УДК 532.501.34 : 532.62

К УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКИХ ПЛЕНОК

В. Г. Неволин

(Пермь)

Во многих процессах, связанных с добычей и обогащением полезных ископаемых, образуется большое количество пены, которую необходимо или разрушать (гасить), или стабилизировать. В связи с этим в качестве модели пены представляет интерес рассмотреть задачу об устойчивости свободной жидкой пленки [1].

1. Рассматривается устойчивость слоя вязкой несжимаемой жидкости толщины h со свободными границами. Решение ищется в декартовой системе координат, плоскость (x, y) которой совпадает с верхней невозмущенной поверхностью жидкости, а ось z направлена вертикально вверх.

Равновесное состояние нашей системы запишется в виде

$$\mathbf{v}_i^0 = 0, \quad \zeta_i^0 = 0, \quad p_i^0 = -\rho_i g z + \mathrm{const}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$ — скорость жидкости; ζ — смещение поверхности от положения равновесия; p — давление; ρ — плотность жидкости; $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$— ускорение силы тяжести; $i = 1, 2$ — номер жидкости (жидкость с $i=1$ заполняет область $-h \leqslant z \leqslant 0$, а с $i = 2$ заполняет области $z \geqslant 0$ и $z \leqslant -h$).

Исследуем устойчивость равновесия (1.1), для чего обычным образом внесем возмущения скорости и давления. Выбирая в качестве единиц длины, времени, скорости и давления соответственно

$$[\alpha/(\rho_1+\rho_2)g]^{1/2}, \quad [\alpha/(\rho_1+\rho_2)g^3]^{1/4}, \quad [\alpha g/(\rho_1+\rho_2)]^{1/4} \text{ и } [\alpha(\rho_1+\rho_2)g]^{1/2},$$

запишем линеаризованную систему уравнений движения в виде [2]

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i + \frac{1}{A_i}\nabla^2 \mathbf{v}_i, \quad \nabla \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

где $\beta_i \equiv \rho_i/(\rho_1+\rho_2)$; $A_i \equiv \nu_i^{-1}[\alpha^3/g(\rho_1+\rho_2)^3]^{1/4}$; α, ν—коэффициенты поверхностного натяжения и кинематической вязкости; $1/A_2 = 0$.

Считая смещение поверхности от положения равновесия малым, имеем на границе раздела следующее [2]:

при $z = 0$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = w_1 = w_2, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w_1 = 0; \tag{1.3}$$

$$p_1 - p_2 = (\beta_1 - \beta_2)\zeta_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\zeta_1 + \frac{2\beta_1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial z}; \tag{1.4}$$

при $z = -H$ (H — безразмерная толщина пленки)

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = w_1 = w_2, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w_1 = 0; \tag{1.5}$$

$$p_1 - p_2 = (\beta_1 - \beta_2)\zeta_2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\zeta_2 + \frac{2\beta_1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial z}; \tag{1.6}$$

при $|z| \to \infty$ $\mathbf{v}_2 \to 0$.

Решая систему уравнений (1.2) с условиями на границе раздела фаз (1.3), (1.5) и условиями на бесконечности методом преобразований Лапласа по времени t и Фурье по переменным x, y и учитывая, что в начальный момент времени возмущения скорости и смещения поверхности равны нулю и что $\partial \mathbf{v}/\partial x$, $\partial \mathbf{v}/\partial y$, $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y \to 0$ при $|x, y| \to \infty$, получим для скорости и давления следующие выражения:

$$W_1(s) = \left(s + \frac{2k^2}{A_1}\right)\frac{[Z_1(s)\,\mathrm{sh}\,k(H+z) - Z_2(s)\,\mathrm{sh}\,kz]}{\mathrm{sh}\,kH} -$$

$$-\frac{2k^2}{A_1}\frac{\left[Z_1(s)\,\mathrm{sh}\sqrt{k^2+A_1s}\,(H+z) - Z_2(s)\,\mathrm{sh}\sqrt{k^2+A_1s}\,z\right]}{\mathrm{sh}\sqrt{k^2+A_1s}\,H},$$

$$W_2(s) = \begin{cases} sZ_1(s)\exp(-kz) & \text{при } z \geqslant 0, \\ sZ_2(s)\exp k(H+z) & \text{при } z \leqslant -H, \end{cases}$$

$$P_1(s) = -s\left(s + \frac{2k^2}{A_1}\right)\frac{\beta_1}{k}\frac{[Z_1(s)\,\mathrm{ch}\,k(H+z) - Z_2(s)\,\mathrm{ch}\,kz]}{\mathrm{sh}\,kH},$$

$$P_2(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2\beta_2}{k}Z_1(s)\exp(-kz) & \text{при } z \geqslant 0, \\ \dfrac{s^2\beta_2}{k}Z_2(s)\exp k(H+z) & \text{при } z \leqslant -H, \end{cases}$$

где $W(s)$, $Z(s)$,$P(s)$—трансформы Лапласа величин $w(t)$, $\zeta(t)$, $p(t)$; $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ — волновой вектор; $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$. Подставляя это решение в условия (1.4), (1.6), получим для $Z_i(s)$ систему уравнений

$$(1.7)\quad s^2\beta_2 Z_i(s) + \left(s + \frac{2k^2}{A_1}\right)^2\beta_1\frac{[Z_i(s)\,\mathrm{ch}\,kH - Z_j(s)]}{\mathrm{sh}\,kH} + [k^3 - (-1)^i(\beta_1 - \beta_2)k]\times$$

$$\times Z_i(s) - \beta_1\frac{4k^3}{A_1^2}\sqrt{k^2+A_1s}\,\frac{\left[Z_i(s)\,\mathrm{ch}\sqrt{k^2+A_1s}\,H - Z_j(s)\right]}{\mathrm{sh}\sqrt{k^2+A_1s}\,H} = 0,\quad i,j=1,2,\ i\neq j.$$

2. Предполагая вязкость жидкости малой, т. е. $A_1 \gg 1$, совершив обратное преобразование Лапласа [3], получим для $\zeta_i(t)$ с точностью до $1/A$ вместо (1.7) систему уравнений

$$(2.1)\quad (\beta_1 + \beta_2\,\mathrm{th}\,kH)\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} + 2\delta\beta_1\frac{d\zeta_i}{dt} - \frac{\beta_1}{\mathrm{ch}\,kH}\left(\frac{d^2\zeta_j}{dt^2} + 2\delta\frac{d\zeta_j}{dt}\right) +$$

$$+ \zeta_i\Omega_{0i}^2\,\mathrm{th}\,kH = 0;\quad i,j = 1,2,\quad i\neq j,$$

где $\delta \equiv 2k^2/A_1$; $\Omega_{0i}^2 \equiv k^3 - (-1)^i(\beta_1 - \beta_2)k$.

Из этих уравнений следует, что неустойчивость жидкой пленки (пены) обусловлена неустойчивостью Рэлей—Тейлора, поскольку $\Omega_{02}^2 < 0$ при $k < 1$. Отсюда становится ясным, почему при высоких частотах акустическое или вибропеногашение не всегда эффективно. Поскольку в этом случае $\Omega_{0i}^2 = k^3 - (-1)^i(\beta_1 - \beta_2)k + (-1)^i q_i\cos\Omega t$, где q_i и Ω — безразмерные амплитуда и частота модуляции, в системе возможна динамическая стабилизация [4, 5].

Решение системы (2.1) будем искать в виде $\zeta_i = a_i\exp(\lambda t)$, где a_i — постоянные. Подставляя это решение в систему уравнений, получим для λ уравнение четвертого порядка

$$(2.2)\quad \lambda^2\{[\lambda(\beta_1 + \beta_2\,\mathrm{th}\,kH) + 2\delta\beta_1]^2 - \beta_1^2(\lambda + 2\delta)^2/\mathrm{ch}^2kH\} +$$

$$+ \lambda[\lambda(\beta_1 + \beta_2\,\mathrm{th}\,kH) + 2\delta\beta_1](\Omega_{01}^2 + \Omega_{02}^2)\,\mathrm{th}\,kH + \Omega_{01}^2\Omega_{02}^2\,\mathrm{th}^2\,kH = 0.$$

В случае, когда пленка жидкости граничит с вакуумом, т. е. $\beta_2 \equiv 0$,

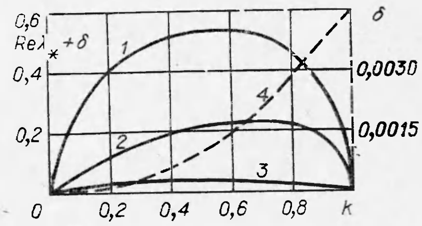
$\beta_1 = 1$, уравнение (2.2) упростится и примет вид

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda)^2 + (\lambda^2 + 2\delta\lambda)\frac{(\Omega_{01}^2 + \Omega_{02}^2)\,\mathrm{th}\,kH}{1 - 1/\mathrm{ch}^2 kH} + \frac{\Omega_{01}^2\Omega_{02}^2\,\mathrm{th}^2 kH}{1 - 1/\mathrm{ch}^2 kH} = 0,$$

откуда получим выражение для λ_* — инкремента нарастания, обусловливающего неустойчивость жидкой пленки (пены):

$$(2.3)\quad \lambda_* = -\delta + \left\{-\frac{(\Omega_{01}^2 + \Omega_{02}^2)\,\mathrm{sh}\,2kH}{4(\mathrm{ch}^2 kH - 1)} + \left[\frac{(\Omega_{01}^2 + \Omega_{02}^2)^2\mathrm{sh}^2 2kH}{16(\mathrm{ch}^2 kH - 1)^2} - \frac{\Omega_{01}^2\Omega_{02}^2\,\mathrm{sh}^2 kH}{\mathrm{ch}^2 kH - 1}\right]^{1/2}\right\}^{1/2} + o\left(1/A^{3/2}\right).$$

Рассмотрение случая малой вязкости, как и то, что пленка граничит с вакуумом, не является принципиальным, поскольку учет произвольной вязкости сделает уравнения движения границ пленки очень громоздкими, что затрудняет анализ и практически не повлияет на конечный результат (см., например, [6]).



На фигуре приведен график зависимости $[\mathrm{Re}\lambda_* + \delta]$ от волнового числа поверхностных волн, возбуждающихся на границах раздела, для различных значений толщины пленки: кривая *1* соответствует $H = 1$, *2* — $H = 0{,}5$ и *3* — $H = 0{,}1$. При $k = 1$ $\Omega_{02}^2 \equiv k^3 - k = 0$ и $\lambda_* = -\delta$. Поскольку для воды при $k = 1$ $\delta \ll 1$ (кривая *4*), можно утверждать, что $k = 1$ является границей устойчивости жидкой пленки.

Из этого следует, что возможно существование жидкой (водяной) пленки лишь конечных размеров, а именно пленка жидкости будет устойчива, когда ее размеры не превосходят значения, равного 2π.

Если учесть влияние вязкости воздуха или поверхностно-активного вещества, то возрастает величина диссипации энергии [7, 8], что приводит к увеличению допустимых размеров пленки.

Поступила 22 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шелудко А. Д.** Новое в исследовании тонких слоев.— В сб.: Успехи физической химии. М.: Наука, 1973.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1944.
3. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.
4. **Капица П. Л.** Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5.
5. **Брискман В. А., Черепанов А. А.** Параметрическая стабилизация неустойчивого равновесия жидкости в сообщающихся сосудах.— В сб.: Гидродинамика. Вып. 5. Пермь: изд. ПГУ, 1974, № 316.
6. **Неволин В. Г.** Возбуждение волн на поверхности гелия II.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, вып. 4.
7. **Неволин В. Г.** Параметрическое возбуждение волн на границе раздела.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, вып. 2.
8. **Кирчанов В. С., Неволин В. Г.** Параметрическое возбуждение волн на поверхности жидкости в присутствии нерастворимой пленки.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, вып. 5.