w - \Omega_1 y, \ \mathbf{g} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} = (0, g, 0), \ g \equiv \Omega_1 \tag{4.3}$$

система уравнений (4.1) для движений (4.2) может быть преобразована к форме

$$Du = -p_x, \ Dv = -p_y + \rho g, \quad D\rho = 0, \ u_x + v_y = 0, \ D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.4}$$

где $p = p^* - \Omega_3 \psi + \frac{1}{2} \Omega_1^2 y^2$; ψ — функция тока, для которой $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$.

Если движение (4.2) происходит в фиксированной области, то ее граница должна иметь форму цилиндрической поверхности с образующей параллельной оси z, т. е. задаваться выражением

$$f(x, y) = 0. \tag{4.5}$$

На плоскости x, y кривая (4.5) ограничивает область течения τ, которая может и не быть односвязной. Ее граница $\partial\tau$ (4.5) либо замкнута, либо уходит в бесконечность. Граничные условия непротекания на (4.5) дают

$$uf_x + vf_y = 0. \tag{4.6}$$

Замечательный факт состоит в совпадении (4.4)—(4.6) с уравнениями и соответствующими граничными условиями для плоских движений неоднородной по плотности (стратифицированной) жидкости в приближении Буссинеска [10]. Поэтому все результаты, справедливые для плоских движений стратифицированной жидкости, имеют место и для вращающихся течений с трансляционной симметрией. В частности, интеграл кинетической энергии E для (4.1), (4.6) в терминах (4.3), (4.4) записывается в виде суммы фиктивных «кинетической» T и «потенциальной» Π энергий:

$$E = T + \Pi = \mathrm{const}, \quad T = \frac{1}{2} \int_\tau (u^2 + v^2)\, d\tau, \quad \Pi = \int_\tau \rho U d\tau \quad (d\tau = dxdy), \tag{4.7}$$

где U — потенциал, введенный согласно $\mathbf{g} = -\nabla U$. Другой интеграл (4.4), (4.6)

$$I = \int_\tau \Phi(\rho)\, d\tau \tag{4.8}$$

с произвольной функцией $\Phi(\rho)$ (ср. с (1.9), (1.10)).

Аналоги состояний гидростатического равновесия в классе (4.2)— точные решения (4.4) вида

$$u = v = 0, \ \rho = \rho_0(y). \tag{4.9}$$

В исходных терминах (4.1) представление (4.9) задает сдвиговое течение одного направления (плоскопараллельное течение):

$$(4.10)\qquad u = v = 0,\ w = w_0(y).$$

Функции $\rho_0(y)$ и $w_0(y)$ в (4.9), (4.10) произвольны.

Пусть теперь

$$u = u(x,\ y,\ t),\ v = v(x,\ y,\ t),\ \rho = \rho_0(y) + \sigma(x,\ y,\ t)$$

есть некоторое точное нестационарное решение (4.4)—(4.6), рассматриваемое как возмущение «состояния покоя» (4.9). Справедливо

Утверждение 7. Пусть во всей области τ выполнено неравенство

$$0 \leqslant c^- \leqslant g/\rho_{0y} \leqslant c^+ < \infty$$

с постоянными c^- и c^+. Тогда возмущения u, v, σ течения (4.9), (4.10) оцениваются через свои начальные значения следующим образом:

$$\int\limits_\tau (u^2 + v^2 + c^-\sigma^2)\,d\tau \leqslant \int\limits_\tau \left(u_*^2 + v_*^2 + c^+\sigma_*^2\right)d\tau.$$

Доказательство основано на наличии интегралов E (4.7) и I (4.8), оно почти буквально повторяет доказательство утверждения 1 и приводиться не будет.

Для интересного случая линейных функций $w_0(y)$ или $\rho_0(y)$ (профиль Куэтта в щели между плоскостями) имеет место аналог утверждения 2.

Утверждение 8. Пусть во всей области τ выполнено $0 \leqslant \leqslant g/\rho_{0y} = \mathrm{const} < \infty$, тогда для задачи (4.4)—(4.6) имеет место устойчивость решения (4.9), (4.10) в смысле независимости от времени интеграла

$$\int\limits_\tau [u^2 + v^2 + (g/\rho_{0y})\,\sigma^2]\,d\tau = \mathrm{const}.$$

Для задачи (4.4)—(4.6) существует также класс движений с $\rho = \mathrm{const}$ (ср. с п. 3), сводящийся к плоским движениям однородной жидкости с $\Omega = 0$. Такие движения — частный случай исследовавшихся в п. 3 (при $b = 0$), они же рассматривались ранее в [2, 8]. По этой причине их отдельное изучение здесь излишне.

5. Общие замечания. В заключение уместно остановиться на нескольких моментах, важных для общего понимания затронутых вопросов.

1. С математической точки зрения все полученные утверждения имеют характер априорных оценок, поскольку соответствующие теоремы существования решений не доказаны.

2. Доказательства утверждений 1 и 4 проведены методом «связки» интегралов [5, 6] в форме [2, 7, 8].

3. Поясняя связь утверждений 1 и 4 с вариационными принципами, достаточно заметить, что обращение в нуль функционала F_1 при доказательстве утверждения 1 эквивалентно наличию абсолютного экстремума F на течении (2.1), (2.2). Аналогично функционал $E + J$ (1.9), (3.2) имеет абсолютный экстремум на любом течении (3.4). Наложенные условия (2.5), (3.5) гарантируют, что оба этих экстремума — минимумы. Термин «абсолютный экстремум» употреблен здесь в том смысле, что в классе движений с заданной симметрией никаких дополнительных ограничений на вариации гидродинамических полей не накладывается.

4. С точки зрения обсуждавшегося в п. 1, 4 сходства (1.1), (4.2) с движениями стратифицированной жидкости утверждения 1—3 и 7 — аналоги известной в аналитической механике теоремы Лагранжа [5, 6] об устойчивости состояния покоя механической системы при наличии в нем изолированного минимума потенциальной энергии. Можно проверить, что, например, при условиях (2.5), (2.10), (2.11), (2.13) фиктивная потенциальная энергия Π (1.9) имеет изолированный минимум на вариациях «плотности» β, подчиняющихся условию $I = \mathrm{const}$ (1.10).

5. Полученные оценки, свидетельствующие об устойчивости в среднеквадратическом, могут для некоторых целей оказаться неудовлетворительными. Действительно, если измерять отклонения решений не средними,

максимальными значениями возмущений, то, как заметил еще А. М. Ляпунов, сохранение энергии оказывается недостаточным для доказательства утверждений об устойчивости. Для получения соответствующих оценок необходимо вводить дополнительные ограничения на решения, задача обоснования этих ограничений остается открытой [6].

6. Все изложенные здесь утверждения об устойчивости условны в том смысле, что устойчивость гарантируется только в специальных классах возмущений, обладающих той же симметрией, что и основные течения. Естественно, что доказательства устойчивости в таких классах имеют ограниченную физическую значимость. Однако трудности исследования точных нелинейных задач гидродинамики столь велики, что уже информация о свойствах частных классов движений, по мнению автора, представляет несомненный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Линь Ц. Ц.** Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
2. **Арнольд В. И.** Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости.— Изв. вузов. Математика, 1966, № 5.
3. **Владимиров В. А.** О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения.— ПМТФ, 1985, № 3.
4. **Калинин Э. К., Дрейцер Г. А., Ярхо С. А.** Интенсификация теплообмена в каналах.— М.: Машиностроение, 1981.
5. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения.— М.: ГИТТЛ, 1955.
6. **Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.— М.: Наука, 1965.
7. **Fjortoft R.** Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex.— Geophys. Publ., 1950, v. 17, N 6.
8. **Арнольд В. И.** Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости.— ДАН СССР, 1965, т. 162, № 5.
9. **Drazin P. G., Howard L. N.** Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— Adv. appl. mech., 1966, v. 9.
10. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.

Поступила 7/V 1985 г.

УДК 532.529 + 539,214

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЭРОЗИИ В ПОТОКЕ ГАЗА С ЧАСТИЦАМИ

А. П. Трунев, В. М. Фомин

(*Новосибирск*)

Известно, что при эрозии пластических материалов в потоке твердых частиц при малых углах соударения на поверхности образца формируются волны, гребни которых располагаются перпендикулярно к направлению движения частиц [1—4]. Относительно природы этого явления существуют различные точки зрения. В [2] высказана гипотеза, что волны на поверхности материала обусловлены пластической деформацией под действием касательных нагрузок в высокоскоростном двухфазном потоке. В [3] показано, что максимальный коэффициент эрозии возрастает или уменьшается в зависимости от знака локальной кривизны поверхности. Отсюда сделан вывод, что эродируемая поверхность неустойчива относительно малых возмущений скорости эрозии и это — причина образования волны конечной амплитуды. В [4] установлена взаимосвязь волнообразования с поведением материала при эрозии (хрупкий или пластический износ). Оказалось, что некоторые хрупкие материалы при высокой скорости нагружения испытывают переход к пластичности, что приводит к изменению зависимости скорости эрозии от угла соударения и к возникновению микроскопической ряби на поверхности образца. Отметим также, что эффект волнообразования наблюдается и в отсутствие газовой фазы, т. е. микроскопические волны обусловлены только взаимодействием потока твердых частиц с пластической преградой [1].

При анализе устойчивости процесса эрозии сверхзвуковых сопел в двухфазном потоке в [5] получено уравнение, описывающее развитие длинноволновых возмущений в системе:

$$\partial y_w/\partial t = -D\left|\frac{\partial^2 y_w}{\partial x^2}\right|^q \frac{\partial^2 y_w}{\partial x^2}. \qquad (0.1)$$