

линиями, происходит гладко. Это указывает на то, что приближенный энергетический метод и квазиодномерные уравнения дают согласующиеся результаты.

Автор выражает признательность В. М. Ентову за внимание к работе.

Поступила 4 XII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М., Ярин А. Л. Динамика струй капальной жидкости. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, 1979, № 127.
2. Ентов В. М., Ярин А. Л. Поперечная устойчивость струи капальной жидкости во встречном потоке воздуха.— ИФЖ, 1980, т. 38, № 5.
3. Ентов В. М., Ярин А. Л. Уравнение динамики струи капальной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.
4. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неьютоновских жидкостей.— М.: Мир, 1978.
5. Ентов В. М., Кордонский В. И. и др. Исследование распада струй реологически сложных жидкостей. Препринт Ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1980, № 2.
6. Ентов В. М., Кордонский В. И. и др. Исследование распада струй реологически сложных жидкостей.— ПМТФ, 1980, № 3.

УДК 532.5

### ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ИЗМЕНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Ю. В. Мартынов, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Исследовано течение слоя вязкой несжимаемой жидкости по вертикальной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, плотно состыкованных по горизонтальной прямой линии. Одна полуплоскость движется относительно другой вдоль линии стыка. Получено точное аналитическое решение для распределения скоростей в потоке. Решение может быть обобщено на случай, когда плоскость состоит из нескольких плотно состыкованных полос, движущихся относительно друг друга вдоль линий стыков с разными скоростями.

Без ограничения общности будем считать, что верхняя полуплоскость покоится, а нижняя — движется. Безразмерные уравнения движения, неразрывности и граничные условия имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right), \\
 & v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Fr}}, \\
 & v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \\
 (2) \quad & y = 0 \quad \begin{cases} x < 0 & v_x = v_y = v_z = 0, \\ x > 0 & v_x = v_y = 0, \quad v_z = 1; \end{cases} \\
 (3) \quad & y = h(x) \quad \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (1 - h_x^2) - 4h_x \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v_y}{\partial y} (1 - h_x^2) - \frac{1}{\text{Re}} h_x \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{\alpha h_{xx}}{1 - h_x^2} = p (1 + h_x^2), \\
 & v_y = h_x v_x, \quad \partial v_z / \partial y = 0; \\
 (4) \quad & x \rightarrow \pm \infty \quad v_x = \text{Re}(-y^2/2 + y)/\text{Fr}, \quad v_y \rightarrow 0, \quad v_z \rightarrow \delta,
 \end{aligned}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \text{Re} = U_0 h_0 / \nu, \quad \text{Fr} = \frac{U_0^2}{g h_0}, \quad \alpha = \frac{\sigma}{h_0 \rho U_0^2},$$

где в качестве масштабов длины и скорости выбраны толщина слоя жидкости  $h_0$  при  $x \rightarrow -\infty$  и скорость движения нижней полуплоскости  $U_0$  относительно верхней;  $z, y, x$  — декартовы координаты ( $x$  направлена вниз по течению жидкости,  $y$  — перпендикулярно плоскости,  $z$  — вдоль стыка плоскостей, начало координат находится на стыке плоскостей);  $v_x, v_y, v_z$  — компоненты скорости вдоль  $x, y, z$  соответственно;  $p$  — давление;  $h(x)$  — толщина слоя жидкости;  $h_x = dh/dx$ ; Re — число Рейнольдса; Fr — число Фруда;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\nu$  — кинематическая вязкость. Индексом нуль помечены размерные величины.

Уравнения и граничные условия записаны с учетом того, что течение не зависит от координаты  $z$ . Граничные условия (2) являются условиями прилипания и непротекания на твердой поверхности, а граничные условия (3) представляют собой условия равенства касательных и нормальных компонент тензоров напряжений на искривленной свободной поверхности  $h(x)$  жидкой и газовой фаз.

Решение задачи (1)–(4) ищем в виде

$$(5) \quad v_x = \text{Re}(-y^2/2 + y)/\text{Fr}, \quad v_y = 0, \quad v_z = v_z(x, y), \quad h(x) = 1.$$

Задача (1)–(4) подстановкой (5) сводится к решению одного уравнения с граничными условиями:

$$(6) \quad \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left( -\frac{y^2}{2} + y \right) \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right), \\ y = 0 \quad v_z = \Theta(x), \quad y = 1 \quad \partial v_z / \partial y = 0, \\ x \rightarrow -\infty \quad v_z \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad v_z \rightarrow 1.$$

Здесь  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда ( $\Theta(x) = 1, x > 0$ ;  $\Theta(x) = 0, x < 0$ ). Задачи, аналогичные задаче (6), возникают в теории теплопередачи [2, 3]. Произведя подстановку  $v_z = v(x, y) + \Theta(x)$  и применяя преобразование Фурье, сведем задачу (6) к виду

$$(7) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + i\xi \left( i\xi + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left( -\frac{y^2}{2} + y \right) \right) V = i\xi + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left( -\frac{y^2}{2} + y \right), \\ y = 0 \quad V = 0, \quad y = 1 \quad \partial V / \partial y = 0, \\ V(y, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{i\xi x} dx.$$

Решение задачи (7) имеет вид

$$(8) \quad V(y, \xi) = F \left[ \left( \frac{1}{16} \sqrt{\frac{i\xi D}{2}} - \frac{\xi^2}{4} + \frac{i\xi D}{8} \right) / \sqrt{\frac{i\xi D}{8}}, \frac{1}{8}; -\sqrt{\frac{i\xi D}{2}} \times \right. \\ \left. \times (y-1)^2 \right] F^{-1} \left[ \left( \frac{1}{16} \sqrt{\frac{i\xi D}{2}} - \frac{\xi^2}{4} + \frac{i\xi D}{8} \right) / \sqrt{\frac{i\xi D}{2}}, \frac{1}{8}; -\sqrt{\frac{i\xi D}{2}} \right] \times \\ \times \{ 1 - \exp \{ -[1 + (y-1)^2]/2 \} \} (i\xi)^{-1}, \quad D = \text{Re}^2 / \text{Fr}.$$

Здесь  $F(a, c; z)$  — функция Куммера [4], квадратный корень следует понимать как однозначную функцию, совпадающую на верхнем берегу разреза вдоль вещественной положительной полуоси с арифметическим значением корня. Распределение функции  $v(x, y)$  определяется обратным преобразованием Фурье функции  $V(y, \xi)$

$$(9) \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} V(y, \xi) d\xi.$$

Из (8), (9) найдем

$$(10) \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-sx}}{s} \left\{ 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(y-1)^2 + 1] \right\} \right\} \times \\ \times F \left[ \left( \frac{1}{16} \sqrt{\frac{sD}{2}} + \frac{s^2}{4} + \frac{sD}{8} \right) \middle| \sqrt{\frac{sD}{2}}, \frac{1}{8}; -\sqrt{\frac{sD}{2}} (y-1)^2 \right] \times \\ \times F^{-1} \left[ \left( \frac{1}{16} \sqrt{\frac{sD}{2}} + \frac{s^2}{4} + \frac{sD}{8} \right) \middle| \sqrt{\frac{sD}{2}}, \frac{1}{8}; -\sqrt{\frac{sD}{2}} \right] ds, \quad s = i\xi.$$

Из анализа поведения подынтегральной функции выражения (10) получим формулы для распределения  $v_z(x, y)$  при  $x < 0$  и  $x > 0$ .

При  $x < 0$

$$(11) \quad v_z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\omega_n x} Q_n(y), \\ Q_n(y) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(y-1)^2 + 1] \right\} F \left[ \left( \frac{i}{16} \sqrt{\frac{\omega_n D}{2}} + \frac{\omega_n^2}{4} - \frac{\omega_n D}{8} \right) \middle| i \sqrt{\frac{\omega_n D}{2}}, \frac{1}{8}; -i \sqrt{\frac{\omega_n D}{2}} (y-1)^2 \right], \\ A_n = -\omega_n^{-1} [\partial H(\eta) / \partial \eta]_{\eta=\omega_n}^{-1}, \\ H(\eta) = F \left[ \left( \frac{i}{16} \sqrt{\frac{\eta D}{2}} + \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta D}{8} \right) \middle| i \sqrt{\frac{\eta D}{2}}, \frac{1}{8}; -i \sqrt{\frac{\eta D}{2}} \right].$$

Здесь  $\omega_n$  — корни уравнения  $H(\omega_n) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , лежащие в правой полуплоскости комплексной плоскости. Отметим, что  $A_n$  можно представить в виде двойных рядов

$$(12) \quad A_n = \left\{ \omega_n \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{i}{32} \sqrt{\frac{D}{2\omega_n}} + \frac{\omega_n}{2} - \frac{D}{8} + \frac{i n}{2} \sqrt{\frac{D}{2\omega_n}} \right] \times \right. \\ \times \left[ \frac{i}{16} \sqrt{\frac{\omega_n D}{2}} + \frac{\omega_n^2}{4} - \frac{\omega_n D}{8} + i n \sqrt{\frac{D \omega_n}{2}} \right]^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{i}{16} \times \right. \\ \left. \times \left[ \sqrt{\frac{\omega_n D}{2}} + \frac{\omega_n^2}{4} - \frac{\omega_n D}{8} \right] \middle| i \sqrt{\frac{\omega_n D}{2}} \right)_k \left[ -i \sqrt{\frac{\omega_n D}{2}} \right]^k \left| \left( \frac{1}{8} \right)_k k! \right| \right\}^{-1},$$

где  $(a)_k$  — символ Похгаммера [4].

Аналогично из выражения (10) с учетом  $v_z = v(x, y) + \Theta(x)$  получим распределение скорости при  $x > 0$

$$(13) \quad v_z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\sigma_n x} G_n(y) + 1, \\ G_n(y) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(y-1)^2 + 1] \right\} F \left[ \left( \frac{1}{16} \sqrt{\frac{sD}{2}} + \frac{s^2}{4} + \frac{sD}{8} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{sD}{2} \right)^{-1/2}, \frac{1}{8}; -\sqrt{\frac{-sD}{2}} (y-1)^2 \right], \quad B_n = \sigma_n^{-1} \left[ \frac{dR(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta=\sigma_n}^{-1}, \\ R(\eta) = F \left[ \left( \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\eta D}{2}} + \frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta D}{8} \right) \middle| \sqrt{\frac{\eta D}{2}}, \frac{1}{8}; -\sqrt{\frac{\eta D}{2}} \right],$$

где  $\sigma_n$  —  $n$ -й положительный корень трансцендентного уравнения  $R(\eta) = 0$ . Представление  $B_n$  в виде двойных рядов имеет вид

$$(14) \quad B_n = \left\{ \sigma_n \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{32} \sqrt{\frac{D}{2\sigma_n}} + \frac{\sigma_n}{2} + \frac{D}{8} + n \sqrt{\frac{D}{2\sigma_n}} \right) \times \right.$$

$$\times \left( \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\sigma_n D}{2}} + \frac{\sigma_n^2}{4} + \frac{\sigma_n D}{8} + n \sqrt{\frac{\sigma_n D}{2}} \right)^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{16} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sqrt{\frac{\sigma_n D}{2}} + \frac{\sigma_n^2}{4} + \frac{\sigma_n D}{8} \right) / \sqrt{\frac{\sigma_n D}{2}} \right]_k \left( -\sqrt{\frac{\sigma_n D}{2}} \right)^k / \left[ \left( \frac{1}{8} \right)_k k! \right]^{-1}.$$

Таким образом, соотношения (5), (11)–(14) определяют аналитическое решение задачи о распределении скорости жидкости, стекающей по вертикальной плоскости, при ступенчатом изменении граничного условия. Из выражений (11)–(14) видно, что распределение  $v_z(x, y)$  зависит только от комбинации чисел Рейнольдса и Фруда:  $D = \text{Re}^2/\text{Fr}$ .

Отметим, что аналогичное решение может быть получено в случае любого постоянного наклона плоскостей, по которым движется слой жидкостей. Кроме того, если заменить в формуле (6) скорость  $v_z$  на температуру  $T$ , а отношение  $\text{Re}^2/\text{Fr}$  на число Пекле  $\text{Pe}$ , то рассмотренная задача сводится к определению профиля температуры в жидкости, текущей между двумя плоскостями, на которых  $T = T_1$  при  $x < 0$  и  $T = T_2$  при  $x > 0$ . В этом случае из (11)–(14) следует решение для температуры. Соответствующая задача о профиле температуры приближенно решена в [3] при малых числах Пекле методом разложения в ряд.

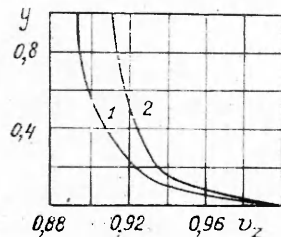
По формулам (11)–(14) рассчитаны распределения  $v_z(x, y)$  при значениях параметра  $D = 1$ . Сначала были найдены значения корней функций  $H(\eta)$ ,  $R(\eta)$ , корни функций  $R(\eta)$  определялись по итеративному методу Мюллера для решения алгебраических уравнений высоких степеней [5]. После нахождения корней функций  $H(\eta)$ ,  $R(\eta)$  были численно просуммированы ряды (11)–(14) и выделены действительные части. На фиг. 1 изображено распределение  $v_z(x, y)$  вдоль оси  $y$  при  $D = 1$  и  $x = 0,4$  (кривая 1),  $x = 0,8$  (кривая 2).

Как видно из фиг. 1, кривые распределения функции  $v_z(x, y)$  монотонно убывают с увеличением  $y$ . Верхние слои жидкости на участке, прилегающем к стыку полуплоскостей, отстают от нижних. Но с ростом  $x$  распределение  $v_z(x, y)$  стремится к единице. Скорость в направлении  $z$  по всей толщине жидкости выравнивается и становится равной скорости движущейся полуплоскости.

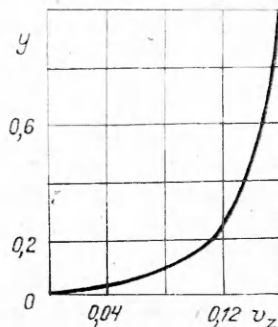
На фиг. 2 приведено распределение  $v_z(x, y)$  вдоль оси  $y$  при  $D = 1$ , а  $x = -0,01$ . Кривая распределения  $v_z(x, y)$ , согласно фиг. 2, монотонно возрастает от 0 в точке  $y = 0$  до 0,1577 в точке  $y = 1$ .

Вязкие напряжения, действующие в направлении  $z$  и создаваемые течением жидкости в области нижней полуплоскости, приводят в движение вдоль  $z$  верхние слои жидкости над неподвижной полуплоскостью. Течение жидкости вдоль двух движущихся относительно друг друга полуплоскостей происходит без изменения толщины слоя жидкости, без изменения распределения компоненты скорости вдоль оси  $x$ .

В заключение рассмотрим течения жидкости на плоскости, состоящей из нескольких плотно состыкованных областей:  $x < x_1$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2, \dots$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

...,  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $x > x_{i+2}$ , движущихся относительно друг друга со скоростями  $U_k$  ( $k = 1, \dots, i+2$ ).

Для простоты рассмотрим без ограничения общности случай, когда верхняя область  $x < 0$  покоится, пристыкованная к ней бесконечная полоса  $0 \leq x \leq x_0$  движется в сторону вдоль стыка со скоростью  $\bar{v}_1$ , а нижняя область  $x > x_0$ , примыкающая к бесконечной полосе, движется со скоростью  $\bar{v}_2$  относительно неподвижной области. Течение вдоль оси  $x$  не изменится, а течение вдоль оси  $z$  можно найти из решения следующей задачи:

$$(15) \quad \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left( -\frac{y^2}{2} + y \right) \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right);$$

$$(16) \quad y = 0 \quad v_z = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \bar{v}_1, & 0 < x < x_0, \\ \bar{v}_2, & x > x_0, \end{cases} \quad y = 1 \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0;$$

$$(17) \quad x \rightarrow -\infty \quad v_z \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad v_z \rightarrow \bar{v}_2.$$

Так как уравнение (15) и граничные условия (16), (17) линейные, то решение задачи (15)–(17) можно искать в виде суммы решений двух задач: решение первой задачи описывает течение на плоскости, состоящей из двух плотно состыкованных полуплоскостей: верхняя покоится, а нижняя движется со скоростью  $\bar{v}_1$ , решение второй задачи описывает течение, в котором верхняя область  $x < x_0$  неподвижна, а нижняя движется со скоростью  $\bar{v}_3$  такой, что  $\bar{v}_1 + \bar{v}_3 = \bar{v}_2$ . Таким образом, решение задачи (15)–(17) сводится к решению следующих задач:

уравнения (15) с граничными условиями

$$y = 0 \quad v_z = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \bar{v}_1, & x > 0, \end{cases} \quad y = 1 \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0, \\ x \rightarrow -\infty \quad v_z \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad v_z \rightarrow \bar{v}_1;$$

уравнения (15) с граничными условиями

$$y = 0 \quad v_z = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ \bar{v}_3, & x > x_0, \end{cases} \quad y = 1 \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0, \\ x \rightarrow -\infty \quad v_z = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad v_z \rightarrow \bar{v}_3, \quad \bar{v}_3 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1.$$

Указанный метод может быть обобщен на случай нескольких областей, движущихся относительно друг друга.

Поступила 12 XII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА]

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
2. Астафин В. С., Королев И. О., Рязанцев Ю. С. О температуре потока в канале со скачком температуры на стенке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5.
3. Галин Н. М. О теплообмене при ламинарном течении жидкости в плоском канале с учетом аксиальной теплопроводности при ступенчатом изменении температуры стенки. — ТВТ, 1973, т. 11, № 6.
4. Бейтман Г., Эрдей А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
5. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: ИЛ, 1962.

УДК 532.525.2 + 532.135

### РАСПАД СВОБОДНОЙ СТРУИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Б. М. Хусид

(Минск)

К настоящему времени опубликовано большое число работ, посвященных распаду струи сильновязкой ньютоновской жидкости, вытекающей в маловязкую среду. Результаты этих работ показывают, что в зависимости от скорости истечения имеются