УДК 539.3:534.113

МОДЕЛЬ ИЗГИБОВ ГИДРОСТАТИЧЕСКИ СЖАТОЙ ОБОЛОЧКИ ВБЛИЗИ ПОРОГА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТИ

В. В. Киселев, Д. В. Долгих

Институт физики металлов УрО РАН, 620219 Екатеринбург
E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

В рамках нелинейной теории упругости построена упрощенная модель динамики изгибов тонкой гидростатически сжатой оболочки вблизи порога устойчивости ее формы. Найдены условия существования и явные выражения для пространственно локализованных возбуждений и узоров из вмятин на поверхности оболочки, которые являются “предвестниками” ее последующего формоизменения.

Ключевые слова: оболочка, нелинейная упругость, устойчивость, солитон.

Круговая цилиндрическая оболочка, сжатая с внешней стороны поверхности жидкостью высокого давления, при некотором значении давления теряет устойчивость формы (происходит “хлопок”). В результате на поверхности оболочки появляются вытянутые вдоль образующей выпуклости и вмятины, чередующиеся в поперечном сечении оболочки [1]. При этом деформации тонкой оболочки остаются упругими и соответствуют в основном ее геометрическому изгибу [2]. Поэтому начальную стадию формоизменения оболочки можно описать в рамках нелинейной теории упругости [3–5]. Уравнения нелинейной теории упругости учитывают не только геометрическую нелинейность задачи, обусловленную нелинейностью тензора деформаций, но и физическую нелинейность, которая характеризует свойства материала и описывается высшими инвариантами тензора деформаций в разложении выражения для нелинейно-упругой энергии среды. Корректный учет высших инвариантов принципиален, так как возникновение эффектов нелинейности приводит к локализации изгибов оболочки. В конечном счете образование пространственно локализованных узоров из вмятин на поверхности оболочки на начальной стадии ее формоизменения является результатом взаимодействия эффектов нелинейности и дисперсии.

Одна из важных особенностей задачи состоит в том, что исходные уравнения нелинейной теории упругости не содержат дисперсионных слагаемых. В упрощенных моделях оболочек дисперсионные члены появляются в результате исключения “быстрой” переменной, характеризующей неоднородность деформаций вдоль нормали к поверхности оболочки.

В настоящее время появились методы [6], с помощью которых можно получать упрощенные модели исходя из апробированных уравнений нелинейной теории упругости без использования априорных гипотез, с контролируемой точностью по малым параметрам, характеризующим размеры оболочки, величину внешнего напряжения, пространственно-временные масштабы деформаций, геометрическую и физическую нелинейности задачи. Такие методы выявляют скрытую динамическую симметрию задачи, поэтому упрощен-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-96107) и Министерства промышленности, энергетики и науки Свердловской области (договор № Р-06-46, проект “РФФИ-Урал” № 04-01-96107).

ные уравнения оказываются универсальными и близкими к интегрируемым моделям, что позволяет детально анализировать их решения методами современной теории солитонов. Тем не менее нелинейно-упругая динамика оболочек вблизи порогов их устойчивости, возможности ее аппроксимации интегрируемыми моделями до сих пор не изучены.

В данной работе предлагается вариант редуктивной теории возмущений, пригодный для решения нелинейных краевых задач, в которых конечная поверхность деформируемой оболочки заранее неизвестна и находится в процессе решения задачи. Выражение для исходной нелинейно-упругой энергии материала представляется в виде разложения по всем допускаемым симметрией среды инвариантам тензора деформаций. Предлагаемый метод позволяет автоматически отбирать в уравнениях нелинейной теории упругости инварианты и вклады от них, необходимые для построения упрощенной модели. Оказалось, что для решения разных задач необходимы разные инварианты, а в результате получаются разные модели.

1. Основные уравнения. Пусть $\boldsymbol{i}_k$ $(k=1,2,3)$ — базисные орты декартовой системы координат (вектор $\boldsymbol{i}_1$ направлен вдоль оси круговой цилиндрической оболочки). Положение материальной частицы недеформированной оболочки описывается радиус-вектором $\boldsymbol{r}=x^s\boldsymbol{i}_s$. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3.

Для дальнейшего анализа удобно перейти от декартовой системы координат к криволинейной, которая близка к цилиндрической системе координат и поэтому лучше учитывает симметрию задачи. Положение материальной частицы недеформированной оболочки будем характеризовать координатами

$$y^1=x^1,\qquad y^2=\frac{R}{2i}\ln\frac{x^2+ix^3}{x^2-ix^3},\qquad y^3=\sqrt{(x^2)^2+(x^3)^2}$$

(R — радиус срединной поверхности недеформированной оболочки; i — мнимая единица). Векторы локального репера и компоненты метрического тензора имеют вид

$$\boldsymbol{e}_k=\frac{\partial x^s}{\partial y^k}\,\boldsymbol{i}_s,\qquad g_{ik}=\frac{\partial x^s}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^s}{\partial y^k}=\operatorname{diag}\Big(1,\Big(\frac{y^3}{R}\Big)^2,1\Big).$$

Такой выбор локального репера приводит к стандартным уравнениям теории оболочек.

При деформировании оболочки материальная частица с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ приобретает смещение: $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}=v^s(\boldsymbol{y},t)\boldsymbol{e}_s$. Лагранжев тензор деформаций определяется соотношением

$$E_{km}=\frac{1}{2}\big(\nabla_k v_m+\nabla_m v_k+\nabla_k v^s\nabla_m v_s\big),\qquad \nabla_k v^s=\frac{\partial}{\partial y^k}\,v^s+\Gamma^s_{kp}v^p. \tag{1}$$

Здесь $\nabla_k v^s$ — абсолютная (ковариантная) производная компонент поля смещений. В рассматриваемой задаче отличны от нуля лишь следующие компоненты символов Кристофеля: $\Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=1/y^3$, $\Gamma^3_{22}=-y^3/R^2$.

В нелинейной теории [3–5] упругая энергия материала представляется в форме разложения по инвариантам тензора деформации, совместимым с кристаллографической симметрией среды. Когда среда изотропна, независимых инвариантов только три: $I_1=E^m_m$, $I_2=E^s_mE^m_s$, $I_3=E^n_mE^s_nE^m_s$, поэтому общее выражение для упругой энергии оболочки имеет вид

$$U=\int\limits_{V_0}\varphi\sqrt{g}\;dy^1\,dy^2\,dy^3,\qquad \sqrt{g}=\sqrt{\det\|\boldsymbol{g}\|}=-y^3/R,$$

$$\varphi=\frac{\lambda}{2}\,I_1^2+\mu I_2+\frac{A}{3}\,I_3+BI_1I_2+\frac{C}{3}\,I_1^3+\sum_{n=4}^{\infty}\;\sum_{\langle k,p,q\rangle=n}A^{kpq}I_1^kI_2^pI_3^q.$$

Здесь φ — энергия, отнесенная к единице объема оболочки до деформации; $\sum\limits_{\langle k,p,q\rangle=n}$ — сумма по всем натуральным числам k, p, q с ограничением $k+2p+3q=n$. Интегрирование проводится по объему V_0 недеформированной оболочки. Для определенности полагаем, что все упругие модули среды λ, μ, A, B, C, A^{kpq} сравнимы по порядку величины.

Уравнения динамики нелинейно-упругого тела записываются в виде

$$-\rho_0\,\partial_t^2 v^i + \nabla_s P^{is} = 0, \tag{2}$$

где P^{is} — компоненты тензора Пиолы — Кирхгофа:

$$P^{is} = \frac{\partial\varphi}{\partial E_{is}} + \frac{\partial\varphi}{\partial E_{sm}}\,\nabla_m v^i. \tag{3}$$

Для дальнейшего анализа граничные условия на той части поверхности S деформированного тела, где заданы внешние силы $\boldsymbol{f} = f^k \boldsymbol{e}_k$, удобнее записать относительно величин, соответствующих недеформированной оболочке [3, 4]:

$$P^{ik} n_k\big|_{\sigma'} = f^i\,\frac{dS}{d\sigma}\Big|_{\sigma'}.$$

Здесь n_l — компоненты вектора нормали к соответствующему элементу поверхности σ' недеформированной оболочки; $dS/d\sigma$ — относительное изменение малой площадки при деформировании тела:

$$\frac{dS}{d\sigma} = \sqrt{m_k m^k}, \qquad m_k = \frac{\partial \det\|C\|}{\partial C_l^k}, \qquad C_l^k = \delta_l^k + \nabla_l v^k.$$

Особенность гидростатического давления p заключается в том, что оно всегда направлено по нормали к деформируемой поверхности. С учетом этого обстоятельства граничные условия на боковой поверхности σ оболочки принимают вид [3, 4]

$$P^{i3}\big|_{\sigma^+} = g^{ik} p\,\frac{\partial \det\|C\|}{\partial C_3^k}\Big|_{\sigma^+}, \qquad P^{i3}\big|_{\sigma^-} = 0. \tag{4}$$

Здесь σ^+, σ^- — внешняя и внутренняя части боковой поверхности оболочки соответственно. Нелинейные граничные условия (4) определяют дисперсию локальных изгибов оболочки.

В то же время согласно принципу Сен-Венана для описания динамики изгибов, расположенных в центральной части оболочки, необходимы лишь интегральные характеристики сил вдоль ее кромок, которые обычно учитываются эффективными граничными условиями для упрощенных моделей [7].

2. Редуктивная теория возмущений. Пусть l — характерный масштаб изгибов поверхности оболочки ($l \ll L$, где L — длина оболочки), $\tau_{ch} = l/\sqrt{\mu/\rho_0}$ — характерное время деформаций. Введем следующие безразмерные переменные:

$$\xi_\alpha = y^\alpha/l \quad (\alpha = 1, 2), \qquad \eta = (y^3 - R)/d, \qquad \tau = t/\tau_{ch}.$$

Далее будем рассматривать изгибы оболочки, сравнимые с ее толщиной d, поэтому поля смещений отнесены к величине d:

$$u = v^1/d, \qquad v = v^2/d, \qquad w = v^3/d.$$

Определим малые параметры, характеризующие толщину оболочки и ее кривизну: $\varepsilon = d/l \ll 1$, $\delta = d/R = O(\varepsilon^2)$. Ограничимся рассмотрением достаточно медленных процессов, для которых справедлива оценка $|\partial_\tau v^i/v^i| = O(\varepsilon^2)$. Для построения упрощенной модели более детальной информации о начальных условиях задачи не требуется.

Пусть внешнее давление p таково, что $p/\mu = O(\varepsilon^4)$. При сформулированных условиях уравнения нелинейной теории упругости (2) для оболочки можно свести к более простой модели.

В безразмерных переменных основные уравнения (2) имеют вид

$$\begin{gathered}\mu\varepsilon^2\,\partial_\tau^2 u = \varepsilon\,\partial_{\xi_\alpha}P^{1\alpha} + \partial_\eta P^{13} + \delta(1+\delta\eta)^{-1}P^{13},\\ \mu\varepsilon^2\,\partial_\tau^2 v = \varepsilon\,\partial_{\xi_\alpha}P^{2\alpha} + \partial_\eta P^{23} + \delta(1+\delta\eta)^{-1}(2P^{23}+P^{32}),\\ \mu\varepsilon^2\,\partial_\tau^2 w = \varepsilon\,\partial_{\xi_\alpha}P^{3\alpha} + \partial_\eta P^{33} - \delta(1+\delta\eta)^{-1}P^{22} + \delta(1+\delta\eta)^{-1}P^{33}.\end{gathered} \tag{5}$$

Для построения модели решение уравнений (5) будем искать в виде

$$\begin{gathered}u = \sum_{n=1}^{\infty} u^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\eta,\tau), \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} v^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\eta,\tau),\\ w = w^{(0)}(\xi_1,\xi_2,\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} w^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\eta,\tau).\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь верхний индекс определяет порядок слагаемого по параметру малости ε. Формулы (1), (3), (6) приводят к разложениям тензоров E_{ij} и P^{ij}:

$$P^{ij} = \sum_n (P^{ij})^{(n)}, \qquad E_{ij} = \sum_n (E_{ij})^{(n)}. \tag{7}$$

Подставляя формулы (7) в уравнения (5) и приравнивая слагаемые одного порядка малости по параметру ε, получим цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений по “быстрой” переменной η, характеризующей неоднородность деформаций вдоль нормали к поверхности оболочки. Граничные условия, необходимые для решения этих уравнений, следуют из разложений по параметру ε исходных граничных условий (4).

В теории возмущений первых порядков краевые задачи

$$\begin{gathered}\partial_\eta(P^{\alpha 3})^{(s)} = 0, \qquad (P^{\alpha 3})^{(s)}\big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \qquad s = 1,2,\\ \partial_\eta(P^{33})^{(n)} = 0, \qquad (P^{33})^{(n)}\big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \qquad n = 2,3\end{gathered} \tag{8}$$

имеют тривиальные решения $(P^{\alpha 3})^{(s)} \equiv 0$, $(P^{33})^{(n)} \equiv 0$. Используя формулы (3), из этих решений можно найти деформации:

$$E_{\alpha 3}^{(s)} = 0 \quad (s=1,2), \qquad E_{33}^{(n)} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,E_{\alpha\alpha}^{(n)} \quad (n=2,3), \tag{9}$$

что позволяет упростить выражения для компонент $(P^{\alpha\beta})^{(n)}$ тензора Пиолы — Кирхгофа:

$$(P^{\alpha\beta})^{(n)} = \lambda' E_{\gamma\gamma}^{(n)} + 2\mu E_{\alpha\beta}^{(n)} \qquad (n=2,3). \tag{10}$$

Здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2; эффективный модуль $\lambda' = 2\mu\lambda/(\lambda+2\mu)$ определяет напряжения, возникающие при изменении размера элемента поверхности оболочки.

Если равенства (9) записать в терминах полей смещений, то получим дифференциальные уравнения относительно переменной η, из которых легко найти зависимость от η функций $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, $w^{(n)}$. Для построения традиционной нелинейной модели оболочек достаточно разрешить относительно смещений лишь первые из уравнений (8) с $s=1$. В результате получим

$$u^{(1)} = -\varepsilon\eta\,\partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(0)} + \tilde{u}^{(1)}(\xi_1,\tau), \qquad v^{(1)} = -\varepsilon\eta\,\partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(0)} + \tilde{v}^{(1)}(\xi_2,\tau). \tag{11}$$

Не зависящие от η функции $\tilde{u}^{(1)}$ и $\tilde{v}^{(1)}$, появившиеся в процессе интегрирования, конкретизируются в теории возмущений следующих порядков. Далее все функции, не зависящие от η, будем отмечать знаком "$\sim$", например: $w^{(0)} = \tilde{w}^{(0)}$.

Формулы (9)–(11) позволяют выделить в явном виде зависимость функций $(P^{\alpha\beta})^{(2)}$ от "быстрой" переменной η:

$$(P^{\alpha\beta})^{(2)} = \sigma^{(2)}_{\alpha\beta} - \varepsilon^2\eta(\lambda'\delta_{\alpha\beta}\Delta + 2\mu\partial_{\xi_\alpha}\partial_{\xi_\beta})\tilde{w}^{(0)}, \qquad \Delta = \partial^2_{\xi_1} + \partial^2_{\xi_2} \tag{12}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера). Тензор $\sigma^{(2)}_{\alpha\beta} = \lambda'\varepsilon^{(2)}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon^{(2)}_{\alpha\beta}$ описывает внутренние напряжения оболочки, вызванные "квазиплоскими" деформациями:

$$\begin{gathered}\varepsilon^{(2)}_{11} = \varepsilon\,\partial_{\xi_1}\tilde{u}^{(1)} + \varepsilon^2(\partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(0)})^2/2, \qquad \varepsilon^{(2)}_{22} = \varepsilon\,\partial_{\xi_2}\tilde{v}^{(1)} + \varepsilon^2(\partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(0)})^2/2 + \delta\tilde{w}^{(0)},\\ \varepsilon^{(2)}_{12} = \varepsilon(\partial_{\xi_1}\tilde{v}^{(1)} + \partial_{\xi_2}\tilde{u}^{(1)} + \varepsilon\,\partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(0)}\,\partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(0)})/2.\end{gathered} \tag{13}$$

Следует отметить, что уравнения высших порядков теории возмущений могут быть проинтегрированы только при выполнении условий разрешимости соответствующих краевых задач. Условия разрешимости получаются в результате интегрирования уравнений теории возмущений по толщине оболочки с учетом граничных условий на ее поверхности. Эти условия дают алгебраические или дифференциальные связи между функциями, такими как $\tilde{u}^{(1)}$ и $\tilde{v}^{(1)}$, которые были произвольными в теории возмущений первых порядков. Можно показать, что все условия разрешимости самосогласованны и непротиворечивы.

Определим роль условий разрешимости на примере краевой задачи теории возмущений 3-го порядка:

$$\partial_\eta(P^{\alpha3})^{(3)} + \varepsilon\,\partial_{\xi_\beta}(P^{\alpha\beta})^{(2)} = 0, \qquad (P^{\alpha3})^{(3)}\big|_{\eta=\pm1/2} = 0. \tag{14}$$

Интегрируя уравнение в (14) по толщине оболочки, получим условия разрешимости задачи (14):

$$\partial_{\xi_\beta}\langle P^{\alpha\beta}\rangle^{(2)} = 0. \tag{15}$$

Здесь и далее $\langle f\rangle = \displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\eta)\,d\eta$ — среднее значение функции $f(\eta)$ по толщине оболочки. Используя представление (12), нетрудно убедиться, что ограничения (15) сводятся к системе дифференциальных уравнений для расчета функций $\tilde{u}^{(1)}$ и $\tilde{v}^{(1)}$:

$$\partial_{\xi_\beta}\sigma^{(2)}_{\alpha\beta} = 0. \tag{16}$$

При выполнении условий (16) краевая задача (14) имеет следующее решение:

$$(P^{\alpha3})^{(3)} = (\varepsilon^3/2)(\lambda' + 2\mu)(\eta^2 - 1/4)\Delta\partial_{\xi_\alpha}\tilde{w}^{(0)}.$$

Таким образом, при интегрировании уравнений теории возмущений в первую очередь вычисляются функции $(P^{ik})^{(n)}$, которые в силу соотношений (3) связаны с производными $(\partial\varphi/\partial E_{ik})^{(n)}$, а через них — с компонентами тензора деформаций $E^{(n)}_{sp}$. Поэтому с учетом уравнений теории возмущений предыдущих порядков после определения $(P^{ik})^{(n)}$ вычисляются функции $(\partial\varphi/\partial E_{ik})^{(n)}$ и $E^{(n)}_{sp}$. Для построения упрощенных моделей оболочек этой информации часто оказывается достаточно. Не нужно вычислять все поля смещений до n-го порядка включительно. Указанная особенность теории возмущений чрезвычайно облегчает построение эффективных моделей.

Отметим также, что в теории возмущений 3-го порядка и выше $(P^{3\alpha})^{(m)} \neq (P^{\alpha 3})^{(m)}$. Однако, как следует из (3), компоненты $(P^{3\alpha})^{(m)}$ всегда могут быть вычислены по известным функциям $(P^{\alpha 3})^{(m)}$. Например:

$$(P^{3\alpha})^{(3)} = (P^{\alpha 3})^{(3)} + \varepsilon\, \partial_{\xi_\gamma} \tilde{w}^{(0)} (P^{\gamma\alpha})^{(2)}.$$

Уравнение для расчета $\tilde{w}^{(0)}$ получим с использованием краевой задачи теории возмущений 4-го порядка:

$$\begin{gathered} \mu\varepsilon^2 \partial_\tau^2 \tilde{w}^{(0)} = \varepsilon \partial_{\xi_\alpha} (P^{3\alpha})^{(3)} + \partial_\eta (P^{33})^{(4)} - \delta (P^{22})^{(2)}, \\ (P^{33})^{(4)}\big|_{\eta=1/2} = p, \qquad (P^{33})^{(4)}\big|_{\eta=-1/2} = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Нетрудно проверить, что из условия разрешимости задачи (17) следует дифференциальное уравнение

$$\mu\varepsilon^2 \partial_\tau \tilde{w}^{(0)} = -(1/12)(\lambda' + 2\mu)\varepsilon^4 \Delta\Delta \tilde{w}^{(0)} + p - \delta\sigma_{22}^{(2)} + \varepsilon^2 \sigma_{\gamma\beta}^{(2)}\, \partial_{\xi_\gamma}\, \partial_{\xi_\beta} \tilde{w}^{(0)}. \tag{18}$$

Уравнения (16), (18) образуют замкнутую систему для определения функций $\tilde{u}^{(1)}$, $\tilde{v}^{(1)}$, $\tilde{w}^{(0)}$, которая совпадает с традиционной нелинейной моделью оболочек [1, 8, 9]. Уравнения (16), (18) обычно записывают в иной форме, исключая из формул (13), (16), (18) поля смещений $\tilde{u}^{(1)}$, $\tilde{v}^{(1)}$ с помощью функции напряжений Φ: $\sigma_{11}^{(2)} = \partial_{\xi_2}^2 \Phi$, $\sigma_{22}^{(2)} = \partial_{\xi_1}^2 \Phi$, $\sigma_{12}^{(2)} = -\partial_{\xi_1} \partial_{\xi_2} \Phi$.

Таким образом, традиционная нелинейная модель оболочек представляет собой простейшую редукцию общих уравнений теории упругости (2). Такая модель учитывает только геометрическую нелинейность задачи и не всегда пригодна для изучения нелинейно-упругой динамики оболочек. Так, у длинных гидростатически сжатых оболочек изгибы вдоль образующей слабо зависят от координаты ξ_1. В то же время, если в нелинейных уравнениях (16), (18) пренебречь зависимостью смещений от ξ_1, то они сведутся к линейным. Нелинейная динамика оболочек, сжатых жидкостью высокого давления, полностью проявляется лишь в редуктивной теории возмущений следующих порядков и обусловлена не только геометрической, но и физической нелинейностью задачи, а также эффектами высшей пространственной дисперсии.

Чтобы выйти за рамки "квазилинейного" приближения (16), (18), при построении модели изгибов оболочки необходимо использовать редуктивную теорию возмущений следующих (5-го и 6-го) порядков. Процедура построения более общей динамической модели для гидростатически сжатой оболочки аналогична схеме, подробно изложенной в [10] при описании сильных изгибов пластины.

Процедуру построения эффективных моделей для оболочек и сами модели можно значительно упростить, предположив, что вблизи порогов устойчивости оболочек гофрировка их поверхностей осуществляется преобладающими (нейтрально-устойчивыми) линейными модами деформации, которые специфичны для каждой задачи. Из-за неустойчивости таких мод проявляются и начинают играть определяющую роль нелинейные свойства среды, что обусловливает пространственную локализацию деформаций. Эффекты дисперсии ограничивают увеличение амплитуды изгибов оболочки и при определенных условиях приводят к формированию "долгоживущих" возбуждений и узоров из вмятин на ее поверхности. Для теоретического описания локальных деформаций оболочки удобен метод многомасштабных разложений, с помощью которого уравнения нелинейной теории упругости сводятся к упрощенным амплитудным уравнениям для огибающих вмятин на поверхности оболочки, учитывающим специфику конкретной задачи. Ранее в рамках такого подхода удалось аналитически описать гофрировку наиболее сильно нагруженного слоя материала [11], кольцевые складки и пространственно локализованные узоры из ромбовидных вмятин на поверхностях продольно сжатых цилиндрических оболочек [12].

3. Амплитудное уравнение. Конкретизируем разложение (6), учитывая геометрию изгибов поверхности гидростатически сжатой оболочки. Пусть вдоль дуги оболочки образуется n волн изгиба ее поверхности. Тогда характерный масштаб $l = R/n$. Как и ранее, предполагаем $\varepsilon = d/l = nd/R \ll 1$, $\delta = d/R = O(\varepsilon^2)$, что соответствует образованию на поверхности оболочки большого количества продольных вмятин: $n = O(1/\varepsilon)$, $n > 3$.

Деформации оболочки в окружном направлении и вдоль нормали к поверхности будем описывать прежними переменными ξ_2 и η. Прогибы оболочки вдоль образующей являются плавными, поэтому для их анализа введем более "медленную" координату $X = \varepsilon y^1/l$. Поскольку $l/\varepsilon = R/(n\varepsilon) \sim R$, переменная X уместна при описании оболочек, длина которых больше их радиуса. Далее рассматриваются достаточно медленные процессы, которые описываются безразмерным временем $T = \varepsilon^2 t/\tau_{ch}$. Выбор масштабных преобразований, следующий из анализа пространственно-временных откликов системы на внешнее возмущение и позволяющий учитывать возможность баланса эффектов дисперсии и нелинейности [6], поясняется ниже.

Для построения амплитудного уравнения решение основных уравнений (5) будем искать в виде

$$\begin{gathered}
u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u^{(n,m)}(X,T,\eta) \exp(im\xi_2), \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v^{(n,m)}(X,T,\eta) \exp(im\xi_2), \\
w = \tilde{w}^{(0,0)}(X,T) + \tilde{w}^{(0,1)}(X,T) \exp(i\xi_2) + \tilde{w}^{(0,-1)}(X,T) \exp(-i\xi_2) + \\
+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w^{(n,m)}(X,T,\eta) \exp(im\xi_2).
\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь индекс n характеризует порядок малости слагаемого по параметру ε; целое число m определяет кратность гармоники. Связь волнового числа n/R преобладающей нейтрально-устойчивой моды с внешним давлением находится в процессе построения модели. Переменные X, T описывают медленные модуляции основной гармоники, обусловленные ее взаимодействием с близкими неустойчивыми модами деформации. В силу вещественности полей u, v, w коэффициенты разложений (19) удовлетворяют ограничениям $u^{(n,m)} = (u^{(n,-m)})^*$, $v^{(n,m)} = (v^{(n,-m)})^*$, $w^{(n,m)} = (w^{(n,-m)})^*$.

Пусть концы оболочки сдерживаются связями, так что она не испытывает продольных смещений:

$$\partial_X u^{(1,0)}\big|_{y^1=0,L} = 0. \tag{20}$$

Уравнения теории возмущений получаются при подстановке разложений (19) в уравнения (5) и граничные условия (4) после приравнивания слагаемых одного порядка малости по параметру ε с одинаковыми множителями $\exp(im\xi_2)$.

После интегрирования уравнений теории возмущений по "быстрой" переменной η возникают функции медленных переменных X и T. Из условий разрешимости уравнений следует также связь волнового числа нейтрально-устойчивой моды, ответственной за образование изгибов оболочки в окружном направлении, с внешним давлением, при котором начинается формоизменение оболочки.

При построении упрощенной модели отсутствует необходимость вычисления полей смещений до шестого порядка включительно. Достаточно выявить зависимость от переменой η компонент $u^{(1,m)}$, $v^{(1,m)}$ ($m = 0, 1, 2$), $u^{(2,s)}$, $v^{(2,s)}$ ($s = 0, 1$), $v^{(3,1)}$, $w^{(2,p)}$

($p = 0, 1, 2$). Компоненты полей u и v находим интегрированием по η выражений для $(P^{\alpha 3})^{(s,m)}$ ($s = 1, 2, 3$), а поправки $w^{(2,p)}$ — из уравнений $(P^{33})^{(2,p)} = 0$. Остальную информацию можно получить из функций $(P^{ij})^{(n,m)}$, которые вычисляются значительно проще.

В теории возмущений второго порядка от нуля будут отличны лишь следующие компоненты тензоров $E^{(2,m)}_{\alpha\beta}$, $(P^{\alpha\beta})^{(2,m)}$:

$$
\begin{gathered}
E^{(2,0)}_{22} = \delta\tilde{w}^{(0,0)} + \varepsilon^2|\tilde{w}^{(0,1)}|^2, \qquad E^{(2,1)}_{21} = \varepsilon^2\eta\tilde{w}^{(0,1)},\\
(P^{11})^{(2,k)} = \lambda' E^{(2,k)}_{22}, \qquad (P^{22})^{(2,k)} = (\lambda' + 2\mu)E^{(2,k)}_{22}, \qquad k = 0, 1.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Особенности расчетов рассмотрим на примере уравнений теории возмущений 4-го порядка:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon im(P^{32})^{(3,m)} + \partial_\eta(P^{33})^{(4,m)} - \delta(P^{22})^{(2,m)} = 0,\\
(P^{33})^{(4,m)}\big|_{\eta=1/2} = p\delta_{m,0}, \qquad (P^{33})^{(4,m)}\big|_{\eta=-1/2} = 0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

В уравнениях (22) теории возмущений предыдущих порядков выявлена зависимость от η всех функций, кроме $(P^{33})^{(4,m)}$.

При $m = 0$ условие разрешимости задачи (22) полностью определяет компоненту $(P^{22})^{(2,0)}$:

$$
\langle P^{22}\rangle^{(2,0)} \equiv (P^{22})^{(2,0)} = p/\delta, \tag{23}
$$

а также (согласно соотношениям (21)) функции $E^{(2,0)}_{22}$, $(P^{11})^{(2,0)}$, $w^{(0,0)}$.

Из условия разрешимости задачи (22) при $m = 1$ получаем связь волнового числа нейтрально-устойчивой линейной моды с внешним давлением:

$$
p = -\frac{\delta}{12}\,\varepsilon^2(\lambda' + 2\mu) \equiv -\frac{d^3n^2}{12R^3}\,(\lambda' + 2\mu). \tag{24}
$$

Формула (24) совпадает с определением “верхней” критической нагрузки в линейной теории оболочек [1]. Далее для определенности полагаем, что внешнее давление удовлетворяет соотношению (24) с относительной погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Тогда $\langle P^{32}\rangle^{(3,1)} = O(\varepsilon^5)$.

При выполнении условий (23), (24) из уравнений (22) можно найти компоненты $(P^{33})^{(4,m)}$, а также функции $(\partial\varphi/\partial E_{33})^{(4,m)}$ и $E^{(4,m)}_{33}$, которые содержатся в теории возмущений следующих порядков.

Не приводя подробные расчеты, прокомментируем последний шаг построения упрощенной модели. Редуктивная теория возмущений “замыкается” в упрощенную модель условиями разрешимости, которые имеют вид ($s = 0, 1$)

$$
\begin{aligned}
\mu\varepsilon^6\,\partial_T^2\tilde{w}^{(0,s)} = \varepsilon^2\,\partial_X\langle P^{31}\rangle^{(4,s)} + i\varepsilon\delta_{s1}\langle P^{32}\rangle^{(3,1)} + i\varepsilon s\langle P^{32}\rangle^{(5,s)} - {}\\
- \delta\langle P^{22}\rangle^{(4,s)} - \delta^2\langle\eta P^{22}\rangle^{(2,s)} + \delta\langle P^{33}\rangle^{(4,s)} + (P^{33})^{(6,s)}\big|_{\eta=1/2}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Здесь $(P^{33})^{(6,0)}\big|_{\eta=1/2} = p\delta\tilde{w}^{(0,0)}$; $(P^{33})^{(6,1)}\big|_{\eta=1/2} = p\varepsilon^2\tilde{w}^{(0,1)}/2$.

При $s = 0$ из уравнения (25) определяем компоненту $\langle P^{22}\rangle^{(4,0)}$. Следует отметить, что явное выражение для $\langle P^{22}\rangle^{(4,0)}$ не содержит произвольных функций, кроме $\tilde{w}^{(0,1)}$. Процедура вычисления $\langle P^{22}\rangle^{(4,0)}$ такая же, как и для $\langle P^{22}\rangle^{(2,0)}$ на предыдущем шаге.

При $s = 1$ правая часть равенства (25) содержит слагаемое $\langle P^{32}\rangle^{(5,1)}$, вычисление которого повторным использованием формулы (3) можно свести к расчету средних $\langle P^{23}\rangle^{(5,1)}$,

$\langle P^{22}\rangle^{(4,1)}$, $\langle P^{22}\rangle^{(4,2)}$, $\langle P^{21}\rangle^{(3,0)}$. Средние величины $\langle P^{22}\rangle^{(4,n)}$ $(n = 1, 2)$ определяются алгебраическими условиями разрешимости предыдущих краевых задач. Для функции $\langle P^{21}\rangle^{(3,0)}$ условие разрешимости оказывается дифференциальным уравнением по переменной X, которое при краевых условиях (20) имеет тривиальное решение $\langle P^{21}\rangle^{(3,0)} = 0$. Функция $(P^{23})^{(5,1)}$ находится путем интегрирования по η соответствующего уравнения теории возмущений. Следует отметить, что все средние не содержат произвольных функций, кроме $\tilde{w}^{(0,1)}$. При $s = 1$ отсутствие в уравнении (25) функции $\tilde{w}^{(2,1)}$, содержащейся в теории возмущений следующего порядка, гарантировано условием разрешимости (24) в теории возмущений предыдущего порядка.

В конечном счете условие разрешимости (25) $(s = 1)$ дает замкнутое дифференциальное уравнение эволюции поперечных изгибов $\tilde{w}^{(0,1)}$ гидростатически сжатой оболочки

$$\partial_T^2 \tilde{w}^{(0,1)} + a\tilde{w}^{(0,1)}\,\partial_T^2 |\tilde{w}^{(0,1)}|^2 = b\,\partial_X^2 \tilde{w}^{(0,1)} + c\tilde{w}^{(0,1)} - g\tilde{w}^{(0,1)}|\tilde{w}^{(0,1)}|^2, \tag{26}$$

где

$$a = \frac{\varepsilon^4}{\delta^2}, \qquad b = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{\lambda'}{2\mu}\Big), \qquad g = \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{\lambda'}{2\mu}\Big),$$

$$c = -\frac{1}{\varepsilon^4\mu}\Big(\frac{p}{\delta} + \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda' + 2\mu)\Big) + \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{\lambda'}{2\mu}\Big)\Big[\frac{\delta^2}{\varepsilon^4} + \frac{1}{6}\Big(\frac{17}{10} + {}$$
$$+ \frac{1}{\lambda' + 2\mu}\Big\{(A + 2B)\Big[1 - \Big(\frac{\lambda'}{2\mu}\Big)^3\Big] + (B + C)\Big(1 - \frac{\lambda'}{2\mu}\Big)^3\Big\}\Big)\Big].$$

Упрощенная модель (26) пригодна для описания изгибов оболочки всюду, за исключением узких полос вблизи ее концов.

4. Узоры из вмятин и компактоны. Упрощенная модель (26) имеет широкий класс точных решений

$$\tilde{w}^{(0,1)} = A(X,T)\exp\left(i\Theta(X,T)\right),$$

которым соответствуют поперечные смещения оболочки вида

$$w = \frac{p}{\delta^2(\lambda' + 2\mu)} - \frac{\varepsilon^2}{\delta}A^2(X,T) + 2A(X,T)\cos\left[\xi_2 + \Theta(X,T)\right]. \tag{27}$$

Здесь A, Θ — вещественные функции.

Следствием амплитудного уравнения (26) является закон сохранения

$$\partial_T(\partial_T\Theta A^2) = b\,\partial_X(\partial_X\Theta A^2),$$

которому можно удовлетворить с помощью подстановки

$$\Theta = \omega T + \varphi(X), \qquad A = A(X), \qquad \partial_X\varphi = r/A^2, \qquad r = \mathrm{const}\,. \tag{28}$$

В общем случае при $r \ne 0$ ограниченные решения модели записываются в терминах эллиптических функций и интегралов третьего рода. В частном случае при выборе постоянных интегрирования решения можно записать в элементарных функциях:

$$A^2 = A_0^2(1 - \sin^2 B\,\mathrm{sech}^2\,\Psi), \qquad \Psi = \sqrt{g/(2b)}\;XA_0\sin B,$$
$$\varphi = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{th}\,\Psi) + \sqrt{g/(2b)}\;XA_0\cos B. \tag{29}$$

Здесь B — вещественный параметр; $A_0^2 = 2\tilde{c}/[g(2 + \cos^2 B)]$; $\tilde{c} = c + \omega^2 > 0$.

При $\omega = 0$ формулы (27)–(29) описывают оболочку с вытянутыми вдоль образующей вмятинами, менее четко выраженными в области шириной порядка $l(\varepsilon A_0\sin B)^{-1}\sqrt{2b/g}$, где амплитуды выпуклостей и впадин в поперечном сечении оболочки уменьшаются на величину $2A_0 d\cos B$ начиная со значения $2A_0 d$ (в исходных размерных переменных). При $\omega \neq 0$ по поверхности оболочки с вмятинами бежит волна поперечных смещений.

При $r = \omega = 0$, $c > 0$ имеем

$$A = \sqrt{2c/g}\ \sin B\,\mathrm{sn}\,(X\sqrt{c/b}\ \cos B, k), \qquad \Theta = \mathrm{const}, \tag{30}$$

где вещественный параметр $0 < B \leqslant \pi/4$ задает амплитуду и профиль огибающей изгибов оболочки вдоль образующей; $k = \mathrm{tg}\,B$ — модуль эллиптического синуса. Решению (27), (30) соответствует неподвижная структура, представляющая собой выпуклости и впадины, чередующиеся вдоль образующей оболочки и в ее поперечном сечении. Такие узоры из вмятин, по-видимому, могут реализоваться только при наличии внутри оболочки подкрепляющих колец [1]. Обычно вдоль образующей оболочки формируется одна полуволна огибающей. Эта ситуация описывается формулами (27), (30) с параметром B, являющимся корнем уравнения

$$(\varepsilon/l)L\sqrt{c/b}\ \cos B = 2K(k),$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Из неравенства $c > 0$ следует, что оболочка с вмятинами выдерживает давление, абсолютное значение которого меньше критической нагрузки линейной теории. При $B \to \pi/4$ в центральной части оболочки амплитуда огибающей почти постоянна: $A(X) \simeq \sqrt{c/g}$, а вблизи концов аппроксимируется выражением

$$A(\xi) \simeq \sqrt{\frac{c}{g}}\ \mathrm{th}\Big(\frac{\varepsilon}{l}\sqrt{\frac{c}{2b}}\ \xi\Big), \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{l}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2b}{c}},$$

где $\xi = y^1$ или $\xi = L - y^1$. “Выполаживание” изгибов вдоль образующей у длинных оболочек наблюдается экспериментально и не может быть объяснено с использованием традиционной теории оболочек.

Модель (26) допускает распространение нелинейных монохроматических волн вдоль оболочки с вмятинами. Соответствующие поперечные смещения оболочки описываются формулой (27), в которой следует положить

$$A(X,T) = A_0 \sin(\Omega T + kX), \quad \Theta = 0, \quad \Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}, \quad k^2 = \frac{g}{4ab}\,(1 - 2aA_0^2) + \frac{c}{b} > 0.$$

Здесь A_0 — вещественный параметр.

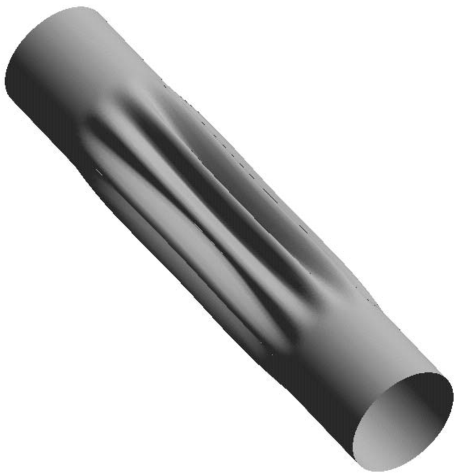
Следует отметить, что после подстановки $\tilde{w}^{(0,1)} = A(\zeta)$, $\zeta = X \pm \sqrt{b}T$ и интегрирования по ζ (постоянная интегрирования выбирается равной нулю) амплитудное уравнение (26) принимает вид

$$A^2\Big((\partial_\zeta A)^2 + \frac{g}{4ab}\,A^2 - \frac{c}{2ab}\Big) = 0. \tag{31}$$

Среди решений уравнения (31) имеются экзотические солитоны — компактоны [13]:

$$A(\zeta) = \sqrt{\frac{2c}{g}}\ \cos\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{ab}}\ \zeta\Big), \qquad |\zeta| \leqslant \pi\sqrt{\frac{ab}{g}}. \tag{32}$$

Вне указанного интервала функция $A(\zeta)$ обращается в нуль. Хотя производные этой функции разрывны на краях компактона, в уравнениях (26), (31) слагаемые с производными $A^2(\partial_\zeta A)^2$ и $A\,\partial_\zeta^2 A^2$ непрерывны всюду включая края солитона. Поперечные изгибы оболочки, соответствующие компактону, представлены на рисунке. В силу своих особенностей компактоны не взаимодействуют с другими солитонами до момента их столкновения. Они



Компактон, соответствующий решению (32)

движутся вдоль образующей оболочки со скоростью $l\varepsilon\sqrt{b}/\tau_{ch}$ (в исходных размерных переменных). Поскольку компактоны образуются только вблизи порога устойчивости формы оболочки, они могут быть использованы для диагностики ее предкритического состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.
2. **Погорелов А. В.** Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967.
3. **Murnaghan F. D.** Finite deformation of an elastic solid. N. Y.: Willey; L.: Chapman and Hall, 1951.
4. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
5. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
6. **Додд Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. М.: Мир, 1988.
7. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
8. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
9. **Муштари Х. М.** Нелинейная теория оболочек. М.: Наука, 1990.
10. **Долгих Д. В., Киселев В. В.** Двумерная модель динамики сильных изгибов нелинейно-упругой пластины // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 300–314.
11. **Долгих Д. В., Киселев В. В.** Солитоны поперечной гофрировки в трехслойной нелинейно-упругой среде // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 6. С. 1049–1066.
12. **Киселев В. В., Долгих Д. В.** Узоры из вмятин на поверхности продольно сжатой нелинейно-упругой цилиндрической оболочки // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 3. С. 500–525.
13. **Rosenau P., Hyman J. M.** Compactons: solitons with finite wavelengh // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70, N 5. P. 564–567.

Поступила в редакцию 17/X 2006 г.,
в окончательном варианте — 8/XII 2006 г.