УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ В УПРУГОЙ БАЛКЕ

В. А. Ковтуненко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается модель Кирхгофа упругой балки с поперечным разрезом. На берегах разреза поставлено условие непроникания, предложенное А. М. Хлудневым. Модель равновесия балки с ограничением на разрезе записана в виде вариационного неравенства. С помощью оператора проектирования получено аналитическое решение задачи. Ставится задача выбора оптимальных разрезов для критерия минимального раскрытия. Получены условия нахождения экстремальных форм балки и приведен пример решения задачи.

Постановки задач об упругих телах с разрезами (трещинами) обсуждаются, например, в [1–3]. В данной статье на берегах разреза поставлено условие непроникания, предложенное в [4, 5]. С помощью оператора проектирования получено аналитическое решение задачи, сформулированной в виде вариационного неравенства. Поставлена задача выбора оптимальных разрезов для критерия минимального раскрытия [3]. Для этого решение переписывается в виде зависимости от непрерывной функции, являющейся решением задачи о балке без разреза. Получены условия нахождения экстремальных форм балки. Некоторые подходы к приближенному решению вариационных неравенств для задач с ограничениями приведены в [6–8]. Точные решения вариационных неравенств и задач оптимального управления удается построить только в частных случаях [9, 10].

Задача равновесия балки. Пусть срединная линия балки совпадает с отрезком $\Omega_0 = (0,1)$. В балке имеется поперечный разрез в фиксированной точке y $(0 < y < 1)$. Толщина балки равна $2h$ $(h > 0)$. Ищем функцию $u = (u_1, u_2)$ горизонтальных $u_1(x)$ и вертикальных $u_2(x)$ перемещений точек x срединной линии балки под действием внешней нагрузки $f = (f_1, f_2) \in (L_2(\Omega_0))^2$ (рис. 1). Обозначим $\Omega = \Omega_0 \backslash \{y\}$. Определим основное гильбертово пространство

$$X = \{u \in H^1(\Omega) \times H^2(\Omega), \quad u_1 = u_2 = Du_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ 1\}.$$

Здесь краевые условия соответствуют жесткому защемлению; D — оператор дифференцирования. Введем в X скалярное произведение $(u, v) = \langle Du_1, Dv_1\rangle + \langle D^2u_2, D^2v_2\rangle$ и соответствующую норму $\|u\|^2 = (u, u)$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает интегрирование по Ω_0. Условие непроникания берегов разреза имеет вид [4, 5]

$$[u_1] \geqslant h|[Du_2]|,$$

где $[F] = F(y+0) - F(y-0)$ обозначает скачок функции F. Если $[F] = 0$, то будем писать $F(y)$ вместо $F(y+0) = F(y-0)$. Определим замкнутое выпуклое множество допустимых перемещений $K = \{u \in X,\ [u_1] \geqslant h|[Du_2]|\}$ и функционал энергии балки $\Pi(v) = 0{,}5\|v\|^2 - \langle f, v\rangle$. Задача равновесия балки с разрезом состоит в нахождении минимума $\Pi(v)$ на множестве K:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00896).

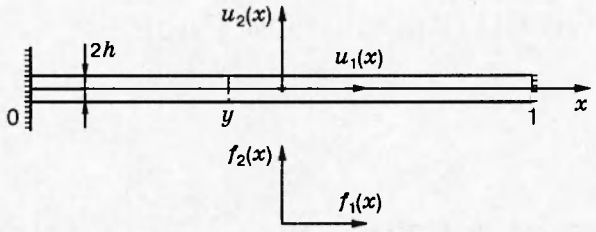

Рис. 1

$$\Pi(u) = \inf_{v \in K} \Pi(v),$$

или в решении эквивалентного вариационного неравенства

$$u \in K, \quad (u, v-u) \geqslant \langle f, v-u \rangle \ \ \forall v \in K. \tag{1}$$

Легко показать единственность решения (1).

Лемма 1. *Если существует решение* $u \in (H^2(\Omega) \times H^4(\Omega)) \cap X$ *краевой задачи*

$$-D^2 u_1 = f_1, \qquad D^4 u_2 = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$[Du_1] = [D^2 u_2] = 0, \quad D^3 u_2(y) = 0, \quad (Du_1(y) + h^{-1} D^2 u_2(y))([u_1] + h[Du_2]) = 0,$$

$$(Du_1(y) - h^{-1} D^2 u_2(y))([u_1] - h[Du_2]) = 0, \quad [u_1] \geqslant h|[Du_2]|, \quad -Du_1(y) \geqslant h^{-1}|D^2 u_2(y)|,$$

то оно является единственным решением вариационного неравенства (1).

Доказательство. Проинтегрировав по частям уравнения краевой задачи, для произвольного $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in X$ получим

$$(u, \xi) - \langle f, \xi \rangle = \langle -D^2 u_1 - f_1, \xi_1 \rangle + \langle D^4 u_2 - f_2, \xi_2 \rangle - [Du_1 \cdot \xi_1] - [D^2 u_2 \cdot D\xi_2] + [D^3 u_2 \cdot \xi_2] =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(Du_1(y) + \frac{1}{h} D^2 u_2(y)\Big)([\xi_1] + h[D\xi_2]) - \frac{1}{2}\Big(Du_1(y) - \frac{1}{h} D^2 u_2(y)\Big)([\xi_1] - h[D\xi_2]).$$

Положим $\xi = v - u, v \in K$, тогда с учетом краевых условий имеем

$$(u, v-u) - \langle f, v-u \rangle = \frac{1}{2}\Big(Du_1(y) + \frac{1}{h} D^2 u_2(y)\Big)([u_1] + h[Du_2]) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(Du_1(y) - \frac{1}{h} D^2 u_2(y)\Big)([u_1] - h[Du_2]) - \frac{1}{2}\Big(Du_1(y) + \frac{1}{h} D^2 u_2(y)\Big)([v_1] + h[Dv_2]) -$$

$$- \frac{1}{2}\Big(Du_1(y) - \frac{1}{h} D^2 u_2(y)\Big)([v_1] - h[Dv_2]) \geqslant 0 \ \ \forall v \in K.$$

Лемма доказана.

Теперь построим явное решение задачи, описанной в лемме 1. Для этого определим функцию $w \in (H^2(\Omega) \times H^4(\Omega)) \cap X$, зависящую от f следующим образом:

$$-D^2 w_1 = f_1, \quad D^4 w_2 = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad Dw_1(y) = D^2 w_2(y) = D^3 w_2(y) = 0.$$

Зная f, найдем w и вычислим величины $\varphi^+ = [w_1] + h[Dw_2]$, $\varphi^- = [w_1] - h[Dw_2]$, $\psi^+ = [w_1] + h^{-1}[Dw_2]$, $\psi^- = [w_1] - h^{-1}[Dw_2]$. Введем функцию $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ (рис. 2):

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^2/2, & x \in (0; y-0), \\ (x-1)^2/2, & x \in (y+0; 1). \end{cases}$$

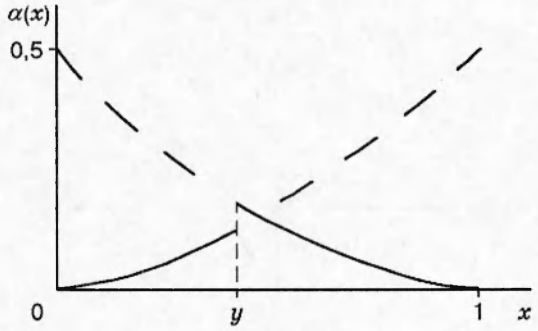

Рис. 2

Отметим следующие свойства функции α:

$$D\alpha(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; y-0), \\ x-1, & x \in (y+0; 1), \end{cases} \qquad D^2\alpha(x) \equiv 1, \quad D^3\alpha(x) \equiv 0,\ x \in \Omega,$$

$$[D\alpha] = -1, \qquad \alpha = D\alpha = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0,\ 1.$$

Построим функцию $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, где $\theta_1 = aD\alpha$, $\theta_2 = b\alpha$, a и b — постоянные. Легко видеть, что $\theta \in (C^\infty(\Omega))^2 \cap X$.

Теорема 1. *Функция $u \in (H^2(\Omega) \times H^4(\Omega)) \cap X$, задаваемая формулой*

$$u = w + \theta, \qquad \theta = (aD\alpha, b\alpha), \tag{2}$$

где

$$(a, b) = \begin{cases} (0,0) & \textit{при} \quad \varphi^+ \geqslant 0, \quad \varphi^- \geqslant 0, \\ ([w_1], [Dw_2]) & \textit{при} \quad \psi^+ < 0, \quad \psi^- < 0, \\ \dfrac{1}{1+h^2}(\varphi^+, h\varphi^+) & \textit{при} \quad \varphi^+ < 0, \quad \psi^- \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{1+h^2}(\varphi^-, -h\varphi^-) & \textit{при} \quad \psi^+ \geqslant 0, \quad \varphi^- < 0, \end{cases} \tag{3}$$

является решением вариационного неравенства (1).

Доказательство. В силу единственности решения (1) достаточно проверить условия леммы 1:

$$-D^2u_1 = -D^2w_1 - D^2\theta_1 = f_1 - aD^3\alpha = f_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$D^4u_2 = D^4w_2 + D^4\theta_2 = f_2 + bD^4\alpha = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$[Du_1] = [Dw_1] + [D\theta_1] = a[D^2\alpha] = 0, \qquad [D^2u_2] = [D^2w_2] + [D^2\theta_2] = b[D^2\alpha] = 0,$$

$$D^3u_2(y) = D^3w_2(y) + D^3\theta_2(y) = bD^3\alpha(y) = 0.$$

Поскольку $Du_1(y) = a$, $D^2u_2(y) = b$, $[u_1] = [w_1] - a$, $[Du_2] = [Dw_2] - b$, то последние два равенства и два неравенства краевой задачи леммы 1 примут вид

$$(a + h^{-1}b)(a + hb - \varphi^+) = 0, \qquad (a - h^{-1}b)(a - hb - \varphi^-) = 0,$$

$$a + hb - \varphi^+ \leqslant 0, \quad a - hb - \varphi^- \leqslant 0, \quad a + h^{-1}b \leqslant 0, \quad a - h^{-1}b \leqslant 0.$$

Выполнение этих условий возможно в следующих четырех вариантах:

1) $a + h^{-1}b = 0, \quad a - h^{-1}b = 0, \quad a + hb - \varphi^+ \leqslant 0, \quad a - hb - \varphi^- \leqslant 0;$

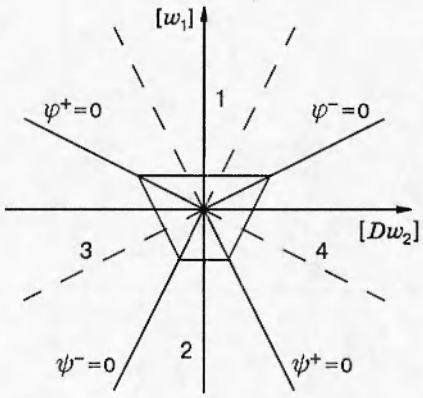

Рис. 3

2) $a + h^{-1}b < 0, \quad a - h^{-1}b < 0, \quad a + hb - \varphi^+ = 0, \quad a - hb - \varphi^- = 0;$

3) $a + h^{-1}b < 0, \quad a - h^{-1}b = 0, \quad a + hb - \varphi^+ = 0, \quad a - hb - \varphi^- \leqslant 0;$

4) $a + h^{-1}b = 0, \quad a - h^{-1}b < 0, \quad a + hb - \varphi^+ \leqslant 0, \quad a - hb - \varphi^- = 0.$

В силу соотношений $2\psi^+ = (1 + h^{-2})\varphi^+ + (1 - h^{-2})\varphi^-$, $2\psi^- = (1 + h^{-2})\varphi^- + (1 - h^{-2})\varphi^+$ их можно записать в виде

1) $a = 0, \quad b = 0, \quad \varphi^+ \geqslant 0, \quad \varphi^- \geqslant 0;$

2) $a = \dfrac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-), \quad b = \dfrac{1}{2h}(\varphi^+ - \varphi^-), \quad \varphi^+ < 0, \quad \varphi^- < 0;$

3) $a = \dfrac{1}{1 + h^2}\varphi^+, \quad b = \dfrac{h}{1 + h^2}\varphi^+, \quad \varphi^+ < 0, \quad \psi^- \geqslant 0;$

4) $a = \dfrac{1}{1 + h^2}\varphi^-, \quad b = -\dfrac{h}{1 + h^2}\varphi^-, \quad \psi^+ \geqslant 0, \quad \varphi^- < 0.$

Перечисленные случаи исчерпывают все возможные соотношения величин $\varphi^+, \varphi^-, \psi^+, \psi^-$ и приводят к формуле (3) для коэффициентов a и b. (На рис. 3 цифры 1–4 соответствуют вариантам для $h < 1$.) Теорема доказана.

Замечание 1. Построенное решение u является проекцией элемента w из X на K [7].

Замечание 2 (гладкость решения). Из формулы (2) и свойств функций w и α следует, что если $f \in H^n(\Omega) \times H^m(\Omega)$, $n, m \geqslant 0$, то $u \in H^{n+2}(\Omega) \times H^{m+4}(\Omega)$, а если $f \in C^n(\Omega) \times C^m(\Omega)$, то $u \in C^{n+2}(\Omega) \times C^{m+4}(\Omega)$.

Замечание 3. После нахождения функции u перемещений точек балки из (2) можно определить остальные физические характеристики состояния балки, например:

— деформацию ε или напряжение $\sigma = \varepsilon = Du$: $\sigma_1 = Dw_1 + a$, $\sigma_2 = Dw_2 + bD\alpha$ (σ_1 — непрерывная в Ω_0 функция);

— потенциальную энергию балки $\Pi(u) = 0{,}5\|u\|^2 - \langle f, u\rangle = -0{,}5\|u\|^2$.

Замечание 4. Пусть $f_2 \equiv 0$, тогда $w_2 \equiv 0 \Longrightarrow \varphi^+ = \varphi^- = \psi^+ = \psi^- = [w_1]$. Поэтому могут реализоваться только варианты 1 и 2 для значений a и b. В любом случае $b = 0$, т. е. $u_2 \equiv 0$.

Пусть $f_1 \equiv 0$, тогда $w_1 \equiv 0$, $\varphi^+ = h^2\psi^+ = -\varphi^- = -h^2\psi^- = h[Dw_2]$ и могут реализоваться варианты 3 или 4, откуда следует $a = -h/(1 + h^2)|[Dw_2]|$, $b = h^2/(1 + h^2)[Dw_2]$. В обоих случаях $a \neq 0$, если $[Dw_2] \neq 0$, поэтому и $u_1 \not\equiv 0$. Таким образом, отсутствие вертикальных нагрузок влечет отсутствие вертикальных перемещений, в отсутствие горизонтальных нагрузок могут возникать горизонтальные перемещения за счет вертикальной нагрузки.

Пример. Пусть $f_1(x) \equiv c_1$, $f_2(x) \equiv c_2$, $y = 0{,}5$, тогда

$$w_1(x) = \begin{cases} (c_1/2)(-x^2 + x), & x \in (0; 0{,}5), \\ (c_1/2)(-(1-x)^2 + (1-x)), & x \in (0{,}5; 1), \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} (c_2/48)(2x^4 - 4x^3 + 3x^2), & x \in (0; 0{,}5), \\ (c_2/48)(2(1-x)^4 - 4(1-x)^3 + 3(1-x)^2), & x \in (0{,}5; 1). \end{cases}$$

Вычислим

$$Dw_2(x) = \begin{cases} (c_2/24)(4x^3 - 6x^2 + 3x), & x \in (0; 0{,}5), \\ (c_2/24)(-4(1-x)^3 + 6(1-x)^2 - 3(1-x)), & x \in (0{,}5; 1), \end{cases}$$

$$[w_1] = 0, \quad [Dw_2] = -\frac{c_2}{24}, \quad \varphi^+ = -\frac{c_2 h}{24}, \quad \varphi^- = \frac{c_2 h}{24}, \quad \psi^+ = -\frac{c_2}{24h}, \quad \psi^- = \frac{c_2}{24h}.$$

Пусть $c_2 \geqslant 0$, тогда $\varphi^+ \leqslant 0$, $\psi^- \geqslant 0$, следовательно, $a = -\dfrac{c_2 h}{24(1+h^2)}$, $b = -\dfrac{c_2 h^2}{24(1+h^2)}$.

Если $c_2 \leqslant 0$, то $\varphi^- \leqslant 0$, $\psi^+ \geqslant 0$ и $a = \dfrac{c_2 h}{24(1+h^2)}$, $b = -\dfrac{c_2 h^2}{24(1+h^2)}$.

Таким образом,

$$u_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big(-c_1 x^2 + \Big(c_1 - \dfrac{|c_2| h}{12(1+h^2)}\Big) x\Big), & x \in (0; 0{,}5), \\ \dfrac{1}{2}\Big(-c_1 (1-x)^2 + \Big(c_1 + \dfrac{|c_2| h}{12(1+h^2)}\Big)(1-x)\Big), & x \in (0{,}5; 1), \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} \dfrac{c_2}{48}\Big(2x^4 - 4x^3 + \Big(3 - \dfrac{h^2}{1+h^2}\Big) x^2\Big), & x \in (0; 0{,}5), \\ \dfrac{c_2}{48}\Big(2(1-x)^4 - 4(1-x)^3 + \Big(3 - \dfrac{h^2}{1+h^2}\Big)(1-x)^2\Big), & x \in (0{,}5; 1). \end{cases}$$

Отметим, что $[u_1] = h|c_2|/(12(1+h^2))$.

Оптимальное управление разрезом. Полученное решение (2) задачи (1) зависит от функции w, которая строится для фиксированного разреза y. Перепишем (2) в виде зависимости от функции $s = (s_1, s_2)$, непрерывной в Ω_0. Для этого определим $s \in (H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)) \times (H^4(\Omega_0) \cap H_0^2(\Omega_0))$ как решение краевой задачи

$$-D^2 s_1 = f_1, \quad D^4 s_2 = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega_0, \qquad s_1 = s_2 = Ds_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ 1.$$

Функция s является функцией перемещений точек срединной линии балки без разреза. Введем функцию $\beta \in C^\infty(\omega)$:

$$\beta(x) = \begin{cases} (x^3 - 3yx^2)/6, & x \in (0; y-0), \\ ((x-1)^3 - 3(y-1)(x-1)^2)/6, & x \in (y+0; 1). \end{cases}$$

Отметим следующие ее свойства: $D^2\beta = x - y$, $D^3\beta \equiv 1$, $D^4\beta \equiv 0$ в Ω, $[D\beta] = y - 0{,}5$, $\beta = D\beta = 0$ при $x = 0$, 1. Для удобства дальнейшей записи введем обозначения: $d_1 = Ds_1(y)$, $d_2 = D^2 s_2(y)$, $d_3 = D^3 s_2(y)$, $\Delta = d_2 - (y - 0{,}5)\, d_3$. Обозначение зависимости этих величин от y опустим.

Лемма 2. *Функция w представима в виде*

$$w_1 = s_1 - d_1 D\alpha, \qquad w_2 = s_2 - d_2\alpha - d_3\beta.$$

Доказательство. В силу свойств функций α и β имеем

$$-D^2w_2 = -D^2s_1 + d_1D^3\alpha = f_1, \quad D^4w_2 = D^4s_2 - d_2D^4\alpha - d_3D^4\beta = f_2,$$

$$Dw_1(y) = Ds_1(y) - d_1D^2\alpha(y) = d_1 - d_1 = 0,$$

$$D^2w_2(y) = D^2s_2(y) - d_2D^2\alpha(y) - d_3D^2\beta(y) = d_2 - d_2 = 0,$$

$$D^3w_2(y) = D^3s_2(y) - d_2D^3\alpha(y) - d_3D^3\beta(y) = d_3 - d_3 = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Функция* $u \in (H^2(\Omega) \times H^4(\Omega)) \cap X$, *задаваемая формулой*

$$u = s - \eta, \qquad \eta = (AD\alpha, B\alpha + d_3\beta), \tag{4}$$

где

$$(A, B) = \begin{cases} (d_1, d_2), & d_1 + h\Delta \geqslant 0, \quad d_1 - h\Delta \geqslant 0, \\ \Big(0, \Big(y - \dfrac{1}{2}\Big)d_3\Big), & d_1 + \dfrac{1}{h}\Delta < 0, \quad d_1 - \dfrac{1}{h}\Delta < 0, \\ \dfrac{h}{1+h^2}\Big(hd_1 + \Delta, d_1 + \dfrac{1}{h}d_2 + h\Big(y - \dfrac{1}{2}\Big)d_3\Big), & d_1 + \dfrac{1}{h}\Delta \geqslant 0, \quad d_1 - h\Delta < 0, \\ \dfrac{h}{1+h^2}\Big(hd_1 - \Delta, -d_1 + \dfrac{1}{h}d_2 + h\Big(y - \dfrac{1}{2}\Big)d_3\Big), & d_1 - \dfrac{1}{h}\Delta \geqslant 0, \quad d_1 + h\Delta < 0, \end{cases} \tag{5}$$

является решением вариационного неравенства (1).

Доказательство. Можно провести доказательство теоремы с помощью леммы 2 и формул (2), (3), однако мы приведем доказательство, аналогичное использованному в теореме 1. Для этого проверим выполнение условий леммы 1:

$$-D^2u_1 = -D^2s_1 + AD^3\alpha = f_1 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad D^4u_2 = D^4s_2 - BD^4\alpha - d_3D^4\beta = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$[Du_1] = -A[D^2\alpha] = 0, \qquad [D^2u_2] = -B[D^2\alpha] - d_3[D^2\beta] = 0,$$

$$D^3u_2(y) = d_3 - BD^3\alpha(y) - d_3D^3\beta(y) = d_3 - d_3 = 0.$$

Поскольку $Du_1(y) = d_1 - A$, $D^2u_2(y) = d_2 - B$, $[u_1] = A$, $[Du_2] = B - (y - 1/2)d_3$, то четыре условия леммы 1 примут вид

$$\Big(d_1 + \frac{1}{h}d_2 - \Big(A + \frac{1}{h}B\Big)\Big)\Big(A + hB - h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3\Big) = 0,$$

$$\Big(d_1 - \frac{1}{h}d_2 - \Big(A - \frac{1}{h}B\Big)\Big)\Big(A - hB + h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3\Big) = 0,$$

$$d_1 + \frac{1}{h}d_2 - \Big(A + \frac{1}{h}B\Big) \leqslant 0, \qquad d_1 - \frac{1}{h}d_2 - \Big(A - \frac{1}{h}B\Big) \leqslant 0,$$

$$A + hB - h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 \geqslant 0, \qquad A - hB + h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 \geqslant 0.$$

Возможны четыре варианта:

1) $$d_1 + \frac{1}{h}d_2 - \Big(A + \frac{1}{h}B\Big) = 0, \qquad d_1 - \frac{1}{h}d_2 - \Big(A - \frac{1}{h}B\Big) = 0,$$

$$A + hB - h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 \geqslant 0, \qquad A - hB + h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 \geqslant 0;$$

2) $$d_1 + \frac{1}{h}d_2 - \Big(A + \frac{1}{h}B\Big) < 0, \qquad d_1 - \frac{1}{h}d_2 - \Big(A - \frac{1}{h}B\Big) < 0,$$

$$A + hB - h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 = 0, \qquad A - hB + h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 = 0;$$

3) $$d_1 + \frac{1}{h}d_2 - \Big(A + \frac{1}{h}B\Big) = 0, \qquad d_1 - \frac{1}{h}d_2 - \Big(A - \frac{1}{h}B\Big) < 0,$$

$$A + hB - h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 \geqslant 0, \qquad A - hB + h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 = 0;$$

4) $$d_1 + \frac{1}{h}d_2 - \Big(A + \frac{1}{h}B\Big) < 0, \qquad d_1 - \frac{1}{h}d_2 - \Big(A - \frac{1}{h}B\Big) = 0,$$

$$A + hB - h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 = 0, \qquad A - hB + h\Big(y - \frac{1}{2}\Big)d_3 \geqslant 0.$$

Разрешив эти уравнения относительно A и B, получим формулу (5). Теорема доказана.

Замечание 5. Можно показать, что $[u_1] = 0$, когда $d_1 \leqslant -(1/h)|\Delta|$. Тогда $(A, B) = (0, (y - 0{,}5)\, d_3)$ и, значит, $u = (s_1, s_2 - d_3((y - 0{,}5)\alpha + \beta))$.

Замечание 6. Из замечания 5 следует, что $u = s$, когда $d_3 = 0$ и $d_1 \leqslant -(1/h)|d_2|$. Тогда, очевидно, решение u является непрерывной в Ω_0 функцией.

Рассмотрим коэффициенты d_1, d_2, d_3, Δ, A, B как функции от y и поставим задачу оптимального управления

$$\inf_{0<y<1} [u_1]. \tag{6}$$

Задача (6) интерпретируется как задача нахождения разреза, дающего минимальное раскрытие [3]. Поскольку $[u_1] = A$, то (6) эквивалентно $\inf\limits_{0<y<1} A$.

Теорема 3. *Пусть $f \in (C(\Omega_0))^2$, тогда экстремум задачи (6) возможен только в таких точках $y \in \Omega_0$, для которых выполнено одно из следующих утверждений:*

1) $f_1(y) = 0, \qquad d_1 \geqslant h|\Delta|;$

2) $d_1 \leqslant \frac{1}{h}|\Delta|;$

3) $f_1(y) = -\frac{1}{h}\Big(y - \frac{1}{2}\Big)f_2(y), \qquad d_1 < h\Delta, \qquad d_1 \geqslant -\frac{1}{h}\Delta;$

4) $f_1(y) = \frac{1}{h}\Big(y - \frac{1}{2}\Big)f_2(y), \qquad d_1 < -h\Delta, \qquad d_1 \geqslant \frac{1}{h}\Delta;$

5) $y = 0,\ 1;$

6) $d_1 = h|\Delta|.$

В утверждении 2 инфинум равен нулю, а в утверждении 5 инфинум не достигается.

Доказательство. Поскольку $f \in (C(\Omega_0))^2$, то $s \in C^2(\Omega_0) \times C^4(\Omega_0)$. Тогда из (5) следует, что A является непрерывной в Ω_0 функцией с кусочно-непрерывной производной, возможно, имеющей разрывы в таких точках y, где выполнено $d_1 = h|\Delta|$ или $d_1 = (1/h)|\Delta|$. Следовательно, ее экстремальные значения могут быть достигнуты либо на концах интервала Ω_0 (утверждение 5), либо в точках разрыва производной (утверждение 6 и $d_1 = (1/h)|\Delta|$ в утверждении 2), либо в точках y, где $dA/dy = 0$. Вычислим производные

$$\frac{d}{dy}d_1 = \frac{d}{dy}Ds_1(y) = D^2 s_1(y) = -f_1(y),$$

$$\frac{d}{dy}\Delta = \frac{d}{dy}\Big(D^2 s_2(y) - \Big(y - \frac{1}{2}\Big)D^3 s_2(y)\Big) = -\Big(y - \frac{1}{2}\Big)f_2(y).$$

Подставив данные значения в формулу (5) для функции A, получим утверждения 1–4 теоремы, причем из замечания 5 следует, что $A = 0$, когда $d_1 \leqslant (1/h)|\Delta|$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $f_1(x) \equiv 1$, $f_2(x) \equiv 1$, а h достаточно мало: $h^2 < 1/12$. Тогда s имеет вид

$$s_1(x) = 0{,}5(x - x^2), \qquad s_2(x) = (x^2 - 2x^3 + x^4)/24.$$

Найдем $d_1 = 0{,}5 - y$, $d_2 = (1 - 6y + 6y^2)/12$, $d_3 = -0{,}5 + y$, $\Delta = -1/6 + y/2 - y^2/2$. Отметим, что $\Delta < 0$. Далее,

$$d_1 + h\Delta = -\frac{h}{2}y^2 + \Big(\frac{h}{2} - 1\Big)y - \frac{h}{6} + \frac{1}{2}, \qquad d_1 - h\Delta = \frac{h}{2}y^2 - \Big(\frac{h}{2} + 1\Big)y + \frac{h}{6} + \frac{1}{2}, \tag{7}$$

$$d_1 + \frac{1}{h}\Delta = -\frac{1}{2h}y^2 + \Big(\frac{1}{2h} - 1\Big)y - \frac{1}{6h} + \frac{1}{2}, \qquad d_1 - \frac{1}{h}\Delta = \frac{1}{2h}y^2 - \Big(\frac{1}{2h} + 1\Big)y + \frac{1}{6h} + \frac{1}{2}.$$

Проверим все утверждения теоремы 3.

1. $f_1(y) \neq 0$.

2. Решая квадратные уравнения $d_1 + (1/h)\Delta = 0$, $d_1 - (1/h)\Delta = 0$, получим, что дискриминант $1 - 1/(12h^2) < 0$, следовательно, $d_1 + (1/h)\Delta < 0$, $d_1 - (1/h)\Delta > 0$ для любого y. Таким образом, утверждение 2 реализоваться не может.

3. Имеем $y = 1/2 - h$, $d_1 + (1/h)\Delta < 0$, и условия не выполнены.

4. Пусть $y_* = 1/2 + h$. Всегда имеем $d_1 - (1/h)\Delta > 0$, осталось проверить $d_1 + h\Delta < 0$ при y_*. Вычислим $(d_1 + h\Delta)\big|_{y_*} = -(h/2)(h^2 + 25/12) < 0$, затем $(d_1 - (1/h)\Delta)\big|_{y_*} = -h/2 + 1/(24h)$, тогда

$$A\Big|_{y_*} = \frac{h^2}{1 + h^2}\Big(d_1 - \frac{1}{h}\Delta\Big)\Big|_{y_*} = \frac{h(1 - 12h^2)}{24(1 + h^2)}.$$

5. Проверим, что $y \to 0, 1$. При $y = 0$ имеем $d_1 = 1/2$, $\Delta = -1/6$, $d_1 > h|\Delta|$, поэтому

$$A\Big|_0 = 1/2 > A\Big|_{y_*}.$$

При $y = 1$ имеем $d_1 = -1/2$, $\Delta = -1/6$, $d_1 + h\Delta < 0$, $d_1 - (1/h)\Delta > 0$, тогда

$$A\Big|_1 = \frac{h^2}{1 + h^2}\Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6h}\Big) = \frac{h(1 - 3h)}{6(1 + h^2)} > A\Big|_{y_*}.$$

6. Допустим $d_1 + h\Delta = 0$. Решая соответствующее квадратное уравнение (7) относительно y, найдем $y_1 = 1/2 - (1 - K)/h$, $K^2 = 1 - h^2/12$. Далее вычислим $A\Big|_{y_1} = d_1\Big|_{y_1} = 1/2 - y_1 = (1 - K)/h > A\Big|_{y_*}$. Допустим, что $d_1 - h\Delta = 0$, получим корень $y_2 = 1/2 + (1 - K)/h$. Но поскольку $(d_1 + h\Delta)\big|_{y_2} < 0$ и $(d_1 + (1/h)\Delta)\big|_{y_2} < 0$, то равенство $d_1 - h\Delta = 0$ не выполняется.

Таким образом, для $f_1 = f_2 \equiv 1$, $0 < h < 1/(2\sqrt{3})$ в точке $y_* = 1/2 + h$ достигается минимум (6):

$$\inf_{0<y<1}[u_1] = \frac{h(1 - 12h^2)}{24(1 + h^2)}$$

при $u_1 = s_1 - \dfrac{h(1 - 12h^2)}{24(1 + h^2)}D\alpha$, $u_2 = s_2 - \dfrac{24h^4 + 36h^2 - 1}{24(1 + h^2)}\alpha - h\beta$.

В данном примере мы проводили поиск экстремального разреза, не находя самого решения (4). Теперь найдем явное выражение для коэффициента A в зависимости от $y \in \Omega_0$. Решив квадратные уравнения (7), получим $d_1 + h\Delta \geqslant 0$, $d_1 - h\Delta \geqslant 0$, когда $y \in (0, y_1)$.

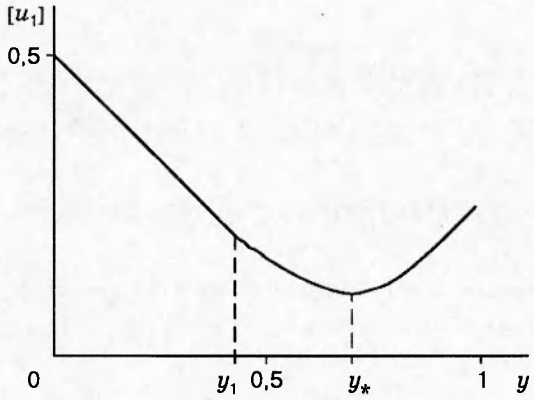

Рис. 4

На этом промежутке $A = 1/2 - y$. Для $y \in (y_1, 1)$ имеем $d_1 + h\Delta < 0$, $d_1 - (1/h)\Delta > 0$, тогда $A = (h^2/(1+h^2))(d_1 - (1/h)\Delta) = (h/(1+h^2))(y^2/2 - (1/2+h)y + 1/6 + h/2)$. Таким образом,

$$A = \begin{cases} 1/2 - y, & y \in (0, y_1), \\ \dfrac{h}{1+h^2}\left(\dfrac{1}{2}y^2 - \left(\dfrac{1}{2}+h\right)y + \dfrac{1}{6} + \dfrac{h}{2}\right), & x \in (y_1, 1). \end{cases}$$

График функции $[u_1] = A$ в зависимости от y изображен на рис. 4. Действительно, условие $dA/dy = 0$ дает $y_* = 1/2 + h$ — точку минимума (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.** Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989.
2. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
3. **Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е.** Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Киев: Наук. думка, 1977.
4. **Хлуднев А. М.** Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, № 2. С. 318–326.
5. **Khludnev A. M.** Existence of extreme unilateral cracks in a plate // Control Cybernet. 1994. V. 23, N 3. P. 453–460.
6. **Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
7. **Мину М.** Математическое программирование. М.: Наука, 1990.
8. **Ковтуненко В. А.** Решение задачи о балке с разрезом // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. С. 160–166.
9. **Cimatti G.** The constrained elastic beam // Meccanica. 1973. V. 86, N 2. P. 119–124.
10. **Barbu V., Korman P.** Approximating optimal controls for elastic obstacle problem by monotone iteration schemes // Numer. Funct. Anal. Optim. 1991. V. 12, N 5/6. P. 429–442.

Поступила в редакцию 4/II 1998 г.