ПМТФ, № 4, 1970

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД С ИСПАРЕНИЕМ

Н. Н. Кочина

(Москва)

Рассматривается задача об изменении уровня грунтовых вод между двумя вертикальными каналами с учетом испарения, нелинейно зависящего от уровня грунтовых вод. Задача сводится к интегрированию уравнения диффузии с правой частью, нелинейно зависящей от искомой функции, и решается методом последовательных приближений. При выполнении некоторого неравенства, зависящего от величин, входящих в условия задачи, метод последовательных приближений сходится

Рассмотрим задачу об изменении уровня грунтовых вод между двумя вертикальными каналами, находящимися на расстоянии L друг от друга, с учетом испарения. Предположим, что интенсивность испарения $\sigma f(h)$ заданная непрерывная со своей производной нелинейная функция. Будем считать также, что в начальный момент времени уровни воды в каналах внезепно становятся равными H_1 и H_2.

Эта задача сводится к интегрированию уравнения диффузии с нелинейной правой частью

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f(h) \qquad \left(a^2 = \frac{\varkappa H_*}{\sigma}\right) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$h(0,\ t) = H_1, \qquad h(L,\ t) = H_2 \tag{2}$$

и начальным условием

$$h(x,\ 0) = H_0, \qquad (0 < x < L) \tag{3}$$

Здесь h — уровень грунтовых вод, σ — недостаток насыщения или водоотдача, H_* — средняя глубина грунтового потока, $\varkappa$ — коэффициент фильтрации.

Для частного вида функции $f(h)$ задача, описываемая уравнениями (1) — (3), рассматривалась в работе [1].

При этом предполагалось, что функция $f(h)$ постоянна или линейно зависит от разности $h - h_0$, если $h > h_0$, где h_0 — некоторый критический уровень грунтовых вод, если же грунтовые воды залегают достаточно глубоко ($h < h_0$), то $f(h) \equiv 0$ (испарением можно пренебречь).

Ниже будем предполагать, что уровень грунтовых вод превышает критический уровень h_0 ($h > h_0$).

Пусть $h_0(x)$ — стационарное решение уравнения (1) с граничными условиями (2), т. е. решение задачи

$$a^2 \frac{d^2 h_0}{dx^2} + f(h_0) = 0, \qquad h_0(0) = H_1, \qquad h_0(L) = H_2 \tag{4}$$

Легко видеть, что функция $h_0(x)$ определяется зависимостью

$$x = \pm \int_{H_1}^{h_0} \frac{du}{\sqrt{c - J(u)}} \qquad \left(J(u) = \frac{2}{a^2} \int_{H_1}^{u} f(v)\, dv\right) \tag{5}$$

где c — корень уравнения

$$L = \pm \int\limits_{H_1}^{H_2} \frac{du}{\sqrt{c - J(u)}} \tag{6}$$

Вводя вместо $h(x, t)$ новую функцию z

$$h(x, t) = h_0(x) + z(x, t) \tag{7}$$

в силу (4) сведем задачу (1) — (3) к следующей задаче в той же области $0 < x < L$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + f[h_0(x) + z] - f[h_0(x)] \tag{8}$$

$$z(0, t) = z(L, t) = 0, \qquad z(x, 0) = H_0 - h_0(x) \tag{9}$$

Решение этой задачи будем искать методом последовательных приближений.

Пусть выполнены неравенства

$$|f(u)| \leqslant M, \qquad |f'(u)| \leqslant M \tag{10}$$

Докажем сходимость метода последовательных приближений при

$${}^2/_3 ML^2 / a^2 = q < 1 \tag{11}$$

Обозначая для краткости

$$\Phi(z, x) = f[h_0(x) + z] - f[h_0(x)], \qquad \Omega(x) = H_0 - h_0(x) \tag{12}$$

рассмотрим последовательность приближений $z_n(x, t)$, определяемую в силу (8), (9) соотношениями

$$\frac{\partial z_{n+1}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial x^2} + \Phi(z_n, x), \qquad \begin{matrix} z_{n+1}(0, t) = z_{n+1}(L, t) = 0 \\ z_{n+1}(x, 0) = \Omega(x) \end{matrix} \tag{13}$$

Ищем решение линейной задачи (13) в виде суммы

$$z_{n+1} = u + v_{n+1} \tag{14}$$

Здесь u — решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \begin{matrix} u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \Omega(x) \end{matrix} \tag{15}$$

а v_{n+1} — решение неоднородного уравнения с однородными граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial v_{n+1}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v_{n+1}}{\partial x^2} + \Phi(z_n, x) \qquad \begin{matrix} v_{n+1}(0, t) = v_{n+1}(L, t) = 0 \\ v_{n+1}(x, 0) = 0 \end{matrix} \tag{16}$$

Решение u уравнения (15) с граничными условиями ищем в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp \frac{-\pi^2 a^2 k^2 t}{L^2} \sin \frac{\pi k x}{L} \tag{17}$$

Здесь коэффициенты C_k определяются из начального условия (15). Получаем

$$C_k = \frac{2}{L} \int\limits_0^L \Omega(x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx \tag{18}$$

Функцию v_{n+1} будем искать в виде ряда

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(n)}(t) \exp \frac{-\pi^2 a^2 k^2 t}{L^2} \sin \frac{\pi k x}{L} \tag{19}$$

Из этой формулы видно, что граничные условия (16) удовлетворяются. Из начальных условий (16) вытекает, что неизвестные функции $D_k^{(n)}(t)$ должны удовлетворять условиям

$$D_k^{(n)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

Разложим функцию $\Phi(z_n, x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(t) \sin \frac{\pi k x}{L}, \quad f_k^{(n)}(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi[z_n(y, t), y] \sin \frac{\pi k y}{L} dy \tag{21}$$

Подставляя в уравнение (16) ряды (19) и (21), получаем

$$\frac{dD_k^{(n)}}{dt} = f_k^{(n)}(t) \exp \frac{\pi^2 a^2 k^2 t}{L^2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

Интегрируя уравнение (22), с учетом условия (20) находим

$$D_k^{(n)}(t) = \int_0^t f_k^{(n)}(\tau) \exp \frac{\pi^2 a^2 k^2 \tau}{L^2} d\tau \tag{23}$$

Теперь, подставляя (23) и формулу (19) и учитывая выражения (21) для $f_k^{(n)}(t)$, найдем окончательное уравнение для определения функции $v_{(n+1)}(x, t)$ (24)

$$v_{n+1}(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^L \Phi[z_n(y, \tau), y] \exp \frac{-\pi^2 a^2 k^2 (t - \tau)}{L^2} \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi k y}{L} dy\, d\tau$$

Легко видеть, что ряд (24) равномерно сходится (общий член его не превышает величины $4ML^2 / \pi^2 a^2 k^2$).

В предположении, что n-приближение $z_n(x, t)$ известно, $n + 1$-е приближение будет определяться формулами (14), (17), (18) и (24) с использованием обозначений (12).

Докажем, что все приближения $v_n(x, t)$ ограничены одной и той же константой.

В силу (10) из (24) следует неравенство (рассматривается пространство непрерывных функций C)

$$\| v_{n+1}(x, t) \| \leqslant q, \qquad q = \frac{4MSL^2}{\pi^2 a^2} \qquad \left(S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \tag{25}$$

Как известно [2], сумма $S = {}^1/_6 \pi^2$. Следовательно, из формулы (25) вытекает (11).

Докажем сходимость метода последовательных приближений при $q < 1$.

Для разности двух последовательных приближений из (24) получаем следующее выражение:

$$v_{n+1}(x, t) - v_n(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^L \{\Phi[z_n(y, \tau), y] - \Phi[z_{n-1}(y, \tau), y]\} \times \tag{26}$$

$$\times \exp \frac{-\pi^2 a^2 k^2 (t - \tau)}{L^2} \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi k y}{L} dy\, d\tau$$

По теореме о среднем значении

$$\Phi[z_n(y,\tau),y]-\Phi[z_{n-1}(y,\tau),y]=\Phi_\theta'[\theta,y](z_n(y,\tau)-z_{n-1}(y,\tau)) \quad (27)$$

где θ лежит между z_{n-1} и z_n. Из (27), (26) и (10), а также используя (14), последовательно находим

$$\|v_{n+1}-v_n\|\leqslant q\|z_n-z_{n-1}\|,\ \|v_{n+1}-v_n\|\leqslant q\|v_n-v_{n-1}\| \quad (28)$$

Из (28) видно, что при $q<1$ последовательность равномерно сходится. Из неравенств (28) следуют оценки

$$\|v_{n+1}-v_n\|\leqslant q^n\|v_1-v_0\|,\ \|z_{n+1}-z_n\|\leqslant q^n\|z_1-z_0\| \quad (29)$$

Уровень грунтовых вод $h(x, t)$ определяется в силу (7), (14) и (24) зависимостью

$$h(x,t)=h_0(x)+u(x,t)+\lim_{n\to\infty}v_n(x,t) \quad (30)$$

где $u(x, t)$ дается соотношениями (17) и (18), а $v_{n+1}(x, t)$ — формулой (24).

Легко видеть, что если интенсивность испарения — постоянная величина $f(h)=-\alpha$, то глубина грунтового потока $h(x, t)$ представляется следующим выражением:

$$h(x,t)=h_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp\frac{-\pi^2a^2k^2t}{L^2}\sin\frac{\pi kx}{L} \quad (31)$$

$$h_0(x)=\frac{\alpha}{2a^2}x^2+\left(\frac{H_2-H_1}{L}-\frac{\alpha L}{2a^2}\right)x+H_1$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{H_0-H_1+(-1)^k(H_2-H_0)}{k}+\frac{\alpha L^2}{a^2}\frac{[1-(-1)^k]}{k^3}\right\}$$

Пусть теперь $f(h)=-\beta h$ (интенсивность испарения — линейная функция глубины грунтового потока, отсчитываемой от дна водоема).

Пользуясь формулами (17), (24), (5), (12), (18) и переходя к пределу в формуле (30), найдем зависимость уровня грунтовых вод от x и t

$$h(x,t)=h_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\exp\left[-\left(\beta+\frac{\pi^2a^2k^2}{L^2}\right)t\right]\sin\frac{\pi kx}{L} \quad (32)$$

$$h_0(x)=\frac{H_1\,\mathrm{sh}\,\lambda(L-x)+H_2\,\mathrm{sh}\,\lambda x}{\mathrm{sh}\,\lambda L}\qquad\left(\lambda=\frac{\sqrt{\beta}}{a}\right)$$

$$b_k=\frac{2}{\pi k}\left\{H_0-H_1+(-1)^k(H_2-H_0)+\frac{\beta[H_1-(-1)^kH_2]}{\beta+\pi^2a^2k^2/L^2}\right\}$$

К тому же известному в теории фильтрации результату (32) приводит и непосредственное интегрирование уравнения (1), где положение $f(h)=-\beta h$, с граничными условиями (2) и начальным условием (3).

Поступила 8 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочина Н. Н. Об одном решении уравнения диффузии с нелинейной правой частью. ПМТФ, 1969, № 4.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.