

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ЖЕСТКИХ ЗОН В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Е. М. Емельянов, А. Д. Чернышов

(Воронеж)

В работе получены условия на границе жесткой зоны в вязкопластической среде в конечной форме. В [1] приведено аналогичное условие в интегральной форме. Далее рассмотрена задача о стационарном течении в плоском канале среды Бингама — Шведова [2]. На нижнюю неподвижную плоскость канала наложены малые ортогональные гармонические возмущения, верхняя невозмущенная плоскость движется с постоянной скоростью под произвольным углом к возмущениям. На границах предполагается прилипание среды. Задача решена методом малого параметра. С помощью двух приближений найдено критическое условие, при котором в углублениях впервые образуются жесткие зоны. При течении вдоль возмущений в решении задачи возникают особенности. Эти случаи рассмотрены отдельно. Ранее задача о нахождении критерия начала образования жесткой зоны в вязкопластической среде была рассмотрена в [3].

1. Условие на поверхности жестких зон. Теорема. Чтобы поверхность  $v = 0$  была границей жесткой области течения вязкопластического материала ( $v$  — вектор скорости частиц среды), необходимо и достаточно, чтобы на этой поверхности выполнялось условие

$$(1.1) \quad \partial |v| / \partial n = 0$$

где  $n$  — нормальная координата, отсчитываемая от поверхности жесткой области  $\Sigma$ .

Условие необходимости теоремы можно доказать, используя равенства

$$(1.2) \quad v|_{\Sigma} = 0, \quad \epsilon_{ij}|_{\Sigma} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i})_{\Sigma} = 0$$

Достаточность. Пусть на  $\Sigma$  выполняются следующие условия теоремы:  $v|_{\Sigma} = 0, \partial |v| / \partial n|_{\Sigma} = 0$ . Требуется доказать, что  $\epsilon_{ij}|_{\Sigma} = 0$ . Разложим функции  $v$  и  $\partial v / \partial n$  в окрестности поверхности  $\Sigma$  в ряд

$$(1.3) \quad v = \partial v / \partial n|_{\Sigma} n + \dots, \quad \partial v / \partial n = \partial v / \partial n|_{\Sigma} + \dots$$

$$(1.4) \quad v \cdot \partial v / \partial n = (\partial v / \partial n|_{\Sigma})^2 n + \dots$$

Для модуля скорости эти выражения запишутся в виде

$$(1.5) \quad |v| = \partial |v| / \partial n|_{\Sigma} n + \dots, \quad \partial |v| / \partial n = \partial |v| / \partial n|_{\Sigma} + \dots$$

$$(1.6) \quad |v| \partial |v| / \partial n = (\partial |v| / \partial n|_{\Sigma})^2 n + \dots$$

Так как левые части выражений (1.4) и (1.6) равны между собой, то равны и их правые части, т. е.

$$(1.7) \quad (\partial |v| / \partial n|_{\Sigma})^2 n + \dots = (\partial v / \partial n|_{\Sigma})^2 n + \dots$$

Отсюда следует, что  $\partial v / \partial n|_{\Sigma} = 0$  совместно с  $v = 0$ , а значит  $\epsilon_{ij}|_{\Sigma} = 0$ , что и требовалось доказать.

2. Установившееся течение вязкопластической среды в плоском канале. Нижняя плоскость канала ( $y = 0$ ) неподвижна и на нее наложено

малое ортогональное возмущение

$$(2.1) \quad y = h (\delta_1 \cos m_1 x + \delta_2 \cos m_2 z)$$

где  $h$  — ширина канала,  $\delta_1, \delta_2 \ll 1$ . Верхняя плоскость ( $y = h$ ) движется параллельно плоскости  $xz$  под углом  $\alpha$  к оси  $z$  с постоянной скоростью  $v_*$ .

Соотношение между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и тензора скоростей деформации  $\varepsilon_{ij}$  при условии пластичности Мизеса зададим в виде [4]

$$(2.2) \quad \sigma_{ij} = (\sqrt{2} k / \sqrt{\varepsilon_{ql}\varepsilon_{ql}} + 2\eta) \varepsilon_{ij} + P \delta_{ij}, \quad \sigma_{qq} = 3P$$

где  $k$  — предел текучести,  $\eta$  — коэффициент вязкости.

Компоненты тензора скоростей деформации связаны со скоростью течения соотношением

$$(2.3) \quad \varepsilon_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i})$$

Перейдем к безразмерным величинам, которыми будем пользоваться в дальнейшем

$$x = x'h, \quad y = y'h, \quad z = z'h, \quad m_{1(2)} = m_{1(2)}'h^{-1}, \quad v_i = v_i'v_*, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}'k, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}'hv_*^{-1}$$

Запишем уравнение равновесия и условие несжимаемости среды

$$(2.4) \quad \sigma_{,j}^{ij} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$(2.5) \quad v_x = v_y = v_z = 0 \text{ при } y = \delta_1 \cos m_1 x + \delta_2 \cos m_2 z \\ v_x = \sin \alpha, \quad v_y = 0, \quad v_z = \cos \alpha \text{ при } y = 1$$

Скорость частиц среды и среднее давление будем искать в виде

$$(2.6) \quad f(x, y, z; \delta_1, \delta_2) = f_{(y)}^{(0)} + \delta_1 f'(x, y) + \delta_2 f''(y, z) + \dots$$

С учетом граничных условий (2.5) нулевым приближением является решение задачи Куэтта в плоском канале

$$(2.7) \quad v_x^{(0)} = y \sin \alpha, \quad v_y^{(0)} = 0, \quad v_z^{(0)} = y \cos \alpha, \quad P^{(0)} = 0$$

Подстановка разложения (2.6) последовательно в (2.3), (2.2) и (2.4) с учетом (2.7) приводит к следующей системе уравнений:

$$(2.8) \quad L(2v'_{x,xx} + v'_{x,yy} + v'_{y,xy}) - \sin^2 \alpha (v'_{x,yy} + v'_{y,xy}) - \\ - \sin \alpha \cos \alpha v'_{z,yy} + P'_{,x} = 0$$

$$L(v'_{y,xx} + 2v'_{y,yy} + v'_{x,xy}) - \sin^2 \alpha (v'_{y,xx} + v'_{x,xy}) - \sin \alpha \cos \alpha v'_{z,xy} + P'_{,y} = 0 \\ L(v'_{z,xx} + v'_{z,yy}) - \cos^2 \alpha v'_{z,yy} - \sin \alpha \cos \alpha (v'_{x,yy} + v'_{y,xy}) = 0 \\ v'_{x,x} + v'_{y,y} = 0$$

$$(2.9) \quad L(v''_{x,yy} + v''_{x,zz}) - \sin^2 \alpha v''_{x,yy} - \sin \alpha \cos \alpha (v''_{y,yz} + v''_{z,yy}) = 0$$

$$L(2v''_{y,yy} + v''_{y,zz} + v''_{z,yz}) - \cos^2 \alpha (v''_{y,zz} + v''_{z,yz}) - \sin \alpha \cos \alpha v''_{x,yz} + P''_{,y} = 0$$

$$L(v''_{z,yy} + 2v''_{z,zz} + v''_{y,yz}) - \cos^2 \alpha (v''_{z,yy} + v''_{y,yz}) - \sin \alpha \cos \alpha v''_{x,yy} + P''_{,z} = 0 \\ v''_{y,y} + v''_{z,z} = 0$$

$$L = 1 + a^{-2}, \quad a^2 = kh / \eta v_*$$

Граничные условия для системы (2.8), (2.9) получим, разлагая в ряд по степеням  $\delta_1, \delta_2$  условия (2.5)

$$(2.10) \quad v_x' = -\sin \alpha \cos m_1 x, v_y' = 0, v_z' = -\cos \alpha \cos m_1 x \text{ при } y = 0$$

$$v_x' = v_y' = v_z' = 0 \text{ при } y = 1$$

$$(2.11) \quad v_x'' = -\sin \alpha \cos m_2 z, v_y'' = 0, v_z'' = -\cos \alpha \cos m_2 z \text{ при } y = 0$$

$$v_x'' = v_y'' = v_z'' = 0 \text{ при } y = 1$$

Для решения системы уравнений (2.8) с граничными условиями (1.10) неизвестные функции будем искать в виде

$$(2.12) \quad v_x' = A_1(y) \cos m_1 x, v_y' = B_1(y) \sin m_1 x$$

$$v_z' = C_1(y) \cos m_1 x, P' = D_1(y) \sin m_1 x$$

Подставим (2.12) в (2.8), (2.10). После преобразований получим

$$(2.13) \quad A_1 = m_1^{-1} p B_1, [m_1^{-1} (L - \sin^2 \alpha) p^3 - m_1 (L + \sin^2 \alpha) p] B_1 - \\ - \sin \alpha \cos \alpha p^2 C_1 + m_1 D_1 = 0, [(L + \sin^2 \alpha) p^2 - m_1^2 (L - \\ - \sin^2 \alpha)] B_1 + m_1 \sin \alpha \cos \alpha p C_1 + p D_1 = 0, \sin \alpha \cos \alpha \times \\ \times (m_1^{-1} p^3 + m_1 p) B_1 + [m_1^2 L - (L - \cos^2 \alpha) p] C_1 = 0$$

где введено символическое обозначение  $p = d / dy$ .

Граничные условия

$$(2.14) \quad A_1 = B_1 = C_1 = 0 \text{ при } y = 1$$

$$A_1 = -\sin \alpha, B_1 = 0, C_1 = -\cos \alpha \text{ при } y = 0$$

Характеристическое уравнение системы (2.13) имеет вид

$$(2.15) \quad (t - 1) \{t^2 - [2 + a^2 (1 + 3 \sin^2 \alpha)] t + 1 + a^2 (1 - \\ - \sin^2 \alpha)\} = 0, t = \lambda^2 m_1^{-2}$$

Корни его равны

$$(2.16) \quad t_1 = 1, t_{2,3} = 1/2 \{2 + a^2 (1 + 3 \sin^2 \alpha) \pm a [16 \sin^2 \alpha + \\ + a^2 (1 + 3 \sin^2 \alpha)^2]^{1/2}\}$$

Учитывая, что кратных корней нет и  $\lambda_1 = -\lambda_4, \lambda_2 = -\lambda_5, \lambda_3 = -\lambda_6$ , решение системы (2.13) ищем в виде

$$(2.17) \quad B_1(y) = \sum_1^3 [c_i \exp(\lambda_i y) + c_{i+3} \exp(-\lambda_i y)]$$

$$C_1(y) = \sum_1^3 [c_{2i} \exp(\lambda_i y) + c_{2i+3} \exp(-\lambda_i y)]$$

$$D_1(y) = \sum_1^3 [c_{3i} \exp(\lambda_i y) + c_{3i+3} \exp(-\lambda_i y)]$$

Подставив (2.17) в (2.13), находим

$$(2.18) \quad c_{2q} = a_q c_q, c_{3q} = b_q c_q \\ a_q = -\lambda_q (\lambda_q^2 + m_1^2) \sin \alpha \cos \alpha m_1^{-1} [\lambda_q^2 (L - \cos^2 \alpha) - m_1^2 L]^{-1} \\ b_q = \frac{\lambda_q L (\lambda_q^2 - m_1^2)}{m_1^2 \cos^2 \alpha} \frac{\lambda_q^2 (1 - L) + m_1^2 (L + \sin^2 \alpha)}{\lambda_q (L - \cos^2 \alpha) - m_1^2 L}$$

Тогда решение запишется в форме

$$(2.19) \quad A_1(y) = m_1^{-1} \sum_1^3 [c_i \lambda_i \exp(\lambda_i y) - c_{i+3} \lambda_i \exp(-\lambda_i y)]$$

$$\begin{aligned}
 B_1(y) &= \sum_1^3 [c_i \exp(\lambda_i y) + c_{i+3} \exp(-\lambda_i y)] \\
 C_1(y) &= \sum_1^3 [c_i a_i \exp(\lambda_i y) - c_{i+3} a_i \exp(-\lambda_i y)] \\
 D_1(y) &= \sum_1^3 [c_i b_i \exp(\lambda_i y) - c_{i+3} b_i \exp(-\lambda_i y)]
 \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $c_i$  найдем из граничных условий (2.14)

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad \sum_1^3 c_i &= 0, \quad m_1^{-1} \sum_1^3 (c_i \lambda_i - c_{i+3} \lambda_i) = -\sin \alpha \\
 \sum_1^3 (c_i a_i - c_{i+3} a_i) &= -\cos \alpha \\
 \sum_1^3 [c_i \exp(\lambda_i) + c_{i+3} \exp(-\lambda_i)] &= 0, \quad \sum_1^3 [c_i \lambda_i \exp(\lambda_i) - c_{i+3} \lambda_i \exp(-\lambda_i)] = 0 \\
 \sum_1^3 [c_i a_i \exp(\lambda_i) - c_{i+3} a_i \exp(-\lambda_i)] &= 0
 \end{aligned}$$

Решение системы (2.19) относительно  $c_1$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad A_1 &= m_1^{-1} \sum_1^3 \lambda_q G_q, \quad B_1 = \sum_1^3 F_q, \quad C_1 = \sum_1^3 a_q G_q, \quad D_1 = \sum_1^3 b_q G_q \\
 F_q &= b_q^1 \operatorname{sh}(\lambda_q y) + b_q^2 \operatorname{ch}(\lambda_q y) + b_q^3 \operatorname{sh}[\lambda_q(y-1)] + \\
 &+ b_q^4 \operatorname{ch}[\lambda_q(y-1)], \quad G_q = \lambda_q^{-1} p F_q \\
 (2.22) \quad b_q^1 &= 2\Delta_1^{-1} (M_{12}^{qq+3} \sin \alpha - M_{13}^{qq+3} \cos \alpha) \\
 b_q^2 &= 2\Delta_1^{-1} (a_q \sin \alpha - \lambda_q m_1^{-1} \cos \alpha) M_{23}^{qq+3} \\
 b_q^3 &= 2\Delta_1^{-1} (M_{21}^{qq+3} \sin \alpha - M_{34}^{qq+3} \cos \alpha) \\
 b_q^4 &= 2\Delta_1^{-1} [(\lambda_q M_{25}^{qq+3} - a_q M_{26}^{qq+3}) \sin \alpha - (\lambda_q M_{35}^{qq+3} - a_q M_{36}^{qq+3}) \cos \alpha]
 \end{aligned}$$

где (по  $q$  не суммировать)  $\Delta_1$  — определитель системы (2.20),  $M_{mn}^{qq+3}$  — миноры определителя  $\Delta_1$ , верхние индексы указывают на вычеркнутые столбцы, нижние — на вычеркнутые строки.

Сравнив системы (2.8) и (2.9) и граничные условия (2.10) и (2.11), видим, что решение краевой задачи (2.9), (2.11) можно выписать, используя решение задачи (2.8), (2.10) путем формальной замены в (2.12) — (2.22)  $m_1, \lambda_q, \operatorname{tg} \alpha, x, z$  на  $m_2, \mu_q, \operatorname{ctg} \alpha, z, x$  соответственно, а в других обозначениях добавлением штриха

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad v_x'' &= C_2(y) \cos m_2 z, \quad v_y'' = B_2(y) \sin m_2 z, \quad v_z'' = A_2(y) \cos m_2 z, \\
 P'' &= D_2(y) \sin m_2 z
 \end{aligned}$$

Функции  $A_2(y), B_2(y), C_2(y), D_2(y)$  выпишем из (2.24)

$$\begin{aligned}
 (2.24) \quad A_2 &= m_1^{-1} \sum_1^3 \mu_q G_q', \quad B_2 = \sum_1^3 F_q', \quad C_2 = \sum_1^3 a_q G_q', \quad D_2 = \sum_1^3 b_q' G_q' \\
 F_q' &= b_q^{1'} \operatorname{sh}(\mu_q y) + b_q^{2'} \operatorname{ch}(\mu_q y) + b_q^{3'} \operatorname{sh}[\mu_q(y-1)] + \\
 &+ b_q^{4'} \operatorname{ch}[\mu_q(y-1)], \quad G_q' = \mu_q^{-1} p F_q'
 \end{aligned}$$

При некотором соотношении параметров, характеризующих течение вязкопластической среды, в углублениях на возмущенной плоскости возможно образование жестких зон, подобно примеру, приведенному в [3]. Можно предположить, что зарождение жестких областей начнется в вершинах углублений нижней поверхности ( $y = -\delta_{1*} - \delta_{2*}$ ,  $\cos m_1 x = \cos m_2 z = -1$ ).

Формулируя условие (1.1) для этих точек, с точностью до малых первого порядка получим критическое соотношение между параметрами  $v_*$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $m_{1-2}$ ,  $\delta_{1*}$ ,  $\delta_{2*}$

$$(2.25) \quad 1 - [A_{1,y}(0) \sin \alpha + C_{1,y}(0) \cos \alpha] \delta_{1*} - [C_{2,y}(0) \sin \alpha + A_{2,y}(0) \cos \alpha] \delta_{2*} = 0$$

Если возмущение поверхности при одинаковых режимах течения будет больше критического  $\delta_1 + \delta_2 \geq \delta_{1*} + \delta_{2*}$ , то в углублениях образуются жесткие зоны, если  $\delta_1 + \delta_2 < \delta_{1*} + \delta_{2*}$ , то жесткие зоны в канале отсутствуют.

Для  $\alpha = \pi n / 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) полученное решение условиям задачи не удовлетворяет, так как в этих случаях характеристическое уравнение (2.15) содержит кратные или комплексные корни и решение задачи удается значительно упростить.

*Продольные возмущения*

$$y = \delta_1 \cos m_1 x, \quad \delta_2 = 0, \quad \cos \alpha = 1$$

Здесь отличной от нуля будет лишь скорость  $v_z$ .

Нулевое приближение

$$(2.26) \quad v_z^{(0)} = y$$

Для первого приближения  $v_z'$  остается одно уравнение из системы (2.8)

$$(2.27) \quad (1 + a^2) v_{z,xx}' + v_{z,yy}' = 0$$

Граничные условия для (2.27) находятся из (2.10) и имеют вид

$$(2.28) \quad v_z'(x, 1) = 0, \quad v_z'(x, 0) = -\cos m_1 x$$

Функцию скорости ищем в виде

$$(2.29) \quad v_z' = C_1(y) \cos m_1 x$$

Подставив (2.29) в (2.27), (2.28), приходим к уравнению

$$(2.30) \quad p^2 C_1 - m_1^2 (1 + a^2) C_1 = 0$$

с граничными условиями

$$(2.31) \quad C_1(1) = 0, \quad C_1(0) = -1$$

Решая задачу (2.30), (2.31) и учитывая (2.26), получим

$$(2.32) \quad v_z' = y + \delta_1 [\text{sh}(\lambda)]^{-1} \text{sh}[\lambda(y-1)] \cos m_1 x + o(\delta_1^2), \\ \lambda = m_1 (1 + a^2)^{1/2}$$

Критерий образования застойных зон в вершинах углублений ( $y = -\delta_{1*}$ ,  $\cos m_1 x = -1$ ) из условия (1.1) получается в виде

$$(2.33) \quad \delta_1 \geq \delta_{1*}, \quad \delta_{1*} = [\text{th}(\lambda)] / \lambda$$

*Поперечные возмущения*

$$y = \delta_2 \cos m_2 z, \quad \delta_1 = 0, \quad \cos \alpha = 1$$

В этом случае  $v_x = 0$ ,  $(v_z, v_y) \neq 0$ .

