

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3

И. Г. Терегулов, Ю. И. Бутенко, Р. А. Каюмов,
Д. Х. Сафиуллин, К. П. Алексеев

Казанская государственная архитектурно-строительная академия,
420043 Казань

Известны трудности экспериментального определения механических характеристик однонаправленно-армированного композитного материала (ОКМ), заключающиеся в том, что материалы типа лент или жгутов имеют малые поперечные размеры, кроме того, ОКМ ведут себя по-разному при независимых испытаниях и в составе конструкции.

В настоящей работе рассматривается подход, при котором информация о механических характеристиках извлекается из результатов экспериментальных испытаний конструкций, изготовленных из этого композитного материала (КМ) [1-3]. Исследуется случай плоского напряженного состояния КМ, входящего в состав многослойной конструкции. Такими конструкциями являются тонкие оболочки, образованные намоткой или наложением КМ. Но на этом пути возникают некоторые трудности. Они связаны с тем, что при большой разнице в модулях упругости малые искомые величины (например, ν_{12} , E_2 , G) сильно изменяются при небольших изменениях исходных экспериментальных данных [3]. Рассматриваются вопросы задачи обработки экспериментальных данных в случае нелинейной упругости, дается анализ результатов обсчета тестовых задач, формулируются условия, накладываемые на эксперимент.

1. Приведем необходимые соотношения, полученные в [2]. Исследуем объекты типа тонких многослойных пластин и оболочек, образованных наложением или намоткой армированных ортотропных слоев. Свяжем с армированным слоем декартову систему координат x^1, x^2 , направив ось x^1 вдоль оси ортотропии, имеющей наибольшую жесткость, а ось x^2 — перпендикулярно x^1 в плоскости слоя (рис. 1).

Связь напряжений $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ с деформациями $\tilde{e}_{\alpha\beta}$ в произвольной системе координат \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 , получаемой из $x^1 x^2$ поворотом вокруг оси x^3 , в плоскости ленты при малых деформациях описывается в тензорном виде соотношением

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = & A_1(\tilde{g}^{\alpha\beta} + \tilde{\Lambda}^{\alpha\beta}) + A_3(\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{\Lambda}^{\alpha\beta}) + \\ & + 2A_2(\tilde{e}^{\alpha\beta} - (1/2)\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{e}_{\rho}^{\rho} - (1/2)\tilde{\Lambda}^{\alpha\beta}\tilde{\Lambda}^{\rho\gamma}\tilde{e}_{\rho\gamma}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора в плоскости моноленты; $\tilde{\Lambda}^{\alpha\beta}$ — специальный тензор, имеющий составляющие $\Lambda^{11} = 1$, $\Lambda^{22} = -1$, $\Lambda^{12} = \Lambda^{21} = 0$ в системе координат x^1, x^2 ; $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$, $\tilde{e}_{\alpha\beta}$ — составляющие тензоров напряжений и деформаций ленты в системе \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 ; $A_i = A_i(I_1, I_2, I_3)$ — функции, характеризующие упругие свойства композитного материала, где $i = 1, 2, 3$; \tilde{I}_k — инварианты вида

$$I_1 = \tilde{e}_{\alpha}^{\alpha} + \tilde{\Lambda}^{\alpha\beta}\tilde{e}_{\alpha\beta}, \quad I_3 = \tilde{e}_{\alpha}^{\alpha} - \tilde{\Lambda}^{\alpha\beta}\tilde{e}_{\alpha\beta}, \quad I_2 = \tilde{e}_{\alpha\beta}\tilde{e}^{\alpha\beta} - (1/2)(\tilde{e}_{\alpha}^{\alpha})^2 - (1/2)(\tilde{\Lambda}^{\alpha\beta}\tilde{e}_{\alpha\beta})^2. \quad (1.2)$$

В осях $x^1 x^2$ напряжения (1.1) и инварианты (1.2) имеют вид

$$\sigma^{11} = 2A_1, \quad \sigma^{22} = 2A_3, \quad \sigma^{12} = 2A_2 e_{12}; \quad (1.3)$$

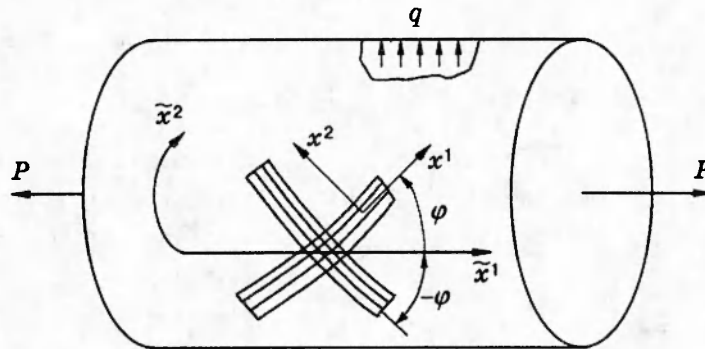


Рис. 1

$$I_1 = 2e_{11}, \quad I_3 = 2e_{22}, \quad I_2 = 2e_{12}^2. \quad (1.4)$$

Ниже рассмотрим материалы, у которых жесткостные характеристики при деформации вдоль и поперек волокон и при сдвиге сильно различаются.

Для материалов этого класса в [2] проведен асимптотический анализ определяющих соотношений (1.1), что позволило уменьшить число аргументов функций, характеризующих жесткостные свойства нелинейно-упругого КМ, и представить их с погрешностью $O(\eta^2)$ по сравнению с единицей в виде

$$\begin{aligned} A_1(I_1, I_3) &= A_{11}(I_1)I_1 + A_{13}(I_1)I_3, \\ A_3(I_1, I_3) &= A_{31}(I_1)I_1 + A_{33}(I_3)I_3, \quad A_2(I_2) = A_2(I_2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем между упругими характеристиками A_{13} и A_{31} имеется связь

$$\frac{\partial A_{31}}{\partial I_1} I_1 + A_{31} = A_{13}. \quad (1.6)$$

2. Определение A_i основано на обработке результатов экспериментов на трубчатых образцах (оболочках), образованных намоткой армированного материала под углами $\pm\varphi$ к образующей, что позволяет учесть специфику работы компонентов КМ в композиции и косвенно учесть влияние технологических факторов на свойства КМ (подобная методика использовалась, например, в работах [4, 5] для определения механических характеристик линейно-упругого КМ). Нагружение осуществляется внутренним давлением и осевой силой. Будем считать, что слоев достаточно много, вследствие чего деформация оболочки является осесимметричной [4].

В дальнейшем в качестве координат \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 выберем координатные линии, совпадающие с направлением меридиана \tilde{x}^1 и параллели \tilde{x}^2 оболочки вращения.

Тензоры $\tilde{\sigma}^{ij}, \sigma^{ij}$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{11} &= \sigma^{11} \cos^2 \varphi + \sigma^{22} \sin^2 \varphi + \sigma^{12} \sin 2\varphi, \\ \tilde{\sigma}^{22} &= \sigma^{11} \sin^2 \varphi + \sigma^{22} \cos^2 \varphi - \sigma^{12} \sin 2\varphi, \\ \tilde{\sigma}^{12} &= (1/2)(\sigma^{22} - \sigma^{11}) \sin 2\varphi + \sigma^{12} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Перейдем в выражениях (1.4) к характеристикам деформаций оболочки:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2[\bar{\epsilon}_{11} \cos^2 \varphi + \bar{\epsilon}_{22} \sin^2 \varphi], \quad I_3 = 2[\bar{\epsilon}_{11} \sin^2 \varphi + \bar{\epsilon}_{22} \cos^2 \varphi], \\ I_2 &= (1/2)[(\bar{\epsilon}_{11} - \bar{\epsilon}_{22}) \sin 2\varphi]^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь учтено, что вследствие осесимметричности деформации оболочки $\bar{\epsilon}_{12} = 0$. Напряжения в слое (2.1) с использованием (1.3), (1.5), (2.2) выразим через характеристики деформированного состояния оболочки $\bar{\epsilon}_{11}$, $\bar{\epsilon}_{22}$, которые замеряются в ходе эксперимента. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{11} &= [A_{11}(I_1)I_1 + A_{13}(I_1)I_3](1 + \cos 2\varphi) + \\ &+ [A_{31}(I_1)I_1 + A_{33}(I_3)I_3](1 - \cos 2\varphi) + A_2(I_2)(\bar{\epsilon}_{11} - \bar{\epsilon}_{22}) \sin^2 2\varphi, \\ \bar{\sigma}^{22} &= [A_{11}(I_1)I_1 + A_{13}(I_1)I_3](1 - \cos 2\varphi) + \\ &+ [A_{31}(I_1)I_1 + A_{33}(I_3)I_3](1 + \cos 2\varphi) - A_2(I_2)(\bar{\epsilon}_{11} - \bar{\epsilon}_{22}) \sin^2 2\varphi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее используем уравнения равновесия оболочки:

$$h\bar{\sigma}^{11} = P/2\pi R, \quad h\bar{\sigma}^{22} = qR, \quad (2.4)$$

где P — внешняя сила, действующая вдоль оси цилиндрической оболочки; q — внутреннее давление в оболочке; R — радиус срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки.

Ставится задача определения упругих характеристик $A_{11}(I_1)$, $A_{13}(I_1)$, $A_{31}(I_1)$, $A_{33}(I_3)$, $A_2(I_2)$ из уравнений (1.6), (2.3), (2.4).

Для этого A_{ij} разложим в ряд по некоторым системам функций от инвариантов I_k ($k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} A_{11}(I_1) &= \sum_{k=0}^{N_1} A_{11}^k \psi_1^k(I_1), \quad A_{13}(I_1) = \sum_{k=0}^{N_2} A_{13}^k \psi_2^k(I_1), \quad A_{31}(I_1) = \sum_{k=0}^{N_3} A_{31}^k \psi_3^k(I_1), \\ A_{33}(I_3) &= \sum_{k=0}^{N_4} A_{33}^k \psi_4^k(I_3), \quad A_2(I_2) = \sum_{k=0}^{N_5} A_2^k \psi_5^k(J_2), \quad J_2 = \sqrt{I_2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При вычислениях в качестве ψ_i^k использовались степени инвариантов I_1 , I_3 , J_2 , причем принималось $N_k = N = 2$ или $N = 3$, что соответствует аппроксимации функции A_{ij} квадратной или кубической параболой. Тогда соотношение (1.6) позволяет выразить A_{13}^k через A_{31}^k :

$$A_{13}^k = (1 + k)A_{31}^k, \quad k = 0, \dots, N. \quad (2.6)$$

Уравнения (1.6), (2.3), (2.4) можно записать для каждой точки траектории нагружения $P(\zeta)$, $q(\zeta)$ (ζ — параметр нагружения). После подстановки соотношений (2.5) и (2.6) в выражения (2.3) при каждом значении параметра нагружения получим по два линейных алгебраических уравнения относительно A_{ij}^k .

Количество неизвестных A_{ij}^k алгебраической системы уравнений определяется порядком аппроксимации кривых: $n = 4(N + 1)$.

Матричная форма записи системы алгебраических уравнений относительно искомого вектора $X = \{A_{11}^0, A_{31}^0, A_{33}^0, A_2^0, \dots\} = \{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ имеет вид

$$Bx = C, \quad (2.7)$$

где $B = B(2m, n)$; $x = x(n)$; $C = C(2m)$; m — число замеров в выбранных экспериментах.

При $2m > n$ имеем переопределенную систему уравнений. Для ее решения используем метод минимизации среднеквадратичной невязки

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial x} = 0, \quad \delta^2 = (Bx - C)^2,$$

что приводит к алгебраической системе уравнений порядка n , которую в матричной форме запишем как

$$B_1 x = C_1. \quad (2.8)$$

Здесь $B_1 = B^T B$; $C_1 = B^T C$; B^T — транспонированная матрица.

Для определения линейно-упругих характеристик A_{11}^0 , A_{33}^0 , A_{13}^0 , A_2^0 теоретически достаточно двух экспериментов при разных углах намотки φ .

В этом случае можно просто получить выражение для матрицы размером 4×4 разрешающей системы (2.7) в виде

$$\det \|B_1\| = k(\beta_2 - \beta_1)(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)[\text{tg}^2 2\varphi_1 - \text{tg}^2 2\varphi_2], \quad (2.9)$$

где k — числовой коэффициент; $\beta_1 = \tilde{I}_3^{(1)} / \tilde{I}_1^{(1)}$ для первого эксперимента; $\beta_2 = \tilde{I}_3^{(2)} / \tilde{I}_1^{(2)}$ для второго эксперимента; φ_1 и φ_2 — углы намотки моноленты для оболочек соответственно в первом и втором эксперименте.

Из выражения (2.9) следует, что для разрешимости системы (2.7) необходимо выполнение условий $\beta_1 \neq 1$, $\beta_2 \neq 1$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $\varphi_1 + \varphi_2 \neq \pi/2$. Получение условий вырожденности матрицы B_1 в общем случае нелинейно-упругого композитного материала является нелегкой задачей.

Решение системы уравнений (2.7) при $N > 0$ сопряжено с определенными трудностями, связанными с тем, что элементы этой системы на много порядков отличаются друг от друга.

Поэтому при решении системы (2.7) использовалась нормировка по столбцам с помощью замены неизвестных: $X_*^1 = X^1 \alpha_1, \dots, X_*^5 = X^5 \alpha_5, \dots$. Для выбора α_n есть различные подходы. Здесь принималось, что $\alpha_n = \sum_{i=1}^m |B_{in}|$. После этого вместо матрицы B вводилась новая матрица $B_{in}^* = B_{in} / \alpha_n$. Далее проводилась нормировка (2.7) по строкам:

$$B^{**} = B_{in}^* / \gamma_i, \quad C^{**} = C_i / \gamma_i, \quad \gamma_i = \sum_{n=1}^n |B_{in}^*|.$$

После решения системы уравнений $B^{**} X^* = F^{**}$ определяется вектор X :

$$X^i = X_i^* / \alpha_n.$$

При выборе оболочек для эксперимента необходимо учитывать, что угол намотки играет основную роль при определении жесткостных характеристик оболочек [3, 4], что видно из рис. 2. Поэтому для более точного нахождения технических постоянных необходимо в эксперименте выбирать оболочки с углами намотки, сильно отличающимися друг от друга.

3. Тестирование предлагаемой методики и разработанной программы осуществлялось по схеме обратной задачи. Для некоторого фиктивного материала задавался явный вид функций (1.5), с помощью которых по известным соотношениям вычислялись показания

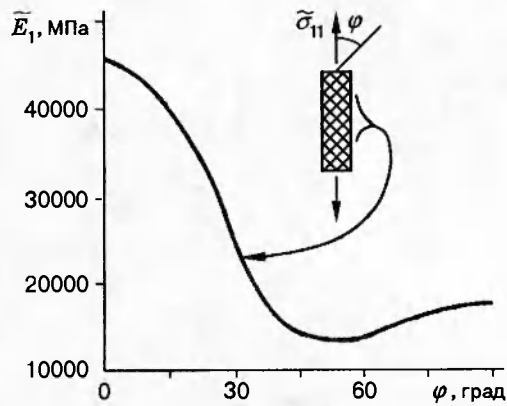


Рис. 2

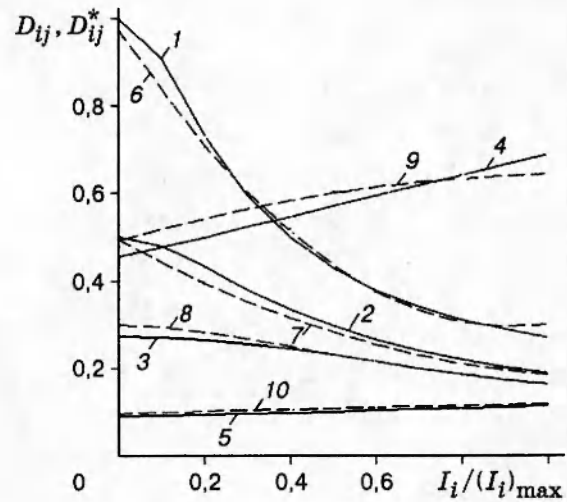


Рис. 3

силоизмерителей P , q и тензодатчиков \tilde{e}_{11} , \tilde{e}_{22} .

Полученные таким образом экспериментальные данные использовались в качестве исходных для восстановления функций (1.5) (в виде их аппроксимаций). Эта методика позволила провести исследование влияния различных факторов (разброс экспериментальных данных, неточность замера угла намотки) на точность определения функций (1.5).

Были рассмотрены тестовые примеры для нелинейно-упругого материала при следующем физическом законе:

$$\begin{aligned} 4A_{11} &= B_1(a/\sqrt{a^2 + e_{11}^2} + b), & 4A_{13} &= \nu_{12}B_1(1 + 2e_{11}/a_1), \\ 4A_{33} &= B_3(a/\sqrt{a^2 + e_{22}^2} + b), & 4A_{31} &= \nu_{12}B_1(1 + e_{11}/a_1), & A_2 &= 2B_2(a/\sqrt{a^2 + e_{12}^2} + b). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Значит, при деформациях e_{11} , e_{22} , e_{12} , стремящихся к нулю, имеем касательные жесткостные характеристики

$$\begin{aligned} 4A_{11}(0) &= (1 + b)B_1, & 4A_{33}(0) &= (1 + b)B_3, & A_2(0) &= (1 + b)B_2, \\ 4A_{11}(0) &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), & 4A_{33}(0) &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), & G_{12} &= A_2(0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где E_1 и E_2 — модули упругости вдоль и поперек армирования; ν_{12} , ν_{21} — коэффициенты Пуассона; G_{12} — модуль сдвига.

Параметры B_1 , B_3 , B_2 в физическом законе (3.1) позволяют моделировать как слабую, так и сильную анизотропию материала. Для слабой анизотропии принимались следующие параметры:

$$\begin{aligned} B_1 &= 10^5 \text{ МПа}, & B_3 &= 5 \cdot 10^4 \text{ МПа}, & \nu_{12} &= 0,1, & B_2 &= 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \\ a &= 10^{-3}, & a_1 &= 2 \cdot 10^{-2}, & b &= 0,1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

После этого задавались значения деформаций в моноленте при углах намотки $\varphi(k)$. В качестве параметра нагружения ζ принят номер нагружения m :

$$e_{11,m}^{(k)} = e_{10}^{(k)}m, \quad e_{22,m}^{(k)} = e_{20}^{(k)}m, \quad m = 1, 2, \dots, m_1.$$

Таблица 1

Номер эксперимента	Угол намотки $\pm\varphi$, град	$e_{11,m}^{(k)}$	$e_{22,m}^{(k)}$
1	30	0,0005 <i>m</i>	0,0003 <i>m</i>
2	20	0,0005 <i>m</i>	0,0002 <i>m</i>
3	5	0,0005 <i>m</i>	0,0001 <i>m</i>

Здесь $e_{10}^{(k)}, e_{20}^{(k)} \ll 1$ выбирались произвольно. Значение $e_{12,m}^{(k)}$ вычислялось из условия симметричности деформации оболочки:

$$\tilde{e}_{12,m}^{(k)} = (1/2)(e_{22,m}^{(k)} - e_{11,m}^{(k)}) \sin 2\varphi + e_{12,m}^{(k)} \cos 2\varphi = 0.$$

По выражениям, аналогичным (2.1), определялись $\tilde{e}_{11}, \tilde{e}_{22}$, а затем — показания тензодатчиков. По выражениям (1.3), (1.5), (3.1) находились напряжения в ленте, затем по (2.1) — напряжения в оболочке для принятого угла намотки, а по соотношениям (2.4) для определенных $h^{(k)}, R^{(k)}$ — внешние нагрузки $P^{(k)}$ и $q^{(k)}$. Результаты экспериментов, построенных указанным способом, приведены в табл. 1 при $m = 10$.

Для определения этих функций по предлагаемой методике использовалось их представление в виде

$$\begin{aligned} A_{11} &\approx A_{11}^* = A_{11}^0 + A_{11}^1 I_1 + A_{11}^2 I_1^2, & A_{33} &\approx A_{33}^* = A_{33}^0 + A_{33}^1 I_3 + A_{33}^2 I_3^2, \\ A_{13} &\approx A_{13}^* = A_{13}^0 + A_{13}^1 I_1 + A_{13}^2 I_1^2, & A_2 &\approx A_2^* = A_2^0 + A_2^1 J_2 + A_2^2 J_2^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

(A_{ij}^k, A_j^k — искомые константы).

На рис. 3 ($k_{11} = 1, k_{33} = 1, k_2 = 0,25, k_{13} = 5, k_{31} = 1$) приведены графики функций (3.4) и соответствующие им графики исходных функций (3.1). На рис. 3 и на всех остальных рисунках $D_{ij} = k_{ij} A_{ij} / A_{11}^0, D_{ij}^* = k_{ij} A_{ij}^* / A_{11}^0$ (k_{ij} — масштабные коэффициенты, которые выбираются так, чтобы различные по величине параметры представить на одном графике), линии 1–5 соответствуют функциям $D_{11}, D_{33}, D_2, D_{13}, D_{31}$, а 6–10 — функциям $D_{11}^*, D_{33}^*, D_2^*, D_{13}^*, D_{31}^*$.

При $e_{ij} \Rightarrow 0$ имеем $4A_{11}^0 = 1,0736 \cdot 10^5$ МПа, $4A_{13}^0 = 1,08 \cdot 10^4$ МПа, $4A_{33}^0 = 5,4246 \cdot 10^4$ МПа, $A_2^0 = 3,014 \cdot 10^4$ МПа. Эти значения с достаточной точностью совпадают с заданными в (3.1), (3.3). Анализ полученных результатов показывает, что для предложенного материала (3.1) при слабой анизотропии (3.3) и идеализированных экспериментах возможно представление (3.4) на всем участке деформирования с достаточной точностью.

Для сильной анизотропии для закона (3.1) принимались следующие параметры:

$$\begin{aligned} B_1 &= 10^5 \text{ МПа}, & B_3 &= 10^4 \text{ МПа}, & \nu_{12} &= 0,01, & B_2 &= 3 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \\ a &= 10^{-3}, & a_1 &= 2 \cdot 10^{-2}, & b &= 0,1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Применялись экспериментальные данные, приведенные в табл. 2 при $m = 1, \dots, 10$. Значения A_{ij}^* , полученные по (3.4), представлены на рис. 4 ($k_{11} = 1, k_{33} = 10, k_2 = 1, k_{13} = 20, k_{31} = 40$).

4. Использование аппроксимирующих функций (3.4) на всем участке деформирования, как правило, приводит к тому, что при малых деформациях A_{ij}^0 не совпадают с линейно-упругими. Это связано с тем, что диаграмма деформирования аппроксимируется из усло-

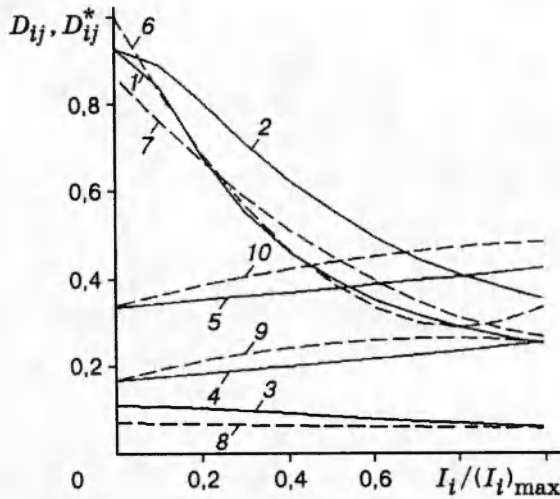


Рис. 4

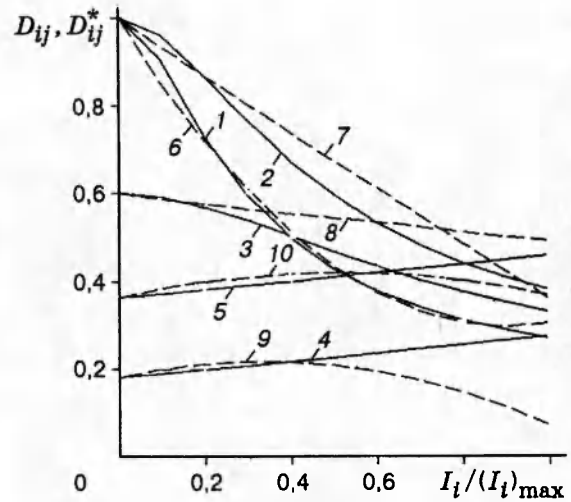


Рис. 5

вия минимума среднеквадратичной невязки на всем интервале изменения аргументов. При необходимости совпадения линейно-упругих характеристик со значениями A_{ij}^0 при нулевых аргументах можно предложить следующий подход. На первом шаге определяются линейно-упругие характеристики $A_{ij}(e)$ при $e_{ij,m}^{(k)} \Rightarrow 0$. Затем система (2.7) преобразуется с учетом условия $A_{ij}^0 = A_{ij}(e)$.

На рис. 5 ($k_{11} = 1$, $k_{33} = 10$, $k_2 = 5$, $k_{13} = 20$, $k_{31} = 40$) приведены результаты обсчета тестового примера, которые показывают, что с увеличением e_{ij} они начинают сильно отличаться от точных.

Анализ этих и других полученных результатов (рис. 3–5) показывает, что использование степенных рядов (3.4) на всем интервале изменения аргументов оправдано в случае слабой анизотропии при плавно изменяющихся функциях A_{ij} . Применение же полиномов более высокой степени приводит к плохой обусловленности матрицы B_1 и осцилляции аппроксимирующих функций. Поэтому для материалов с сильной анизотропией необходимо менять методику стыскания жесткостных характеристик или использовать другие системы функций (например, сплайн-функции). На первом пути имеется возможность улучшить методику отыскания A_{ij} за счет двойной аппроксимации искомых функций. Суть этой методики состоит в следующем. Разобьем интервал изменения ζ на подынтервалы $\Delta\zeta^{(k)}$, на каждом из которых будем аппроксимировать искомые функции полиномами невысокого порядка. Записывая уравнения равновесия (2.7) лишь для точек, находящихся в этом интервале, можно найти функции A_{ij}^* . На всем интервале изменения ζ получим кусочно-непрерывную функцию. По значениям этих функций в середине интервалов $\Delta\zeta^{(k)}$ можно провести их повторную аппроксимацию, например, сплайн-функциями и получить непрерывные функции A_{ij}^{**} . При этом целесообразно применять методы аппроксимации, минимизирующие не только отклонение A_{ij}^{**} от A_{ij}^* , но и ограничивающие кривизну A_{ij}^{**} .

Предложенный метод двойной аппроксимации был реализован в автоматической системе обработки экспериментальных данных. На рис. 6 ($k_{11} = 1$, $k_{33} = 10$, $k_2 = 1$, $k_{13} = 20$, $k_{31} = 40$) приведены результаты расчетов для материала (3.1) с учетом сильной анизотропии (3.5) при экспериментах 2, 4, 7 (см. табл. 2) для трех одинаковых подынтервалов. Результаты показывают хорошее совпадение полученных аппроксимаций с функциями (3.1).

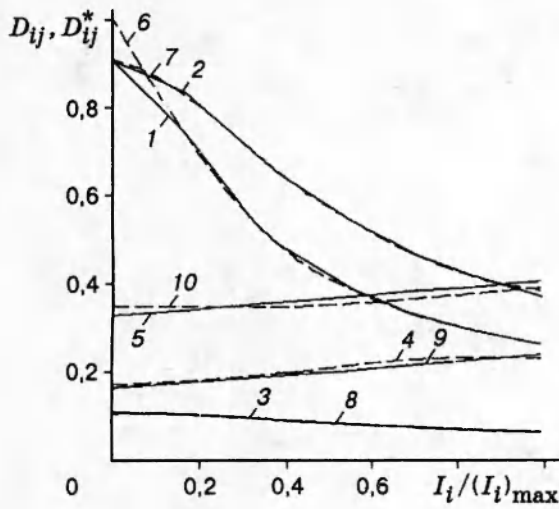


Рис. 6

Таблица 2

Номер эксперимента	Угол намотки $\pm\varphi$, град	$\epsilon_{11,m}^{(k)}$	$\epsilon_{22,m}^{(k)}$
1	44	0,0005 <i>m</i>	0,00035 <i>m</i>
2	30	0,0005 <i>m</i>	0,00030 <i>m</i>
3	25	0,0005 <i>m</i>	0,00025 <i>m</i>
4	20	0,0005 <i>m</i>	0,00020 <i>m</i>
5	15	0,0005 <i>m</i>	0,00015 <i>m</i>
6	10	0,0005 <i>m</i>	0,00010 <i>m</i>
7	5	0,0005 <i>m</i>	0,00005 <i>m</i>

Таблица 3

Номер эксперимента	Угол намотки $\pm\varphi$, град	$\epsilon_{11,m}^{(k)}$	$\epsilon_{22,m}^{(k)}$
1	35	-0,0002 <i>m</i>	0,0004 <i>m</i>
2	55	-0,0003 <i>m</i>	0,0002 <i>m</i>
3	65	-0,0003 <i>m</i>	0,0004 <i>m</i>
4	70	-0,0002 <i>m</i>	0,0005 <i>m</i>
5	25	-0,0001 <i>m</i>	0,0003 <i>m</i>

5. Для анализа влияния разброса экспериментальных данных на жесткостные характеристики использовались тестовые задачи, рассмотренные выше. В исходные данные вводился разброс по входным параметрам. Исследовалось влияние этих возмущений на коэффициенты $A_{ij}^{(k)}$. Анализ численных экспериментов показал следующее:

1) чем выше степень анизотропии (E_1/E_2), тем сильнее влияние на $A_{33}^{(k)}$, $A_2^{(k)}$, $A_{31}^{(k)}$ разброса геометрических и силовых параметров $\delta\varphi$, δR , δh , δP , δq ;

2) наиболее устойчивой по отношению к возмущениям является функция A_{11} , а наименее устойчивыми — функции A_{13} , A_{31} .

Более подробный анализ влияния разброса экспериментальных данных на жесткостные характеристики композитного материала приведем для задачи об определении линейно-упругих констант при физическом законе

$$\sigma^{11} = 4A_{11}(0)e_{11} + 4A_{13}(0)e_{22}, \quad \sigma^{22} = 4A_{13}(0)e_{11} + 4A_{33}(0)e_{22}, \quad \sigma^{12} = 2G_{12}e_{12} \quad (5.1)$$

$$(4A_{11}(0) = 10^4 \text{ МПа}, 4A_{33}(0) = 5 \cdot 10^2 \text{ МПа}, 4A_{13}(0) = 10^2 \text{ МПа}, G_{12} = 300 \text{ МПа}).$$

Вычисленные экспериментальные значения деформаций и внешних сил представлены в табл. 3 при $m = 1, \dots, 10$.

Расчеты показали, что, как и в [4], небольшой разброс в исходных данных (несколько процентов) может приводить к большим изменениям в значениях коэффициента Пуассона ν_{12} вплоть до смены знака.

В табл. 4 приведены результаты изменения жесткостных характеристик КМ в зависимости от погрешности в измерении угла намотки в одном из экспериментов. В первой строке даны точные значения жесткостных характеристик, во второй — результаты, когда в эксперименте 1 вместо угла 25° взят угол 26° , в третьей, когда в эксперименте 5 взят угол 73° , и в четвертой, когда имеются погрешности в эксперименте 1 ($\Delta\varphi_1 = -1^\circ$) и эксперименте 5 ($\Delta\varphi_5 = 3^\circ$). Из табл. 4 видно, что величины A_{11}^1 и A_2^0 изменяются мало, A_{33}^0 — больше, а A_{13}^0 — значительно.

Характер влияния погрешностей в замерах экспериментальных данных $\tilde{\epsilon}_{11}$, $\tilde{\epsilon}_{22}$, $\tilde{\sigma}^{11}$,

Таблица 4

$4A_{11}^0$	$4A_{13}^0$	$4A_{33}^0$	A_2^0	Погрешности в замерах угла намотки φ_1
ГПа				
10000	100	500	300	
9964	-20	470,4	296	$\Delta\varphi_1 = 1^\circ$
9956	298,6	511,6	315,5	$\Delta\varphi_5 = 3^\circ$
10000	414	547,2	319,2	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi_1 = -1^\circ \\ \Delta\varphi_5 = 3^\circ \end{array} \right.$

Таблица 5

$4A_{11}^0$	$4A_{13}^0$	$4A_{33}^0$	A_2^0
ГПа			
10056	133,16	546,4	300,2
10052	97,04	557,2	293,1
9936	-35,2	446	295,2
9976	-23,3	449,6	295,9

$\bar{\sigma}^{22}$ проследим за счет изменения E_1 или E_2 при подготовке исходных данных в одном из экспериментов на 10 или 20%. Результаты расчетов представлены в табл. 5. В строке 1 приведены упругие характеристики для случая, когда 20%-е возмущение в величине E_2 введено при подготовке исходных данных для эксперимента 1 ($\varphi = 25^\circ$), а в строке 2 — для эксперимента 5 ($\varphi = 70^\circ$), в строке 3 — для случая, когда 10%-е возмущение в E_1 введено при подготовке исходных данных для эксперимента 1 ($\varphi = 25^\circ$), а в строке 4 — для эксперимента 5 ($\varphi = 70^\circ$).

Анализ табл. 5 показывает, что влияние на A_{ij}^0 возмущений в экспериментальных данных \bar{e}_{11} , \bar{e}_{22} , $\bar{\sigma}^{11}$, $\bar{\sigma}^{22}$ аналогично случаю влияния возмущений угла φ .

Причиной сильной зависимости значений A_{13}^0 , A_{33}^0 , A_2^0 от погрешностей замеров в эксперименте является то, что искомым вектор $X = \{A_{11}^0, A_{13}^0, A_{33}^0, A_2^0\}^T$ содержит компоненты, которые могут отличаться друг от друга на несколько порядков. В данном случае наибольшим элементом является A_{11}^0 . Поэтому незначительное изменение A_{11}^0 в уравнениях равновесия может компенсироваться лишь за счет сильного изменения A_{13}^0 , A_{33}^0 , A_2^0 . Пусть исходные данные имеют отклонения от статистически точных значений на величину $\delta = \Delta b$, где b — вектор точных исходных данных. Если система уравнений относительно вектора X хорошо обусловлена, то отклонение вектора X от точного значения будет иметь тот же порядок: $\|\Delta X\| = k\|\delta\|$, $k \sim 1$. Однако ввиду большой разницы в величинах компонент вектора X (для ОКМ — около двух порядков) изменение малых компонент будет очень значительным. Например, пусть $X_2 \sim X_1 \cdot 100$, $\|\Delta X\| \sim 0,05$ (5%). Считая, что $\|\Delta X_2\| \sim \|\Delta X\|$, получим $\|\Delta X_2\| \sim \|X_2\|$. Отсюда видно, что, действительно, даже небольшие отклонения исходных данных от точных могут привести к большим изменениям X_2 .

6. На основе разработанной выше методики были обработаны реальные эксперименты, проведенные на разработанной и изготовленной в Казанской государственной архитектурно-строительной академии установке по исследованию механических свойств волокнистых композитов на трубчатых образцах (цилиндрических оболочках) [6, 7], снабженной автоматизированной системой тензометрирования и обработки экспериментальных данных, работу которой можно представить в виде трех этапов. На первом этапе по показаниям тензометров (датчиков деформаций и датчиков-силоизмерителей) вычисляются напряжения и деформации для трубчатых образцов в продольном и окружном направлении, на втором проводятся осреднение результатов для образцов одного семейства (одинаковые углы намотки и пути нагружения), аппроксимация и сглаживание с помощью сплайн-функций необходимых зависимостей для каждой серии испытанных образцов, на третьем выбирается параметр нагружения и определяются функции (2.8), аппроксимиру-

Таблица 6

Угол намотки $\pm\varphi$, град	E_2 , ГПа	
	Расчет	Эксперимент
35	6,96	7,8
55	20,8	15,8
65	43,9	40
70	58,7	50

ющие жесткостные характеристики A_{ij} .

Система обработки экспериментальных данных реализована на ПЭВМ с полным набором сервисных программ, в том числе графических. Использовались данные экспериментов на внутреннее давление с углами намотки $\pm\varphi = 35; 55; 65; 70^\circ$ и толщинами $1,5 \div 2$ мм. Из графиков, построенных по результатам деформирования, видно, что на большом участке деформирования они являются линейными по параметру нагружения, в качестве которого принималась компонента \tilde{e}_{22} . Поэтому были определены линейные упругие характеристики: $4A_{11}^0 = 98,84$ ГПа, $4A_{13}^0 = A_{31}^0 = 1,35$ ГПа, $4A_{33}^0 = 3,100$ ГПа, $A_2^0 = 3,10$ ГПа, а также технические константы: $\nu_{12} = A_{13}^0/A_{11}^0 = 0,0137$, $\nu_{21} = A_{13}^0/A_{33}^0 = 0,435$, $E_1 = 4A_{11}^0(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = 98,25$ ГПа, $E_2 = 4A_{20}^0(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = 3,08$ ГПа, $G = A_2^0 = 3,10$ ГПа.

Для косвенной оценки полученных результатов найдены жесткостные характеристики оболочек $\tilde{E}_2 = \tilde{\sigma}^{22}/\tilde{e}_{22}$ по экспериментальным данным, а также пересчетом A_{ij}^0 по соотношениям [8]

$$\begin{aligned}\tilde{E}_2 &= 4\tilde{A}_{33}(1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}), \\ 4\tilde{A}_{11} &= 4A_{11}^0 \cos^4\varphi + 4A_{33}^0 \sin^4\varphi + 2(4A_{13}^0 + 2A_2^0) \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi, \\ 4\tilde{A}_{33} &= 4A_{11}^0 \sin^4\varphi + 4A_{33}^0 \cos^4\varphi + 2(4A_{13}^0 + 2A_2^0) \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi, \\ 4\tilde{A}_{13} &= 4A_{13}^0 + [4A_{11}^0 + 4A_{33}^0 - 2(4A_{13}^0 + 2A_2^0)] \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi, \\ \tilde{\nu}_{12} &= \tilde{A}_{13}/\tilde{A}_{11}, \quad \tilde{\nu}_{21} = \tilde{A}_{13}/\tilde{A}_{33}.\end{aligned}$$

Результаты сравнения приведены в табл. 6.

Итак, предложенная методика позволяет определять жесткостные характеристики ОКМ путем обработки данных испытаний тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из этого ОКМ; отличие расчетных (полученных по предложенной методике) и экспериментальных результатов не превышает 25%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16747).

ЛИТЕРАТУРА

1. Терегулов И. Г. Конечные деформации тонких анизотропных и композитных оболочек и определяющие соотношения // Механика композит. материалов. 1987. № 4. С. 654–660.
2. Терегулов И. Г. Определяющие соотношения для анизотропных и волокнисто-композитных оболочек при конечных деформациях // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 167–173.

3. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984.
4. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Таирова Л. П. Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30.
5. Barther L., Berger H., Chaquin J. P., Ohayon R. Identification des caracteristiques mecaniques des structures en materian composite // Rech. Aerosp. 1981. N 5. P. 327-332.
6. Терегулов И. Г., Алексеев К. П., Тильш А. Л., Чернов В. М. Экспериментальное определение механических свойств органопластиков на тонкостенных трубчатых образцах при осевом растяжении — сжатию. Сер.VIII // Материаловедение. Механика композиционных материалов. 1993. Вып. 2. С. 4-12.
7. Терегулов И. Г., Алексеев К. П., Сафиуллин Д. Х., Каюмов Р. А. Установка для исследования механических свойств волокнистых композитов на трубчатых образцах // Механика композит. материалов. 1995. Т. 31, № 1. С. 125-130.
8. Васильев В. В. Механика конструкций из композитного материала. М.: Машиностроение, 1988.

Поступила в редакцию 21/VII 1995 г.
