ПМТФ, № 2, 1975

УДК 539.4.01

ПОЛЫЙ ШАР ИЗ ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

И. Д. Рогозин

(*Красноярск*)

Рассматривается полый шар из упругого связующего материала малой жесткости, хаотически армированного отрезками «волокон» из материала более высокой жесткости. В качестве связующего может выступать, например, полимерный материал. Такое армирование позволяет получить материал с улучшенными свойствами, причем в целом материал получается квазиизотропным [1]. Получено распределение напряжений в полом шаре.

Пусть композитная среда состоит из упругого связующего материала и арматуры в виде отрезков круговых цилиндрических волокон. Предполагаем, что диаметр волокон d значительно меньше их длины $l (d \ll l)$. Введем, следуя [2], в качестве исходных следующие гипотезы.

1. Пусть отрезки волокон распределены в связующем материале равномерно по всем направлениям. Макрообъем $\omega (\omega \ll V$; V — объем тела) отождествим с материальной точкой. Число отрезков волокон в рассматриваемом объеме ω достаточно велико. В каждом волокне осуществляется одноосное напряженное состояние. Будем рассматривать армированный материал как макроскопически однородную среду. Компоненты тензоров напряжений и деформаций в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 обозначим соответственно σ_{ij}, $\varepsilon_{ij} (i, j=1, 2, 3)$.

2. Предполагаем, что связующий материал деформируется упруго. Обозначим постоянные Ламе связующего через λ_c, μ_c.

3. Зависимость между напряжениями и деформациями в арматуре является нелинейной и задается уравнением $\sigma_{nn}=F(\varepsilon_{nn})$, где ε_{nn} — осевая деформация волокна; σ_{nn} — осевое напряжение.

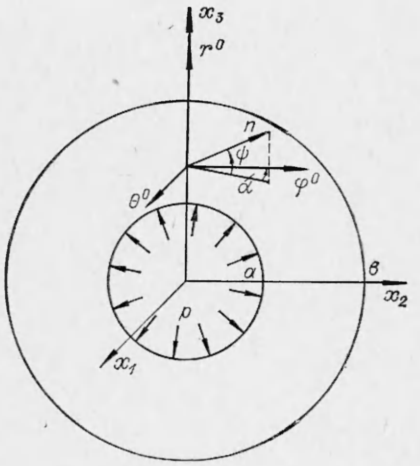
Пусть Ω — полусфера, образованная единичными векторами $\mathbf{n}$, направленными вдоль осей волокон. Относительный объем волокон, у которых вектор $\mathbf{n}$ находится внутри телесного угла $d\Omega$, пропорционален $d\Omega$, в 2π раз меньше, чем объем всех волокон. Обозначим через n_1, n_2, n_3 направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}$ в системе координат x_1, x_2, x_3; через η — коэффициент объемного содержания арматуры в материале. Полагая деформации однородными и принимая гипотезу об объемном вкладе компонентов в общее напряженное состояние, получим следующие соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij} = (1-\eta)(\lambda_c \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu_c \varepsilon_{ij}) + \frac{\eta}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} F(\varepsilon_{nn}) n_i n_j d\Omega. \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$; $\varepsilon_{nn}=\varepsilon_{ij} n_i n_j$ $(i, j=1, 2, 3)$.

Рассмотрим случай, когда функция F имеет вид

$$F(\varepsilon_{nn}) = \begin{cases} E\varepsilon_{nn} \text{ при } \varepsilon_c < \varepsilon_{nn} < \varepsilon_p; \\ 0 \text{ при } \varepsilon_{nn} \leqslant \varepsilon_c \text{ или } \varepsilon_p \leqslant \varepsilon_{nn}, \end{cases} \tag{2}$$



Фиг. 1

т. е. волокна деформируются по закону Гука при растяжении до деформации ε_p и при сжатии до деформации ε_c. Достижение этих предельных деформаций приводит к хрупкому разрушению волокна. E — модуль Юнга арматуры.

Предположим, что арматура работает упруго, т. е. разрушения волокон еще не происходило. Учитывая зависимость $F(\varepsilon_{nn})=\mathrm{E}\varepsilon_{nn}$, из (1) получим упругую связь (закон Гука) между тензорами напряжений и деформаций. Коэффициенты Ламе композитного материала λ_k и μ_k будут равны в этом случае

$$\lambda_k=(1-\eta)\lambda_c+1/15\eta\mathrm{E};$$
$$\mu_k=(1-\eta)\mu_c+1/15\eta\mathrm{E}.$$

Решать задачу удобнее в сферической системе координат r, θ, φ. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть задачу для одного фиксированного луча, направленного вдоль радиуса шара, например вдоль оси x_3. Направим орты $\mathbf{r}^0$, $\boldsymbol{\theta}^0$, $\boldsymbol{\varphi}^0$ сферической системы координат параллельно осям $0x_3$, $0x_1$, $0x_2$ соответственно. Перепишем уравнения (1) в этой системе координат, вводя углы α и ψ (фиг. 1), которые задают направление вектора $\mathbf{n}$. Опустим при этом индексы у λ_c и μ_c.

$$\sigma_r=(1-\eta)(\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_r)+\eta\int_0^{\pi/2}F(\varepsilon_{nn})\sin^2\psi\cos\psi d\psi; \tag{3}$$

$$\sigma_\theta=(1-\eta)(\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_\theta)+\frac{\eta}{2\pi}\iint_\Omega F(\varepsilon_{nn})\sin^2\alpha\cos^2\psi d\Omega;$$

$$\sigma_\varphi=(1-\eta)(\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_\varphi)+\frac{\eta}{2\pi}\iint_\Omega F(\varepsilon_{nn})\cos^2\alpha\cos^2\psi d\Omega.$$

Вследствие симметрии задачи $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi$, $\sigma_\theta=\sigma_\varphi$, а компоненты с разными индексами равны нулю [3]. Осевая деформация волокна

$$\varepsilon_{nn}=\varepsilon_r\sin^2\psi+\varepsilon_\theta\cos^2\psi\sin^2\alpha+\varepsilon_\varphi\cos^2\psi\cos^2\alpha.$$

Так как $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi$, то можно записать

$$\varepsilon_{nn}=\varepsilon_r\sin^2\psi+\varepsilon_\theta\cos^2\psi. \tag{4}$$

Следовательно, ε_{nn} не зависит от угла α. Для суммы $\sigma_\theta+\sigma_\varphi$ также исчезает зависимость от α:

$$\sigma_\theta+\sigma_\varphi=2(1-\eta)[\lambda\varepsilon+\mu(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi)]+\eta\int_0^{\pi/2}F(\varepsilon_{nn})\cos^3\psi d\psi. \tag{5}$$

Учитывая (2), перепишем (3), (5) в следующем виде:

$$\sigma_r = (1 - \eta)(\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_r) + \eta \int_\gamma^\delta E\varepsilon_{nn} \sin^2\psi \cos\psi d\psi; \tag{6}$$

$$\sigma_\theta + \sigma_\varphi = 2(1 - \eta)[\lambda\varepsilon + \mu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi)] + \eta \int_\gamma^\delta E\varepsilon_{nn} \cos^3\psi d\psi.$$

Углы γ и δ определяются из соотношений

$$\varepsilon_\gamma \equiv \varepsilon_r \sin^2\gamma + \varepsilon_\theta \cos^2\gamma = \varepsilon_p;$$
$$\varepsilon_\delta \equiv \varepsilon_r \sin^2\delta + \varepsilon_\theta \cos^2\delta = \varepsilon_c.$$

Отсюда получаем

$$\sin^2\gamma = (\varepsilon_p - \varepsilon_\theta)/(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta);$$
$$\sin^2\delta = (\varepsilon_\theta - \varepsilon_c)/(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r).$$

Следовательно,

$$\gamma = \begin{cases} 0 \text{ при } \varepsilon_\gamma < \varepsilon_p; \\ \arcsin\,[(\varepsilon_p - \varepsilon_\theta)/(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)]^{1/2} \text{ при } \varepsilon_\gamma = \varepsilon_p; \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} \pi/2 \text{ при } \varepsilon_\delta > \varepsilon_c; \\ \arcsin\,[(\varepsilon_\theta - \varepsilon_c)/(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)]^{1/2} \text{ при } \varepsilon_\delta = \varepsilon_c. \end{cases}$$

Интегрируя (6) по ψ с учетом (4), получим

$$\sigma_r = (w+g)\varepsilon_r + (v+c)\varepsilon_\theta; \tag{7}$$
$$\sigma_\theta + \sigma_\varphi = (v+c)\varepsilon_r + (2w+v+t)\varepsilon_\theta,$$

где

$$v = 2(1-\eta)\lambda; \quad w = (1-\eta)(\lambda+2\mu);$$
$$g = 1/5\eta E(\sin^2\delta - \sin^2\gamma);$$
$$c = 1/5\eta E[\sin^3\delta(\cos^2\delta + 2/3) - \sin^3\gamma(\cos^2\gamma + 2/3)];$$
$$t = 1/5\eta E[25/8(\sin\delta - \sin\gamma) + 25/48(\sin 3\delta - \sin 3\gamma) + 1/16(\sin 5\delta - \sin 5\gamma)].$$

Выразим деформации через перемещения u [3]:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = u/r$$

и подставим в (7):

$$\sigma_r = (w+g)\frac{du}{dr} + (v+c)\frac{u}{r}; \tag{8}$$
$$\sigma_\theta + \sigma_\varphi = (v+c)\frac{du}{dr} + (2w+v+t)\frac{u}{r}.$$

Так как λ и μ положительны, а δ больше, чем γ, то $w+g > 0$. Уравнение равновесия в сферической системе координат имеет вид [3]

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \tag{9}$$

Однако удобней преобразовать его к виду

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi)}{r} = 0. \tag{10}$$

Так как $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, то из (10) всегда следует (9), но в (10) не входит угол α. Подставим (8) в (10). После несложных преобразований получим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \frac{2}{r^2}u + \frac{1}{w+g}\left[\frac{dg}{dr}\frac{du}{dr} + \left(\frac{1}{r}\frac{dc}{dr} + \frac{2g+c-t}{r^2}\right)u\right] = 0. \tag{11}$$

Краевые условия возьмем в таком виде:

$$\begin{aligned} &r=a: \quad u(a)=U; \\ &r=b: \quad \sigma_r(b)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Задачу (11), (12) будем решать численно, вводя итерации по u, так как уравнение (11) нелинейное. Аппроксимируем уравнение (11) разностной схемой со вторым порядком точности [4]:

$$\frac{u_{k+1}^{(i+1)} - 2u_k^{(i+1)} + u_{k-1}^{(i+1)}}{h^2} + \frac{2}{r_k}\frac{u_{k+1}^{(i+1)} - u_{k-1}^{(i+1)}}{2h} - \frac{2}{r_k^2}u_k^{(i+1)} + f_k^{(i)} = 0, \tag{13}$$

где

$$f_k^{(i)} = \frac{1}{w+g_k^{(i)}}\left[\frac{g_{k+1}^{(i)} - g_{k-1}^{(i)}}{2h}\cdot\frac{u_{k+1}^{(i)} - u_{k-1}^{(i)}}{2h} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{r_k}\frac{c_{k+1}^{(i)} - c_{k-1}^{(i)}}{2h} + \frac{2g_k^{(i)} + c_k^{(i)} - t_k^{(i)}}{r_k^2}\right)u_k^{(i)}\right].$$

Индекс внизу означает номер точки на радиусе шара ($k=1, 2, \ldots, n-1$), индекс вверху в скобках — номер шага по итерации, с которого берется значение функции.

Уравнение (13) перепишем в следующем виде:

$$A_k u_{k-1}^{(i+1)} - C_k u_k^{(i+1)} + B_k u_{k+1}^{(i+1)} = -F_k^{(i)}.$$

Здесь

$$A_k = 1 - \frac{h}{r_k}; \quad B_k = 1 + \frac{h}{r_k}; \quad C_k = 2\left(1 + \frac{h^2}{r_k^2}\right); \quad F_k^{(i)} = h^2 f_k^{(i)}. \tag{14}$$

Приравнивая, согласно (12), $\sigma_r(b)$ в формуле (8) нулю, получим

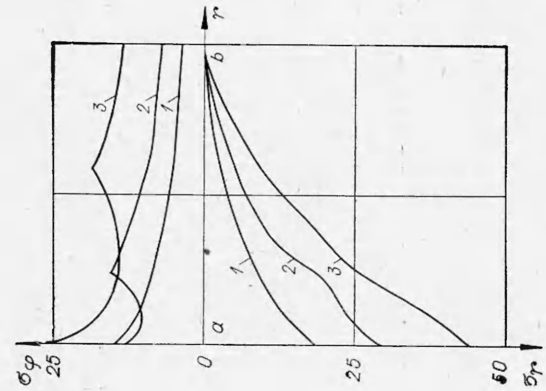
$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=b} + \frac{v+c}{w+g}\frac{u(b)}{b} = 0.$$

Граничные условия аппроксимируем разностной схемой со вторым порядком точности:

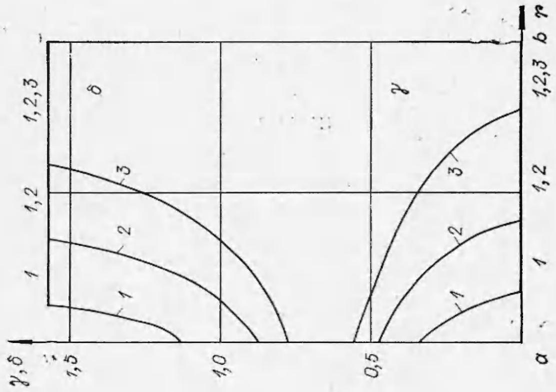
$$\begin{aligned} &u_0 = U; \\ &\frac{u_{n-2}^{(i+1)} - 4u_{n-1}^{(i+1)} + 3u_n^{(i+1)}}{2h} + \varkappa u_n^{(i+1)} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где

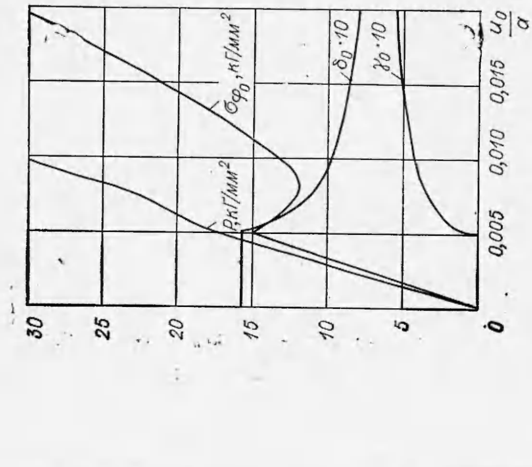
$$\varkappa = \frac{v + C_n^{(i)}}{b\left(w + g_n^{(i)}\right)}.$$



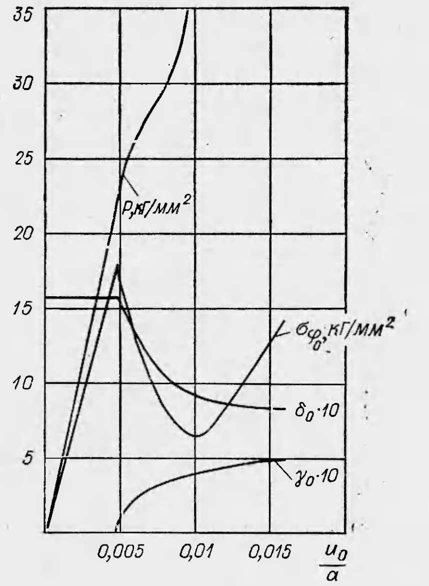
Фиг. 4



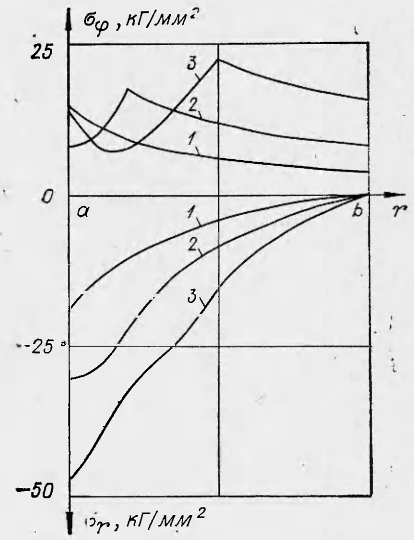
Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 5



Фиг. 6

Будем искать решение методом левой прогонки [4]. Используя второе уравнение из (15), найдем прогоночные коэффициенты $\xi_n^{(i+1)}$ и $\eta_n^{(i+1)}$:

$$\xi_n^{(i+1)} = \frac{4A_{n-1} - C_{n-1}}{(3 + 2h\varkappa)\, A_{n-1} - B_{n-1}};$$

$$\eta_n^{(i+1)} = \frac{\left[4 - (3 + 2h\varkappa)\, \xi_n^{(i+1)}\right] F_{n-1}^{(i)}}{(3 + 2h\varkappa)\, C_{n-1} - 4B_{n-1}}.$$

Здесь A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1} и $F_{n-1}^{(i)}$ выражаются по формулам (14).

Из первого уравнения (12) определяем u_0. Затем находим остальные перемещения $u_k^{(i+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Через $u_k^{(i+1)}$ определяем ε_{r_k}, ε_{θ_k}, ε_{φ_k}:

$$\varepsilon_{r_0} = \frac{-3u_0 + 4u_1^{(i+1)} - u_2^{(i+1)}}{2h};$$

$$\varepsilon_{r_n} = \frac{u_{n-2}^{(i+1)} - 4u_{n-1}^{(i+1)} + 3u_n^{(i+1)}}{2h};$$

$$\varepsilon_{r_k} = \frac{u_{k+1}^{(i+1)} - u_{k-1}^{(i+1)}}{2h} \quad (k = 1, \ldots, n - 1);$$

$$\varepsilon_{\theta_k} = \varepsilon_{\varphi_k} = \frac{u_k^{(i+1)}}{r_k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Наконец, из формул (7) определяем σ_{r_k}, σ_{φ_k} и σ_{θ_k}. Так как уравнение (11) нелинейно, вводим итерации по u: определяем $F_k^{(i+1)}$ через найденные $u_k^{(i+1)}$ и повторяем прогонку, не изменяя u_0. Процесс счета начинается с упругого решения. Задача решалась на вычислительной машине М-222.

На фиг. 2—4 приведены результаты расчета армированного шара при следующих исходных данных: $E=7000$ кГ/мм²; $\lambda_c=300$ кГ/мм²; $\mu_c=75$ кГ/мм²; $\varepsilon_p=0{,}005$; $\varepsilon_c=-0{,}01$; $\eta=0{,}1$.

На фиг. 2 показано изменение давления $p=-\sigma_{r_0}$, напряжения σ_{φ_0}, а также величины углов γ_0, δ_0 на внутренней поверхности шара в зависимости от ее перемещения u_0.

На фиг. 3 показано изменение углов γ и δ в зависимости от радиуса r и давления p (кривые *1*, *2*, *3* — $p=22{,}2$; 36,7; 55,3 кГ/мм² соответственно).

На фиг. 4 приведены графики, показывающие распределение напряжений в стенке сферического сосуда в зависимости от радиуса r и давления p (кривые *1*, *2*, *3* — $u_0=0{,}005$; 0,008; 0,018A соответственно).

На фиг. 5, 6 показано изменение давления $p=-\sigma_{r_0}$, напряжения σ_{φ_0}, величины углов γ_0, δ_0 (фиг. 5) и распределение напряжений в стенке полого шара (фиг. 6) при следующих характеристиках композитного материала: $E=7000$ кГ/мм²; $\lambda_c=300$ кГ/мм²; $\mu_c=75$ кГ/мм²; $\varepsilon_p=0{,}005$; $\varepsilon_c=-0{,}01$; $\eta=0{,}2$ (кривые *1*, *2*, *3* — $u_0=0{,}004$; 0,008; 0,015A).

Поступила 19 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Богачев И. Н., Вайнштейн А. А., Волков С. Д.** Введение в статистическое металловедение. М., «Металлургия», 1972.
2. **Annin B. D.** The constitutive equations and some problems of random fiber composite body. 15—th Polish Solid Mechanics Conference. Abstracts Zakopane, 1973, p. 6—7.
3. **Ильюшин А. А., Ленский В. С.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959.
4. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.