# АКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПОЛОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ ИСТОЧНИКИ И СТОКИ

*Ю. И. Бабенко, О. М. Тодес*

*(Ленинград)*

В работе излагается метод, позволяющий получить время релаксации свободных акустических колебаний в полости произвольной геометрической формы, а также границу устойчивости непосредственно из рассмотрения краевой задачи. Случай, когда источники и стоки похожи на твердую стенку, изучался ранее в работе [1]. Здесь исследуется более общий случай. Источники и стоки предполагаются двух типов — похожие на стенки и на отверстия.

В работе [2] подобное рассмотрение сделано из энергетических соображений. Однако в конечном результате имеется ошибка — неверно учтена акустическая энергия, переносимая основным потоком (см. ниже). Подобная ошибка — следствие общих недостатков энергетического метода, требующего заранее знать все составляющие потока энергии.

Рассматриваются также вынужденные колебания.

1. **Свободные колебания**. Рассмотрим следующую математическую модель газового аппарата. Дана трехмерная область $(\Omega)$, заполненная газом, не обязательно односвязная. На поверхности области заданы распределенные источники газа. (В дальнейшем источники и стоки именуем одним термином — источник, считая что сток — отрицательный источник). Газ в полости находится в движении. Полагаем, что имеется стационарный режим, т. е. сумма производительностей источников равна нулю.

Уравнение, описывающее акустические колебания в газе, движущемся со скоростями, много меньшими скорости звука, имеет вид [3]

$$\Delta\Phi - \frac{2}{c^2}\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{dt^2} = 0 \tag{1.1}$$

Потенциал акустической скорости $\Phi$ определяется так, чтобы было

$$u = \nabla\Phi, \qquad p = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ — скорость основного потока, $c$ — скорость звука, $u$ и $p$ — скорость и давление в акустической волне, $\rho$ — плотность газа, заполняющего полость.

Граничное условие на поверхности $(S)$ задается в виде линейной связи акустической составляющей нормальной скорости потока газа и акустического давления

$$u_n = B(S)\,p \tag{1.3}$$

Здесь $n$ — внешняя нормаль к поверхности, $B(S)$ — величина, характеризующая акустические свойства источника, обычно именуемая акустической проводимостью поверхности. С учетом (1.2) условие (1.3) перепишется в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi\right)B(S) \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь задачу о колебаниях, описываемых выражениями (1.1) и (1.4). Полагая $\Phi = Ue^{i\omega t}$, получаем задачу для определения амплитуды акустического потенциала $U(r)$

$$\Delta U - \frac{2i\omega}{c^2}\mathbf{v}\cdot\nabla U + \frac{\omega^2}{c^2}U = 0 \quad (\Omega) \tag{1.5}$$

$$\partial U/\partial n = -(i\omega\rho U + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla U)B \qquad (S) \tag{1.6}$$

*Замечание.* Условие (1.6) описывает не только квазистационарные законы типа (1.3), но и нестационарные. Для малых колебаний нестационарность закона проявляется в сдвиге фаз между $u_n$ и $p$. При этом $B = B_r + iB_i$ — комплексная величина, зависящая от частоты. Для квазистационарного случая $B$ — вещественное число. Для источника $B < 0$, для стока $B > 0$, для идеально жесткой, не поглощающей стенки $B = 0$.

Будем рассматривать источники двух видов: I — источники с малой акустической проводимостью

$$\rho c B \ll 1 \tag{1.7}$$

т. е. похожие на «твердую стенку». Эти источники расположены на части поверхности, которую обозначим $(C)$; II — источники с малым импедансом

$$\rho c B \gg 1 \tag{1.8}$$

т. е. похожие на отверстия и расположенные на части поверхности $(O)$.

*Замечание.* Твердая стенка может трактоваться как источник типа I, для которого $v_n = 0$. Таким образом, вся поверхность полости состоит из двух частей ($S = C + O$).

Будем также полагать, что газ в полости движется с небольшими скоростями, так что

$$v \, / \, c \ll 1 \tag{1.9}$$

Считая, что выполняются неравенства (1.7) — (1.9), естественно искать решение задачи (1.5), (1.6) в виде суммы

$$U = U_0 + U_1, \quad \omega = \omega_0 + \omega_1 \tag{1.10}$$

При этом полагаем, что

$$U_1 \ll U_0, \qquad \omega_1 \ll \omega_0 \tag{1.11}$$

Здесь $U_0$, $\omega_0$ — решение задачи нулевого приближения

$$\Delta U_0 + \frac{\omega_0^2}{c^2} U_0 = 0 \quad (\Omega), \qquad \frac{\partial U_0}{\partial n} = 0 \quad (C), \qquad U_0 = 0 \quad (O) \tag{1.12}$$

Подставим (1.10) в (1.5), (1.6). Пренебрегая членами второго порядка малости, содержащими квадраты и произведения величин $U_1$, $\omega_1$, $v$, в области ($\Omega$) и на поверхности ($C$), а также квадратичными членами, содержащими $U_1 \, / \, B$ на поверхности ($O$), получаем задачу для определения $U_1$ и $\omega_1$

$$\Delta U_1 + \frac{\omega_0^2}{c^2} U_1 = \frac{2i\omega}{c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla U_0 - \frac{2\omega_0\omega_1}{c^2} U_0 \qquad (\Omega) \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = - i\omega_0 \rho B U_0 \qquad (C) \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial U_0}{\partial n} = - i\omega_0 \rho U_1 - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla U_0 \qquad (O) \tag{1.15}$$

В дальнейшем будем заниматься лишь определением $\omega_1$ — добавки к чисто акустической частоте $\omega_0$. Знак мнимой части $\omega_1$ даст возможность судить об устойчивости системы, а величина $\omega_1$ — о времени релаксации.

Оказывается, что $\omega_1$ можно получить из задачи (1.13) — (1.15) с помощью следующего приема. Рассмотрим интегральное тождество Грина для области ($\Omega$), примененное к функциям $U_0$ и $U_1$.

$$\iiint\limits_{\Omega} (U_0 \Delta U_1 - U_1 \Delta U_0) \, d\Omega = \iint\limits_{C+O} \left( U_0 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U_0}{\partial n} \right) dS \tag{1.16}$$

Подставим в (1.16) выражение $\Delta U_1$ из (1.13), выражение $\Delta U_0$ из (1.12), величину $\partial U_1 / \partial n$ на ($C$) из (1.14), $U_1$ на ($O$) из (1.15). Учтем также, что на поверхности ($C$) $\partial U_0 / \partial n = 0$, а на поверхности ($O$) $U_0 = 0$. Тогда из (1.16) получаем выражение для интересующей добавки $\omega_1$:

$$\omega_1 = \frac{i}{J} \left\{ 2 \iiint\limits_{\Omega} U_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla U_0) \, d\Omega + \iint\limits_{C} \rho c^2 B U_0^2 \, dS \right\} + \\ + \frac{i}{J} \frac{c^2}{\omega_0^2} \left\{ \iint\limits_{O} \left[ \frac{1}{\rho B} \left( \frac{\partial U_0}{\partial n} \right)^2 + (\mathbf{v} \cdot \nabla U_0) \frac{\partial U_0}{\partial n} \right] dS \right\} \tag{1.17}$$

$$J = 2 \iiint\limits_{\Omega} U_0^2 \, d\Omega$$

Преобразуем (1.17) к более удобному виду. Рассмотрим тождество

$$\operatorname{div} (\mathbf{v} U_0^2) = U_0^2 \operatorname{div} \mathbf{v} + 2 (\mathbf{v} \cdot \nabla U_0) \, U_0 \tag{1.18}$$

Полагая, что источники в объеме отсутствуют, а газ можно считать несжимаемым для $v \, / \, c \ll 1$, заключаем, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Тогда при помощи формулы Остроградского — Гаусса и (1.18) получаем

$$2 \iiint\limits_{\Omega} U_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla U_0) \, d\Omega = \iint\limits_{C+O} v_n U_0^2 \, dS \tag{1.19}$$

Далее, из того факта, что на поверхности $(O)$ функция $U_0 \equiv 0$, следует, что $\partial U_0 / \partial e_{1,2} = 0$ (здесь $e_{1,2}$ — орты, касательные к поверхности). Поэтому

$$\nabla U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial n}\mathbf{n} + \frac{\partial U_0}{\partial e_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial U_0}{\partial e_2}\mathbf{e}_2 = \frac{\partial U_0}{\partial n}\mathbf{n} \tag{1.20}$$

Учтя (1.19) и (1.20), получим из (1.17) основное выражение для исследования устойчивости системы

$$\omega_1 = \frac{ic}{J}\iint\limits_C \left(\rho c B + \frac{v_n}{c}\right) U_0^2\, dS + \frac{i}{J}\frac{c^3}{\omega_0^2}\iint\limits_O \left(\frac{1}{\rho c B} + \frac{v_n}{c}\right)\left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)^2 dS \tag{1.21}$$

Здесь умышленно не производится сокращения на $c$, чтобы выделить безразмерные величины $\rho c B$ и $v_n / c$.

В литературе имеются отдельные частные случаи формулы (1.21) для простейшей одномерной задачи и для цилиндрической при отсутствии потока.

Из (1.21) следует, что для исследования границы устойчивости нужно знать: 1) акустические свойства источников $(B)$; 2) значение нормальной составляющей скорости основного потока на границе области $(v_n)$; 3) акустическое поле в отсутствие источников и стоков $(U_0)$.

Если $Im\, \omega_1 > 0$, процесс устойчив, если $Im\, \omega_1 < 0$,—неустойчив. Полагая $Im\, \omega_1 = 0$, можно найти границу устойчивости системы.

Остановимся подробнее на физическом смысле выражения (1.21). Первое слагаемое описывает взаимодействие звуковых волн с источниками типа стенка. В знаменателе стоит выражение $J$, пропорциональное полной энергии звуковых колебаний в объеме. Числитель пропорционален потоку акустической энергии через поверхность $C$ за период. Поток этот состоит из двух слагаемых. Первое дает поток энергии, переносимый самими волнами, второе — основным потоком. То, что энергия может и поступать в полость и уноситься из нее при взаимодействии источников с акустическим полем, хорошо известный факт. Понятно также, что основной поток, выходящий из полости, уносит звуковую энергию. Но в выражении (1.21) заключен и не очевидный заранее факт — звуковая энергия может генерироваться основным потоком, входящим в пучность волны давления. (Так как в источниках $v_n < 0$, вклад соответствующих членов в $Im\, \omega_1$ отрицателен.) На общую возможность такой генерации впервые указал Рэлей [4].

Раушенбах показал такую возможность из энергетических соображений для одномерного случая [5]. Подчеркнем, что хотя генерация потоком выражается через поверхностный интеграл, она является объемным фактором, связанным не с граничными условиями, а с конвективным членом в волновом уравнении. Отметим также, что в некоторых специальных случаях поток не оказывает влияния на устойчивость системы в целом. Это имеет место, когда

$$\iint\limits_C v_n U_0^2\, dS = 0, \qquad \iint\limits_O v_n \left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)^2 dS = 0$$

Второе слагаемое в (1.21) описывает взаимодействие поля с источниками типа отверстие. Первый член в числителе дает поток энергии, переносимый через поверхность $O$ волнами, второй — основным потоком. Как уже говорилось ранее, в работе [2] упущен член $v_n / c\, (\partial U_0 / \partial n)^2$, описывающий генерацию звука потоком, входящим в пучность волны скорости и унос энергии потоком, выходящим из этой пучности. Отметим, что генерация, описываемая этим членом, связана с граничным условием (1.15), т. е. является поверхностным эффектом.

Предложенный формализм позволяет легко получить поправки к формуле (1.21), соответствующие различным дополнительным факторам, учитываемым в теории процесса, если они оказывают слабое влияние на акустику, что практически обычно имеет место. Легко может быть учтена неоднородность скорости звука, поглощение в объеме, объемные источники, и т. д. Например, если учесть поглощение посредством комплексной скорости звука $c = c_0 + i\sigma$ $(\sigma \ll c_0)$, то в конечном результате (1.21) появится поправка

$$\frac{i}{J}\frac{\omega_0}{c}\iiint\limits_\Omega \sigma U_0^2\, d\Omega \tag{1.22}$$

Видно, что поглощение всегда стабилизирует процесс (вклад в $Im\, \omega_1$ положителен).

Формула (1.21) автоматически учитывает и тот случай, когда акустическая проводимость поверхности зависит от угла падения волны $(\vartheta)$. При этом следует лишь формально заменить $B \to B\,(\vartheta)$.

Отметим, что для справедливости результатов предложенного формализма, как указал А. Д. Марголин, вообще говоря, не достаточно локальных неравенств (1.7) — (1.9). Должны быть выполнены также интегральные неравенства, полученные из конечной формулы (1.21). В самом деле, при выводе предполагалось, что $\omega_1 \ll \omega_0$. Это возможно, если (см. (1.21))

$$\frac{c}{J\omega_0}\iint\limits_{C}\left(\frac{v_n}{c}+\rho cB\right)U_0^2\,dS \ll 1 \qquad (1.23)$$

$$\frac{c^3}{J\omega_0^2}\iint\limits_{O}\left(\frac{v_n}{c}+\frac{c}{\rho cB}\right)\left(\frac{\partial U_0^2}{\partial n}\right)dS \ll 1 \qquad (1.24)$$

Например, для продольных колебаний в цилиндрической полости, у которой источники расположены на боковой поверхности, а сток на торцах, из оценки (1.23) получим неравенство

$$\left(\rho cB+\frac{v_n}{c}\right)\frac{l}{d} \ll 1$$

Здесь $l$—длина полости, $d$—диаметр. Таким образом, для очень длинного цилиндра настоящая теория не может быть применена. Физически это соответствует случаю, когда энергия, накопившаяся в середине полости за период, не успевает в течение этого периода переноситься к стенкам.

**2. Вынужденные колебания.** Будем полагать, что колебания возбуждаются на границе полости периодическим изменением скорости оттока газа. Такой случай реализуется при возбуждении колеблющейся мембраной или сиреной. (Случай, когда на границе области меняется давление, может быть рассмотрен таким же образом.)

Вместо (1.3) будем иметь граничное условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi\right)B(S)-A(S)e^{i\omega t} \qquad (2.1)$$

где $A(S)$—амплитуда вынужденных колебаний скорости, величина достаточно малая, характеризующаяся неравенством

$$A/c \ll 1 \qquad (2.2)$$

Решение ищем в виде установившегося процесса $\Phi = Ue^{i\omega t}$. Задача о нахождении амплитуды $U$ сводится тогда к решению уравнения (1.5) при условиях

$$\frac{\partial U}{\partial n}=-i\omega\rho BU-A \qquad (C) \qquad (2.3)$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial n}=-i\omega\rho U-\rho\mathbf{v}\cdot\nabla U \qquad (O) \qquad (2.4)$$

При выводе (2.3) и (2.4) пренебрегаем членами второго порядка малости, аналогично тому, как это было сделано при выводе (1.14), (1.15). Отметим, что в (2.4) исчез член, содержащий амплитуду возбуждения $A$. Это означает, что генерация практически производится только источниками типа стенка. (В случае возбуждения колебаниями давления существенны, напротив, источники типа отверстие).

Применим тождество Грина к функциям $U$ и $G$, где $G$ — пока произвольная функция

$$\iiint\limits_{\Omega}(U\Delta G-G\Delta U)\,d\Omega=\iint\limits_{S}\left(U\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS$$

Подставляя сюда $\Delta U$ из (1.5), $\partial U/\partial n$ из (2.3) и $U$ из (2.4), имеем

$$\iiint\limits_{\Omega}U\left(\Delta G+\frac{\omega^2}{c^2}G\right)d\,\Omega-\iiint\limits_{\Omega}G\,\frac{2i\omega}{c^2}\mathbf{v}\cdot\nabla U\,d\Omega=$$

$$=\iint\limits_{C}\left[\frac{\partial G}{\partial n}+G(i\omega BU+A)\right]dS+\iint\limits_{O}\left[\frac{\partial G}{\partial n}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial n}+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla U\right)\frac{i}{\omega\rho}-G\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS \qquad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что решение задачи для $U$ существенно различно в зависимости от того, будет ли $\omega$ близкой к частоте собственных колебаний чисто акустической задачи (1.12).

*Случай 1.* Величина $\omega$ не является собственной частотой. Из (2.5) видно, что $U$ такого же порядка малости, как и $A$. Пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} U\left(\Delta G + \frac{\omega^2}{c^2} G\right) d\Omega = \iint\limits_{C} U \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint\limits_{O} G \frac{\partial U}{\partial n} dS + \iint\limits_{C} GA\, dS \qquad (2.6)$$

Так как $G$ — произвольная функция, то $U$ есть так называемое обобщенное решение [6] задачи

$$\Delta U + \frac{\omega_0^2}{c^2} U = 0 \quad (\Omega), \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = -A \quad (C), \qquad U = 0 \quad (O) \qquad (2.7)$$

Из (2.6) или (2.7) следует, что колебания происходят так, как будто бы источники и стоки отсутствуют. Амплитуда колебаний — малая величина порядка $A$.

*Случай 2.* Часто $\omega$ близка к собственной частоте $\omega_0$ задачи (1.12), т. е. $\omega = \omega_0 + \omega_1$ ($\omega_1 \ll \omega_0$). В этом случае можно выбрать $G \equiv U_0$, где $U_0$ — решение задачи (1.12). При этом (2.5) переходит в выражение

$$\frac{2\omega_0\omega_1}{c^2} \iiint\limits_{\Omega} U U_0\, d\Omega - \frac{2i\omega_0}{c^2} \iiint\limits_{\Omega} U_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla U)\, d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{C} U_0 (i\omega_0 \rho B U + A)\, dS + \iint\limits_{O} \frac{\partial U}{\partial n} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial n} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla U\right) \frac{i}{\omega_0 \rho} dS \qquad (2.8)$$

Последнее не однозначно определяет $U$, поэтому воспользуемся тем фактом, что

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) \,\mathrm{const} \qquad (2.9)$$

с точностью до величин первого порядка малости по сравнению с $U_0$. Это следует из рассмотрения задач (1.5), (2.3), (2.4) методом Фурье и физически означает, что форма вынужденных колебаний на резонансной частоте такая же, как соответствующая форма свободных колебаний. Подставляя (2.9) в (2.8), найдем const, а следовательно, и $U(r)$. Используя (1.19), (1.20), запишем окончательное выражение для амплитуды вынужденных колебаний на частоте $\omega_0 + \omega_1$:

$$U(r) = i \frac{c}{\omega_0} \iint\limits_{C} A U_0\, dS \cdot U_0(r) \left[\iint\limits_{C} \left(\rho c B + \frac{v_n}{c}\right) U_0^2\, dS + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{\omega_0^2} \iint\limits_{O} \left(\frac{1}{\rho c B} + \frac{v_n}{c}\right) \left(\frac{\partial U_0}{\partial n}\right)^2 dS + 2i \frac{\omega_1}{c} \iiint\limits_{\Omega} U_0^2\, d\Omega \right]^{-1} \qquad (2.10)$$

Амплитуда таких колебаний на порядок выше, чем в случае 1, и несет информацию об источниках. Отметим, что формула верна только для устойчивой системы. Вблизи границы устойчивости знаменатель стремится к нулю и решение в пренебрежении членами второго порядка малости теряет смысл.

Для практических целей удобно иметь (2.10) в вещественной записи. Для амплитуды давления имеется выражение $P = -i\omega\rho U$ (малый член $\sim \mathbf{v} \cdot \Delta U$ здесь опускаем). Учтем при этом также поглощение в объеме, как это было сделано при выводе (1.22). Если скорость вынужденных колебаний скорости меняется по закону $\sim \cos \omega t$, то давление изменяется $\sim \cos(\omega t - \psi)$.

При этом амплитуда давления $P$ и сдвиг фаз $\psi$ равны соответственно

$$P = \frac{\rho c^2}{\sqrt{D^2 + E^2}} \iint\limits_{C} A P_0\, dS \cdot P_0(r), \qquad \psi = -\operatorname{arc\,tg} \frac{E}{D} \qquad (2.11)$$

$$D = c \iint\limits_{C} \left(\rho c B_r + \frac{v_n}{c}\right) P_0^2\, dS + \frac{c^3}{\omega_0^2} \iint\limits_{O} \left[\frac{1}{\rho c}\left(\frac{1}{E}\right)_r + \frac{v_n}{c}\right] \left(\frac{\partial P_0}{\partial n}\right)^2 dS +$$

$$+ 2\omega_0 \iiint\limits_{\Omega} \frac{\sigma}{c} P_0^2\, d\Omega \qquad (2.12)$$

$$E = 2\omega_1 \iiint\limits_{\Omega} P_0^2\, d\Omega - c \iint\limits_{C} \rho c B_i P_0^2\, dS - \frac{c^3}{\omega_0^2} \iint\limits_{O} \frac{1}{\rho c} \left(\frac{1}{B}\right)_i \left(\frac{\partial P_0}{\partial n}\right)^2 dS$$