УДК 621.391.2

УВЕЛИЧЕНИЕ МОЩНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ МАСШТАБА НА ОСНОВЕ ГРУППИРОВКИ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

М. А. Райфельд

Новосибирский государственный технический университет,
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: rajfeld@mail.ru

Предложен подход, позволяющий повысить эффективность непараметрических двухвыборочных критериев масштаба, основанный на использовании предварительной группировки исходных наблюдений по уровню. При формировании групп применяются порядковые статистики.

Ключевые слова: ранг, ранговая статистика, непараметрический алгоритм, достаточная статистика, вариационный ряд, выборка, функция распределения, порядковая статистика.

Введение. При решении задач обнаружения сигналов в современных автономных системах обработки данных важная роль принадлежит непараметрическим подходам [1–3]. Основная причина их использования в подобных системах — часто встречающееся требование к стабильности вероятности ложной тревоги α в условиях априорной неопределённости относительно вида и параметров распределения (непараметрической априорной неопределённости). Важным свойством непараметрических решающих статистик, позволяющим стабилизировать вероятность ложной тревоги, является независимость их распределения от распределения исходных наблюдений при гипотезе H_0. Процедуры обнаружения в этом случае строятся с использованием критерия Неймана — Пирсона [4], максимизирующего вероятность правильного обнаружения D при стабилизации вероятности ложной тревоги α. Необходимо отметить, что вследствие ограниченности объёма выборок исходных наблюдений вероятность правильного обнаружения D (при заданной вероятности α) может оказаться достаточно низкой, что приведёт к высокой вероятности пропуска полезного сигнала, недопустимой для нормальной работы системы. Таким образом, актуальной представляется задача создания способа, направленного на увеличение мощности непараметрического решающего правила D с сохранением его главного свойства — стабильности вероятности ложной тревоги α. Основным подходом в повышении мощности непараметрического правила является использование дополнительной информации о параметрах распределения наблюдений (точнее, их оценках, полученных на основе регистрируемых данных).

В представленной работе предлагается универсальный метод увеличения мощности непараметрических ранговых критериев масштаба, лежащий в русле данного подхода, основанный на предварительной пороговой группировке наблюдений с применением порядковых статистик.

Известные непараметрические критерии масштаба. Большинство известных ранговых правил использует для принятия решения наблюдения двух выборок, обычно называемых рабочей и опорной. При этом полагают, что опорная выборка $\mathbf{X}$ всегда состоит из наблюдений шума (помехи), в то время как рабочая $\mathbf{Y}$ (принимаемое решение относится к наблюдениям именно этой выборки) может содержать как шум (гипотеза H_0), так и смесь полезного сигнала с шумом (альтернатива H_1) [5, 6]. Выбор того или иного непараметрического правила определяется типом контраста распределений наблюдений рабочей и опорной выборок при альтернативе H_1. Примерами подобного контраста являются сдвиг Δ и (или) масштабное различие μ распределения наблюдений выборок. Рассмотрим важную в практическом отношении задачу обнаружения полезного сигнала, основанную на масштабном различии распределения наблюдений помехи и её аддитивной смеси с полезным сигналом (при нулевых средних значениях полезного сигнала и помехи и независимости её отсчётов). В ряде случаев к такой постановке задачи обнаружения приходят, если обработка оцифрованного сигнала включает процедуру «выбеливания» окрашенной помехи с помощью адаптивного фильтра, параметры которого оцениваются по реализациям, заведомо не содержащим полезного сигнала [7]. При масштабном различии функции распределения наблюдений при гипотезе $F_0(x)$ и альтернативе $F_1(x)$ удовлетворяют следующему уравнению: $F_0(x) = F_1(\mu x)$, $\mu \geq 1$. При гауссовом распределении исходных наблюдений с неизвестными дисперсиями применение критерия отношения правдоподобия для принятия решения о различии масштаба μ распределений рабочей и опорной выборок приводит к F-критерию. В этом случае решающая статистика F-критерия при гипотезе H_0 подчиняется F-распределению, не зависящему от конкретного значения дисперсии, что позволяет стабилизировать вероятность ложной тревоги правила на заданном уровне. Это параметрическое правило (при гауссовом распределении наблюдений) является также равномерно наиболее мощным, поэтому его мощность можно рассматривать как верхнюю границу, потенциально достижимую непараметрическим алгоритмом. Понятно, что стабилизация вероятности ложной тревоги и максимизация мощности решающего правила имеют место только в предположении гауссова распределения исходных наблюдений, что далеко не всегда выполняется на практике. Как уже отмечалось, для надёжной стабилизации вероятности α при неизвестном виде распределения исходных наблюдений обычно применяют непараметрическое правило. К двухвыборочным непараметрическим критериям масштаба относятся процедуры, использующие ранговые решающие статистики Ансари — Брэдли, Муда и критерий превышающих наблюдений. Эти критерии являются локально наиболее мощными для альтернатив, характеризующихся соответствующими распределениями [8], но уровень их мощности (при одинаковых размере выборок и вероятности α) низок по сравнению с параметрическим правилом, использующим статистику F-критерия и решающим ту же задачу, хотя и в менее общей постановке (рис. 1).

Метод увеличения мощности непараметрических критериев масштаба. Уровень мощности непараметрических критериев масштаба может быть увеличен с учётом дополнительной информации о свойствах (параметрах) распределения, оцениваемых на основе регистрируемых данных. Одним из возможных способов повышения эффективности критерия является использование информации о вероятности попадания наблюдений распределения $P_0(x)$ (или распределений $P_1(x)$, $P_0(x)$) в заданные интервалы. Решающие правила, учитывающие информацию подобного рода, включают процедуру предварительной группировки наблюдений (отнесение наблюдения к одному из нескольких интервалов I). Поскольку интервалы группировки могут быть выбраны таким образом, чтобы средние значения распределений всех интервалов были равны нулю (рис. 2), то справедливо допущение о том, что распределения наблюдений интервалов при гипотезе и альтернативе различаются только параметром масштаба μ_i, зависящим от номера интервала i. Тогда $P_{i0}(x) = P_i(x)$ и $P_{i1}(x) = P_i(x/\mu_i)/\mu_i$. Логарифм отношения правдоподобия в этом случае можно представить в виде

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{k} L_i(\mathbf{X}_i),$$

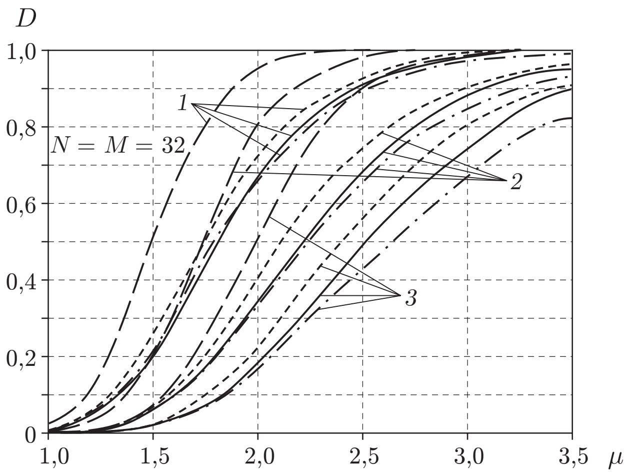

Рис. 1. Эффективность непараметрических критериев масштаба и F-критерия: кривые *1* — $\alpha = 10^{-2}$, *2* — $\alpha = 10^{-3}$, *3* — $\alpha = 10^{-4}$ (штриховые кривые — F-критерий, сплошные — критерий превышающих наблюдений, пунктирные — критерий Муда, штрихпунктирные — критерий Ансари — Брэдли)

где

$$L_i(\mathbf{X}_i) = n_i \ln(p_{i1}/p_{i0}) + \ln(P_i(\mathbf{X}_i/\mu_i)/P_i(\mathbf{X}_i)) \qquad (1)$$

— логарифм отношения правдоподобия для i-го интервала; p_{i0} и p_{i1} — вероятность попадания наблюдений в i-й интервал при гипотезе и альтернативе соответственно; $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ — группы наблюдений, сформированные из рабочей выборки $\mathbf{X}$. Таким образом, частичная решающая статистика i-го интервала опирается на масштабное различие распределений наблюдений и различие вероятностей попадания наблюдения в данный интервал при гипотезе и альтернативе. Необходимо отметить, что при построении решающего правила требуется учитывать локальную зависимость параметра масштаба от номера интервала. Решающее правило может быть реализовано в результате предварительной пороговой группировки (разбиения наблюдений рабочей и опорной выборок на

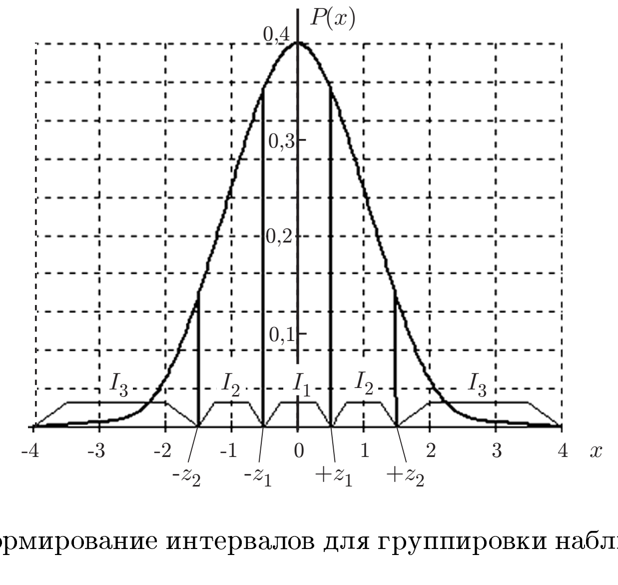

Рис. 2. Формирование интервалов для группировки наблюдений

группы по уровню) и учёта номера группы, к которой принадлежит наблюдение, при вычислении решающей статистики. Разделим область возможных значений Ω наблюдений на k неперекрывающихся интервалов $\mathbf{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$. Оптимальный в смысле максимума мощности решающего правила алгоритм разбиения Ω на интервалы и его параметры (количество интервалов и пороги) определяются свойствами конкретного распределения наблюдений при гипотезе и альтернативе. Если при этом распределения различаются только масштабом, будем применять следующую структуру разбиения области возможных значений Ω:

$$I_1 = \,]-z_1, z_1[,\; I_2 = \,]-z_2, -z_1] \cup [z_1, z_2[, \ldots$$

$$\ldots, I_{k-1} = \,]-z_k, -z_{k-1}] \cup [z_{k-1}, z_k[, \ldots, I_k = \,]-\infty, -z_k] \cup [z_k, \infty[,$$

где $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ — пороги разбиения (см. рис. 2). Для принятия решения используется следующее правило:

$$\delta(S) = \begin{cases} H_1^*, & S > C, \\ H_0^*, & S \le C, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{k} a_i s_i. \tag{3}$$

Коэффициенты a_i в выражении (3) учитывают различный вклад частичных статистик s_i, построенных на основе наблюдений групп с различными значениями μ_i, в формирование результирующей статистики S, обеспечивающей максимальную мощность решающего правила (2). Очевидно, что стабилизация вероятности ложной тревоги становится возможной, если в качестве частичных статистик использовать непараметрические статистики масштаба. Частичная статистика s_i, вычисляемая для интервала I_i, должна быть чувствительна не только к масштабному различию распределений этого интервала, но и к вероятностям p_{i0}, p_{i1} (формула (1)). Все перечисленные выше непараметрические статистики критериев масштаба чувствительны к различиям указанных параметров. Частичная непараметрическая двухвыборочная статистика для i-го интервала s_i будет вычисляться на основе наблюдений частичных рабочей и опорной выборок $\mathbf{X}_i$ и $\mathbf{Y}_i$, состоящих из отсчётов выборок $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, попавших в интервал I_i. Очевидно, что объёмы частичных выборок $\mathbf{X}_i$ и $\mathbf{Y}_i$ (n_i и m_i) при фиксированных размерах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ являются случайными. При этом распределение статистики (2) при гипотезе можно записать в следующем виде:

$$P_S(S/H_0) = \sum_{m_1=0}^{M} \sum_{n_1=0}^{N} \ldots \sum_{m_{k-1}=0}^{M-m_1-\ldots-m_{k-2}} \times$$

$$\times \sum_{n_{k-1}=0}^{N-n_1-\ldots-n_{k-2}} P_S(S/H_0, m_1, \ldots, m_{k-1}, n_1, \ldots, n_{k-1}) \times$$

$$\times\, M!N!/m_1! \ldots m_{k-1}!(M - m_1 - \ldots - m_{k-1})!n_1! \ldots n_{k-1}!(N - n_1 - \ldots - n_{k-1})! \times$$

$$\times\, p_1^{m_1+n_1}\dots p_{k-1}^{m_{k-1}+n_{k-1}}(1-p_1-\dots-p_{k-1})^{M+N-(m_1+n_1)-\dots-(m_{k-1}+n_{k-1})}, \qquad (4)$$

где $p_i = p_{i0}$, а $P_S(S/H_0, m_1, \dots, m_{k-1}, n_1, \dots, n_{k-1})$ — распределение непараметрической статистики (3) при фиксированных размерах выборок соответствующих интервалов при гипотезе. Хотя условное распределение $P_S(S/H_0, m_1, \dots, m_{k-1}, n_1, \dots, n_{k-1})$ и не зависит от распределения исходных наблюдений (поскольку в этом случае распределения наблюдений частичных рабочих и опорных выборок, соответствующих каждому интервалу, одинаковы), $P_S(S/H_0)$ зависит от распределения исходных наблюдений через вероятности p_i. Исследование выражения (4) на экстремум по вероятностям p_i показало, что при заданном количестве интервалов k, а также фиксированных значениях N и M максимум α достигается, когда $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$ $\Big($при этом $p_1p_2\dots p_k = \max\limits_{p_1,\dots,p_k}\Big)$. Распределение статистики (4) в этом случае можно рассматривать как наихудшее и использовать минимаксный подход [9]. Отметим, что вероятность ложной тревоги снижается при уменьшении произведения p_i (например, когда $p_1 = p_2 = \dots = 0$, а $p_k = 1$). Другой способ стабилизации вероятности ложной тревоги может быть основан на применении в качестве порогов разбиения $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ порядковых статистик опорной выборки. При этом совместное распределение частичных статистик не будет зависеть от вероятностей попадания наблюдений в интервалы и, следовательно, в выражение для распределения результирующей статистики не будут входить размеры частичных выборок. Предположим без ограничения общности рассуждения, что размер опорной выборки M нечётный. Пусть $p_1 = (2l_1-1)/M$, $p_2 = 2(l_2-l_1)/M, \dots, p_{k-1} = 2(l_{k-1}-l_{k-2})/M$, $p_k = (M-2l_k+1)/M$, где $l_1, l_2, \dots, l_k$ — целые положительные числа, упорядоченные по возрастанию, при этом $2l_k \le N$. Тогда границы интервала $I_1 =]z_{12}, z_{11}[$ можно определить следующим образом:

$$z_{11} = y^{(q+l_1)}, \quad z_{12} = y^{(q-l_1)};$$

$$I_2 =]z_{22}, z_{12}] \cup [z_{11}, z_{21}[, \quad z_{21} = y^{(q+l_2)}, \quad z_{22} = y^{(q-l_2)};$$

$$I_k =]-\infty, z_{k2}] \cup [z_{k1}, \infty[, \quad z_{k1} = y^{(q+l_k)}, \quad z_{k2} = y^{(q-l_k)}.$$

В последних выражениях $y^{(i)}$ является i-й порядковой статистикой выборки, а $q = (M-1)/2+1$. Порядковые статистики представляют собой последовательность $z_{k2}, z_{(k-1)2}, \dots, z_{12}, z_{11}, \dots, z_{(k-1)1}, z_{k1}$. Покажем, как применять описанный выше способ построения решающего правила, когда в качестве частичных статистик берутся статистики непараметрического критерия превышающих наблюдений [7]:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \nu_i, \quad \nu_i = \begin{cases} 0, & y_{\min} < x_i < y_{\max}, \\ 1, & x_i < y_{\min} \text{ либо } x_i > y_{\max}. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь T — решающая статистика; $y_{\min}, y_{\max}$ — минимальный и максимальный элементы опорной выборки $\mathbf{Y}$; x_i — отсчёт рабочей выборки $\mathbf{X}$. Частичная статистика T_i рассчитывается для наблюдений выборок $\mathbf{Y}_i$ и $\mathbf{X}_i$, причём границы каждого интервала представляют собой соответствующие порядковые статистики, рассчитанные на основе опорной выборки. Можно показать, что совместное распределение частичных статистик $T_1, T_2, \dots, T_k$

при гипотезе $P(T_1, T_2, \ldots, T_k/H_0)$ не зависит от распределения исходных наблюдений и задаётся выражением

$$P(T_1, T_2, \ldots, T_k/H_0) = C_N^{T_k} \frac{M!}{(q-l_k)!(2l_k-1)!} \sum_{i=0}^{T_k} (-1)^i C_{T_k}^i \frac{(N-T_k+i+l_k+q-2)!}{(N-T_k+i-1)!} \times$$

$$\times C_{N-T_k}^{T_{k-1}} \frac{(M-2)!}{(q-l_{k-1})!(2l_{k-1}-1)!} \sum_{i=0}^{T_{k-1}} (-1)^i C_{T_{k-1}}^i \frac{(N-T_k-T_{k-1}+i+l_{k-1}+q-2)!}{(N-T_k-T_{k-1}+i-1)!} \ldots$$

$$\ldots C_{N-T_k-\ldots-T_2}^{T_1} \frac{(M-2(k-1))!}{(q-l_1)!(2l_1-1)!} \sum_{i=0}^{T_1} (-1)^i C_{T_1}^i \frac{(N-T_k-T_{k-1}-\ldots-T_2+i+l_1+q-2)!}{(N-T_k-T_{k-1}-\ldots-T_2+i-1)!}. \quad (6)$$

Рассмотрим несколько частных случаев назначения порогов группировки, приводящих к эффективным алгоритмам. Пусть $k=1$ и l_1 — любое целое число из интервала $[1, q-1]$. В этом случае приходим к алгоритму (5) и распределение решающей статистики T при гипотезе имеет вид

$$P(T/H_0) = C_N^T M(M-1)/C_{N+M}^{T+2}(T+2). \quad (7)$$

Другой важный частный случай имеет место, когда $l_k = q-1$ и $l_{k-1} = l_k - 1, \ldots, l_1 = l_2 - 1$. Здесь $m_i = 2$ и решающая статистика представляет собой сумму наблюдений рабочей выборки, попадающих между k последними порядковыми статистиками опорной выборки, взятыми с соответствующими весами. Распределение $P(T_1, T_2, \ldots, T_k/H_0)$ имеет достаточно простой вид:

$$P(T_1, T_2, \ldots, T_k/H_0) = (T_1+1)(T_2+1)\ldots(T_k+1) \frac{C_M^{2k}}{C_{M+N}^{2k}} \frac{C_N^{T_1+T_2+\ldots+T_k}}{C_{M+N-2k}^{T_1+T_2+\ldots+T_k}}. \quad (8)$$

Обозначим через T_S статистику, формируемую в соответствии с (3) на основе частичных статистик $T_1, T_2, \ldots, T_k$. С учётом выражения (3) распределение $P_S(T_S/H_0)$ находится следующим образом:

$$P_S(T_S/H_0) = \frac{C_M^{2k}}{C_{M+N}^{2k}} \sum_{T_2} \sum_{T_3} \ldots \sum_{T_k} \Big(\Big(T_S - \sum_{i=2}^{k} a_i T_i\Big) \Big/ a_1 + 1\Big)(T_2+1)\ldots(T_k+1) \times$$

$$\times C_N^{T_S/a_1 + \sum_{i=2}^{k} T_i(1-a_i/a_1)} \Big/ C_{M+N-2k}^{T_S/a_1 + \sum_{i=2}^{k} T_i(1-a_i/a_1)}. \quad (9)$$

Определение мощности правила обнаружения, использующего статистику T_S, возможно численным методом с учётом выражения для совместного распределения частичных T статистик при альтернативе $P(T_1, T_2, \ldots, T_k/H_1)$. Для вычисления мощности правила (2), (3) и установления оптимальных коэффициентов a_i потребуется конкретизация вида плотностей $P_0(x)$ и $P_1(x)$. Задачи нахождения распределения $P_S(T_S/H_1)$, а также оптимизация a_i могут быть существенно упрощены, если использовать гауссову аппроксимацию распределения $P(T_i/H_1)$ и предположение о независимости частичных статистик $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

В этом случае для H_0 распределение частичной статистики рассчитывается в соответствии с выражением (7) при $m_i = p_{i0}M$, $n_i = p_{i0}N$, а для H_1 — с помощью того же выражения, но уже при $m_i = p_{i0}M$, $n_i = p_{i1}N$. Математическое ожидание M_T и дисперсия σ_T^2 распределения (7) вычисляются следующим образом: $M_T = 2N/(M+1)$ и $\sigma_T^2 = 2N(M-1)/((M+1)(M+2))$. С учётом $m_i = 2$ и $n_i = 2\gamma_i$ $(\gamma_i = p_{i1}/p_{i0})$ при $M = N$ имеем $M_{T_i} = 4/3\gamma_i$, $\sigma_{T_i}^2 = 1/3\gamma_i$ при H_1 и $M_{T_i} = 4/3$, $\sigma_{T_i}^2 = 1/3$ при H_0. Выбор коэффициентов a_i, максимизирующих мощность правила, сводится к максимизации «расстояния» между гипотезой и альтернативой:

$$\max_{a_1, a_2, \ldots, a_k} \frac{M_{T_S, H_1} - M_{T_S, H_0}}{\sqrt{\sigma_{T_S, H_1}^2 + \sigma_{T_S, H_0}^2}} =$$

$$= \max_{a_1, a_2, \ldots, a_k} \frac{4/3((\gamma_1 - 1)a_1 + (\gamma_2 - 1)a_2 + \ldots + (\gamma_k - 1)a_k)}{\sqrt{1/3((\gamma_1 + 1)a_1^2 + (\gamma_2 - 1)a_2^2 + \ldots + (\gamma_k - 1)a_k^2)}}. \tag{10}$$

С помощью численных методов получена зависимость мощности правила, применяющего статистику T_S, от параметра масштаба μ (рис. 3). Были исследованы решающие правила, использующие статистики T_S с разным количеством групп $(k = 3, 4, 5)$, формируемых с учётом соответствующих порогов:

$$z_{22} = y^{(1)}, \quad z_{12} = y^{(2)}, \quad z_{11} = y^{(63)}, \quad z_{21} = y^{(64)};$$

$$z_{32} = y^{(1)}, \quad z_{22} = y^{(2)}, \quad z_{12} = y^{(3)}, \quad z_{11} = y^{(62)}, \quad z_{21} = y^{(63)}, \quad z_{31} = y^{(64)};$$

$$z_{42} = y^{(1)},\ z_{32} = y^{(2)},\ z_{22} = y^{(3)},\ z_{12} = y^{(4)},\ z_{11} = y^{(61)},\ z_{21} = y^{(62)},\ z_{31} = y^{(63)},\ z_{41} = y^{(64)}.$$

При этом коэффициенты a_i были оптимизированы для нормального распределения с параметром масштаба $\mu = 1{,}5$. Коэффициенты $\{a_k, \ldots, a_1\}$ в этом случае оказались равными $\{1{,}598,\ 0{,}798,\ 0{,}534\}$, $\{1{,}781,\ 0{,}918,\ 0{,}614,\ 0{,}415\}$ и $\{2{,}147,\ 1{,}107,\ 0{,}740,\ 0{,}5,\ 0{,}324\}$.

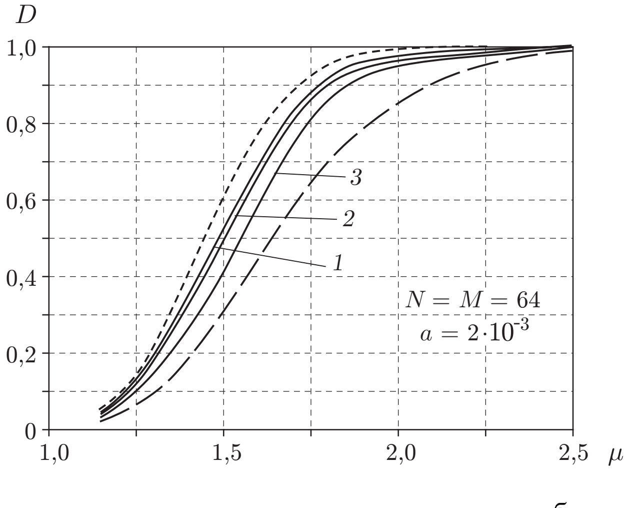

Рис. 3. Увеличение мощности критерия превышающих наблюдений в результате предварительной группировки данных: кривые *1* — $k = 5$, *2* — $k = 4$, *3* — $k = 3$ (пунктирная кривая — F-критерий, сплошные — критерий превышающих наблюдений (используется предварительная группировка с k группами), штриховая — критерий превышающих наблюдений без предварительной группировки $(k = 1)$)

Анализ результатов, получаемых при использовании предлагаемого подхода. Результаты работы модифицированного непараметрического алгоритма превышающих наблюдений (см. рис. 3) демонстрируют положительный эффект (достаточно существенный выигрыш по мощности по сравнению с классическим правилом), который достигнут с помощью предлагаемого способа предварительной группировки наблюдений и частичных статистик этого алгоритма в соответствии с правилом (3). При гауссовом распределении исходных наблюдений мощность этого алгоритма приближается к мощности F-критерия, что свидетельствует об эффективности использования модифицированным правилом дополнительной информации о распределении, полученной на основе регистрируемых данных. То, что подход является адаптивным (оценки вероятностей попадания в интервалы строятся на основе наблюдаемых данных), служит ещё одним его преимуществом. При этом, как следует из выражений (8), (9), сохраняется независимость распределения решающей статистики алгоритма от распределения исходных данных, что гарантирует стабильность вероятности ложной тревоги α.

Заключение. Рассматриваемый в представленной работе подход к увеличению мощности непараметрических критериев является достаточно эффективным и универсальным. Его легко встроить в уже существующую технологию обработки сигналов. Предлагаемый подход обладает устойчивостью характеристик, что является важной его чертой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шахтарин Б. И.** Обнаружение сигналов. М.: Гелиос АРВ, 2006. 488 с.
2. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Синтез структуры семейства непараметрических решающих функций в задаче распознавания образов // Автометрия. 2011. **47**, № 4. С. 76–82.
3. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Сравнение эмпирической и предлагаемой функций распределения случайной величины на основе непараметрического классификатора // Автометрия. 2012. **48**, № 1. С. 45–49.
4. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез: Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 408 с.
5. **Салов Г. И.** Новый статистический критерий для задач с двумя и тремя выборками, более мощный, чем критерии Вилкоксона и Уитни // Автометрия. 2011. **47**, № 4. С. 58–70.
6. **Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др.** Теория обнаружения сигналов /Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.
7. **Райфельд М. А., Спектор А. А.** Непараметрический метод обнаружения сигналов от сейсмически активных объектов // Автометрия. 2005. **41**, № 6. С. 88–97.
8. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев: Пер с англ. М.: Наука, 1971. 376 с.
9. **Райфельд М. А.** Использование группировки для увеличения мощности непараметрического критерия, основанного на превышающих наблюдениях // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2006. № 2. С. 28–35.

Поступила в редакцию 28 февраля 2011 г.