УДК 519.624.3+519.632.6+519.642

Итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка операторов в гильбертовом пространстве

В.И. Тараканов, А.О. Дубовик

Сургутский государственный университет, просп. Ленина, 1, Сургут, Тюменская обл., ХМАО-Югра, 628400
E-mails: sprtdv@mail.ru (Тараканов В.И.), alldubovik@gmail.com (Дубовик А.О.)

Тараканов В.И., Дубовик А.О. Итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка операторов в гильбертовом пространстве // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 1. — С. 79–93.

Предлагается новый итерационный алгоритм для вычисления спектральных параметров квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов в Гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: *оператор, спектр, итерационный алгоритм.*

Tarakanov V.I., Dubovik A.O. Iterative algorithm for calculation of spectral parameters of a quadratic bunch of operators in the Hilbert space // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 1. — P. 79–93.

A new iterative algorithm is suggested for calculating spectral parameters of a quadratic bunch of partially symmetrical compact operators in the Hilbert space.

Key words: *operator, spectrum, iterative algorithm.*

1. Введение

Рассматривается квадратичный пучок компактных в гильбертовом пространстве H операторов $\lambda\varepsilon B + \lambda^2 A$, где A, B — компактные операторы, λ — спектральный параметр, ε — некоторое заданное число ($0 \leqslant \varepsilon < p$), где p — параметр, зависящий от операторов A, B. Для операторного пучка рассматривается спектральное уравнение

$$\varphi = \lambda\varepsilon B\varphi + \lambda^2 A\varphi. \tag{1}$$

Действительный спектр этого уравнения ищется на основе итерационного алгоритма

$$y_{k+1} = \sigma_k \varepsilon B y_k + \sigma_k^2 A y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad y_1 = Ah, \quad h \in H, \tag{2}$$

где σ_k — один из действительных корней уравнения

$$\sigma_k^4 \|Ay_k\|^2 + 2\sigma_k^3 \varepsilon (Ay_k, By_k) + \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|By_k\|^2 - \|y_k\|^2 = 0. \tag{3}$$

Предполагается, что φ, h, y_k — функции одной или нескольких переменных, A и B — интегральные операторы, $\|h\| \neq 0$, $\mathrm{Ker}A = 0$, $\mathrm{Ker}B = 0$. Интегральное уравнение (1) получено на основе спектрального уравнения в дифференциальной форме. Существует множество функций ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, для которых выполняются условия:

$$(\psi_i, Av) = 0, \qquad (\psi_i, Bv) = 0 \quad \forall\, v \in H. \tag{4}$$

Условия (4) являются эквивалентом краевых условий в дифференциальных спектральных уравнениях.

Вводится множество $E = H \ominus \operatorname{span}\{\psi_i\}$ и предполагается выполнение условий $A\colon H \to E$, $B\colon H \to E$, где E одно и тоже для операторов A, B. В этом случае вводится понятие частично симметричного оператора следующим образом:

$$(u, Av) = (v, Au), \qquad (u, Bv) = (v, Bu) \quad \forall\, u, v \in E, \tag{5}$$

$$\forall\, u \in H \setminus E \quad \exists\, v_1 \in E\colon (u, Av_1) \neq (v_1, Au), \quad \exists\, v_2 \in E\colon (u, Bv_2) \neq (v_2, Bu). \tag{6}$$

Соотношения (6) действительно выполняются при выполнении условий (4), если за v_1 взять $A\psi_i$, а за v_2 взять $B\psi_i$. В этом случае $(u, Av_1) = 0$ и $(u, Bv_2) = 0$ на основе (4), а $(v_1, Au) = (A\psi_i, A\psi_i) = \|A\psi_i\|^2 \neq 0$, $(v_2, Bu) = (B\psi_i, B\psi_i) = \|B\psi_i\|^2 \neq 0$.

Таким образом, операторы A, B являются частично симметричными и, кроме того, оператор A предполагается положительным в $E(v, Av) > 0\ \forall\, v \in E$. Частично симметричные операторы были введены в [1] в форме, которая трудно проверяется, в отличие от уравнений (5), (6).

При значении $\varepsilon = 1$ теория такого уравнения (1) и итерационный алгоритм (2), (3) приведены и обоснованы в работе [1]. Обобщение этой теории на случай, когда $\varepsilon \neq 1$, связано с необходимостью получения более удовлетворительных результатов по нахождению критерия сходимости итерационного алгоритма.

В [1] для этого предлагалось конструировать некоторый вспомогательный оператор S, зависящий от операторов A, B, и в качестве критерия сходимости выбирать условие знакоопределенности этого оператора S. Такой критерий неудобен и с практической точки зрения, так как значительно усложняет процедуру программирования задачи и ее численного решения, а с другой стороны, этот критерий неудовлетворителен и с теоретической точки зрения, так как поведение алгоритма носит только частично предсказуемый характер. В случае когда для оператора S не выполняется условие знакоопределенности, ничего сказать о сходимости итерационного алгоритма было нельзя.

Поэтому цель обобщения спектрального уравнения и итерационного алгоритма на случай, когда $\varepsilon \neq 1$, заключалась в получении предсказуемого итерационного алгоритма всегда, когда ε принимает некоторое значение в конечном интервале значений $0 \leqslant \varepsilon < p$, $p > 0$, и нахождении этой величины p.

Следует отметить, что в [1] приводились и обосновывались итерационные алгоритмы нахождения спектра и для одного компактного частично симметричного оператора и для линейного пучка таких операторов. Для этих спектральных уравнений проведена апробация сходимости итерационных алгоритмов, результаты которой представлены не только в работе [1], но и в работах [2–5]. Численная апробация итерационного алгоритма для квадратичного пучка операторов до этого времени никем не проводилась.

Итерационный алгоритм нахождения спектра для одного компактного частично симметричного оператора является некоторым обобщением и модификацией метода О. Келлога (1922) [6], который предложил его не для частично симметричных, а для самосопряженных операторов и не с целью численного расчета, а для доказательства существования спектральных чисел. До работы [1] метод О. Келлога излагался в таком же виде, в котором он излагался Келлогом [6, 7]. Остальные итерационные алгоритмы не имеют прототипов.

Введение этих итерационных алгоритмов, которые реализуются в гильбертовом пространстве H, т. е. в бесконечномерном полном пространстве с заданным скалярным произведением и нормой, связано с возможностью перехода от спектральной задачи с дифференциальными операторами к спектральной задаче с интегральными операторами. При этом решается проблема получения задач с компактными операторами.

Целью данной статьи является не только представление модифицированного итерационного алгоритма для нахождения спектральных чисел квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов, но и численная апробация этого итерационного алгоритма.

Причем численная апробация понимается в широком смысле и должна решать следующие задачи.

- Подтвердить содержательность итерационного алгоритма, т. е. подтвердить существование прикладных задач, для решения которых может использоваться этот алгоритм.
- Проверить устойчивость этого алгоритма на итерациях применительно к наличию численных погрешностей при компьютерной реализации.
- Провести процедуру оценки погрешности при численной реализации.
- На прикладной задаче продемонстрировать процедуру перехода от спектральной задачи в дифференциальной форме к спектральной задаче в операторной форме с компактными операторами, которые, как правило, являются интегральными операторами.

2. Основной теоретический результат

Предварительно изложим два вспомогательных утверждения, связанных с итерационным алгоритмом (2), (3).

Утверждение 1. Алгебраическое уравнение относительно параметра σ_k имеет, по крайней мере два действительных корня σ^+, σ^-, один из которых положителен, а другой отрицателен.

Доказательство. Функция $f(x) \equiv x^4\|Ay_k\|^2 + 2x^3\varepsilon(Ay_k, By_k) + x^2\varepsilon^2\|By_k\|^2 - \|y_k\|^2$ является непрерывной и для нее выполняется соотношение

$$f(0) < 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty,$$

поэтому есть, по крайней мере два действительных корня, один из которых положителен, а другой отрицателен.

Далее, ради краткости, итерационный алгоритм с положительным корнем σ^+ будем называть положительным итерационным процессом, а с отрицательным корнем σ^- — отрицательным итерационным процессом. Если есть два положительных или два отрицательных корня, то берется наименьший по модулю. □

Утверждение 2. На первой итерации выполняется неравенство

$$\|y_1\|^2 - \varepsilon^2\sigma_1^2(\varepsilon)\|By_1\|^2 \geqslant \|y_1\|^2[1 - \varepsilon^2\sigma_1^2(\varepsilon)\|B\|^2] > 0 \tag{7}$$

$$\forall\varepsilon \in \{0 \leqslant \varepsilon < p^+\}, \qquad \forall\varepsilon \in \{0 \leqslant \varepsilon < p^-\}, \tag{8}$$

где p^+, p^- относятся соответственно к положительному и отрицательному процессам и находятся по формуле

$$p^{\pm} = \frac{\|Ay_1\|}{\sqrt{\|B\|}} \left[\mp (Ay_1, By_1) + \sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 [\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|]^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

причем выполняются неравенства $p^+ > 0$, $p^- > 0$.

Доказательство. Функция $\varphi_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 \sigma_1^2(\varepsilon) \|B\|^2$ является непрерывной по ε и при $\varepsilon = 0$ принимает значение $\varphi_1(0) = 1$. Пусть p^+, p^- — первые корни уравнений $\varphi_1(p^+) = 0$, $\varphi_1(p^-) = 0$, тогда они должны удовлетворять соотношению

$$p^{\pm} \sigma_1^{\pm} \|B\| = \pm 1, \quad (10)$$

и на промежутке (8) будет выполняться неравенство (7). Кроме того, на первой итерации будет выполняться соотношение (3), которое можно записать в следующем виде:

$$|\sigma_1^{\pm}|^4 \|Ay_1\|^2 + 2|\sigma_1^{\pm}|^2 \sigma_1^{\pm} p^{\pm} (Ay_1, By_1) + |\sigma_1^{\pm}|^2 |p^{\pm}|^2 \|By_1\|^2 - \|y_1\|^2 = 0. \quad (11)$$

Исключая из (10), (11) величину $p^{\pm}$, получим квадратное уравнение относительно величины $|\sigma_1^{\pm}|^2$:

$$|\sigma_1^{\pm}|^4 \pm 2|\sigma_1^{\pm}|^2 \frac{(Ay_1, By_1)}{\|Ay_1\|^2 \|B\|} + \frac{1}{\|Ay_1\|^2} \left\{ \frac{\|By_1\|^2}{\|B\|^2} - \|y_1\|^2 \right\} = 0. \quad (12)$$

Из (12) находится значение $|\sigma^{\pm}|^2$:

$$|\sigma_1^{\pm}|^2 = \frac{1}{\|B\| \|Ay_1\|^2} \left\{ \mp (Ay_1, By_1) + \sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 (\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|^2)} \right\}. \quad (13)$$

В (13) под корнем стоит положительная величина, так как на основе неравенства Коши выполняется $\|By_1\|^2 \leqslant \|B\|^2 \|y_1\|^2$ и, кроме того, выполняется неравенство

$$\sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 (\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|^2)} > |(Ay_1, By_1)|, \quad (14)$$

поэтому левая часть равенства (13) будет положительной.

Возвращаясь к уравнениям (10) на основе (8), получим выражение для $p^{\pm}$ в виде (9).

$\square$

Если требовать, чтобы неравенство (7) выполнялось сразу и для положительного, и для отрицательного итерационного процесса, т. е. вместо (8) стояло неравенство $\forall\, \varepsilon \in \{0 \leqslant \varepsilon < p\}$, то в качестве p необходимо брать величину:

$$p = \frac{\|Ay_1\|}{\sqrt{\|B\|}} \left\{ |(Ay_1, By_1)| + \sqrt{(Ay_1, By_1)^2 + \|Ay_1\|^2 [\|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|By_1\|^2]} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Теорема 1. *Для каждого $\varepsilon \in \{0 \leqslant \varepsilon < p\}$ и произвольных компактных частично симметричных операторов A, B, из которых A является положительным и имеющим нулевое ядерное множество, существует одно положительное и одно отрицательное значения: λ^+, λ^- спектрального параметра в спектральных уравнениях:*

$$\varphi^+ = \lambda^+ \varepsilon B\varphi^+ + |\lambda^+|^2 A\varphi^+, \tag{16}$$

$$\varphi^- = \lambda^- \varepsilon B\varphi^- + |\lambda^-|^2 A\varphi^-, \tag{17}$$

а итерационный алгоритм (2), (3) *сходится к решению либо уравнения* (16), *либо уравнения* (17) *в смысле*

$$|\sigma_{k+1}| < |\sigma_k| \quad \forall\, k \in \{1, 2, 3, \ldots\}, \tag{18}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k^+ = \lambda^+, \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma_k^- = \lambda^-, \tag{19}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k^+ - \varphi^+\| = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \|y_k^- - \varphi^-\| = 0, \tag{20}$$

если итерационный процесс реализуется отдельно для положительного значения корня σ_k^+ *и для отрицательного значения корня* σ_k^- *уравнения* (3), *а в качестве значения* p *берется выражение* (15).

Доказательство этой теоремы не слишком отличается от доказательства, приведенного в [1] для квадратичного пучка операторов, а главное отличие основано на утверждении 2.

Замечание. Из теоремы не следует вывод, что собственные функции φ^+, φ^- спектральных уравнений (16), (17) являются линейно независимыми функциями в обязательном порядке. В зависимости от конкретных дополнительных свойств оператора B может иметь место как линейная независимость этих функций, так и их линейная зависимость.

3. Итерационный алгоритм нахождения всего множества действительных собственных чисел и собственных функций квадратичного пучка операторов

Многократно повторяя итерационный процесс (2), (3) с модифицированными операторами A_j, B_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, можно найти следующие собственные числа λ_j и нормированные собственные функции

$$\varphi_j\colon \|\varphi_j\| = 1. \tag{21}$$

Модифицированные операторы A_j, B_j находятся по рекуррентным соотношениям:

$$A_{j+1}u = A_j u - \varphi_j(\varphi_j, A_j u), \qquad B_{j+1}u = B_j u - \varphi_j(\varphi_j, B_j u), \quad j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{22}$$

Операторы A_j, B_j отображают множества $E_j \to E_{j+1}$, $E_{j+1} = E_j \ominus \operatorname{span}\{\varphi_j\}$, при этом справедливо вложение

$$E_{j+1} \subset E_j \subset \cdots \subset E. \tag{23}$$

Рекуррентное соотношение (22) реализуется при начальных условиях:

$$A_1 u \equiv Au, \qquad B_1 u \equiv \varepsilon Bu, \qquad \varphi_1 \equiv \varphi. \tag{24}$$

Каждое повторение итерационного алгоритма будем называть очередным итерационным циклом и нумеровать его индексом j. Начальная итерация в каждом итерационном цикле начинается с функций

$$y_j(1) = \frac{Ah - \sum\limits_{m=1}^{j-1} \varphi_m(Ah, \varphi_m)}{\left\| Ah - \sum\limits_{m=1}^{j-1} \varphi_m(Ah, \varphi_m) \right\|}. \tag{25}$$

Здесь целочисленный параметр в скобках указывает номер итерации, а индекс j — номер итерационного цикла. В каждом итерационном цикле j в качестве предельных соотношений получаются

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_j(k) = \lambda_j, \qquad \lim_{k\to\infty} y_j(k) = \varphi_j, \tag{26}$$

где множество λ_j является множеством собственных чисел уравнения

$$\varphi_j = \varepsilon\lambda_j B\varphi_j + \lambda_j^2 A\varphi_j. \tag{27}$$

Под собственными числами λ_j и собственными функциями φ_j понимаются λ_j^+, φ_j^+ или λ_j^-, φ_j^-. При этом не исключается случай, когда одному собственному числу λ_j принадлежит несколько собственных функций и тогда собственное число повторяется с разным номером столько раз, сколько ему принадлежит собственных функций. Таким образом каждое очередное собственное число λ_j и собственная функция φ_j находятся из очередного итерационного цикла. Можно показать, что

$$\gamma(\varphi_j) < |\lambda_j| < \delta(\varphi_j),$$

$$\delta(\varphi_j) = \frac{1}{2(\varphi_j, A\varphi_j)}\left[\sqrt{\varepsilon^2(\varphi_j, B\varphi_j)^2 + 4(\varphi_j, A\varphi_j)} + \varepsilon|(\varphi_j, B\varphi_j)|\right], \tag{28}$$

$$\gamma(\varphi_j) = \frac{1}{2(\varphi_j, A\varphi_j)}\left[\sqrt{\varepsilon^2(\varphi_j, B\varphi_j)^2 + 4(\varphi_j, A\varphi_j)} - \varepsilon|(\varphi_j, B\varphi_j)|\right]. \tag{29}$$

Если числитель и знаменатель (29) умножить на сопряженное выражение, то получим еще одну оценку снизу

$$\gamma(\varphi_j) \geqslant \alpha_j \equiv \frac{2}{[\varepsilon^2\|B\|_{E_j}^2 + 4\|A\|_{E_j}]^{\frac{1}{2}} + \|B\|_{E_j}\varepsilon}. \tag{30}$$

Из (28)–(30) следует двухсторонняя оценка для величины $|\lambda_j|$:

$$0 < \alpha_j \leqslant |\lambda_j| < \delta(\varphi_j) < \infty. \tag{31}$$

В силу вложения $E_j \subset E_{j-1} \subset \cdots \subset E_1 \subset H$ нормы $\|B\|_{E_j}$, $\|A\|_{E_j}$ являются монотонно убывающими числовыми последовательностями с ростом j, тогда параметр α_j является монотонно возрастающей последовательностью и выполняется

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty, \qquad \lim_{j\to\infty} \beta(\varphi_j) = \infty, \qquad \lim_{j\to\infty} |\lambda_j| = \infty, \qquad \alpha_{j+1} > \alpha_j. \tag{32}$$

Собственные числа $|\lambda_j|$ представляют почти упорядоченное множество в следующем смысле. Для любого номера $i \geqslant 1$ существует число $m_* \equiv m_*(i) \geqslant 1$ такое, что если произвести перенумерацию собственных чисел на промежутке $1 \leqslant j \leqslant i + m_*$ по степени возрастания их модулей с ростом j, то эти перенумерованные числа на промежутке $1 \leqslant j \leqslant i$ будут меньше всех собственных чисел, определенных на промежутке $i < j < \infty$.

Число m_* находится из условия, при котором неравенство $\alpha_{i+m_*} < \beta_i$ меняется на неравенство $\beta_i < \alpha_{i+m_*}$. На основе соотношения (32) и основана методика частичного позиционирования любой начальной группы спектральных параметров по степени возрастания модуля. При этом после процедуры перенумерации начальной группы самое маленькое значение имеет λ с номером 1, все остальные λ_j, $1 < j < \infty$, будут больше λ_1.

Мы опускаем доказательство всех результатов этого метода, но сошлемся на метод исчерпывания Парлетта, приведенный в [10] для матричных спектральных уравнений, который во многом аналогичен изложенным выше результатам, чтобы сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.
1. *Существует бесконечное множество действительных собственных чисел λ_j и соответствующих собственных функций φ_j, которые представляют полную ортонормированную систему на множестве $E \subset H$:*

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \{1, i = j;\ 0, i \neq j\}. \tag{33}$$

Собственные числа и собственные функции удовлетворяют одному и тому же уравнению (27) *и находятся последовательно путем реализации итерационного алгоритма* (2), (3) *с модифицированными операторами A_j, B_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$.*
2. *Собственные числа $|\lambda_j|$ неограниченно растут с ростом номера j, причем существует нижняя граница собственных чисел больше нуля. Существуют двухсторонние оценки каждого числа $|\lambda_j|$, которые растут с ростом номера j, причем нижняя оценка растет монотонно*

$$0 < \alpha_j \leqslant |\lambda| \leqslant \beta_j, \qquad \alpha_{j+1} \geqslant \alpha_j. \tag{34}$$

4. Постановка прикладной задачи

Апробация итерационного алгоритма для нахождения спектра квадратичного пучка компактных операторов производится при численном решении задачи о нахождении собственных частот колебаний трубы с протекающей жидкостью.

Необходимость нахождения собственных частот на практике связана с исследованием резонансной потери устойчивости. Труба рассматривается в тросовом приближении с пренебрежением изгибной жесткости, т. е. как шланг. Это возможно, если труба сделана из материала с малыми модулями упругости, например резины, либо труба сделана из металла, но имеет большую длину.

Сама задача приобрела актуальность в начале пятидесятых годов XX века, когда изучалась проблема дозаправки горючим самолетов в воздухе. В настоящее время имеются практические применения этой задачи, например, в нефтегазовой технологии, где встречаются варианты длинных стальных труб с протекающей жидкостью. Здесь можно указать, например, два варианта использования таких труб.

Первый вариант связан с резонансной потерей устойчивости бурильной колонны, имеющей длину до нескольких километров, подвешенной на буровой установке и испытывающей вследствие с этим растягивающее усилие переменное по длине от действия силы тяжести и трения бурового раствора, протекающего по трубе. Так как между бурильной колонной и стенками скважины имеется кольцевой зазор, то бурильная колонна может совершать поперечные колебания.

Второй вариант связан с резонансной потерей устойчивости трубопровода при извлечении нефти на шельфе морей, когда трубопровод соединяет буровую платформу с устьем скважины на дне моря.

Математическая модель колебания трубы в тросовом приближении записывается в следующем виде:

$$[(N(x) - \rho V^2)W_{,x}]_{,x} - \rho V W_{,xt} = \rho_0 W_{,tt}, \quad 0 < x < l. \tag{35}$$

Предполагается, что концы трубы закреплены, т. е. выполняются краевые условия:

$$W\,|_{x=0} = 0, \qquad W\,|_{x=l} = 0. \tag{36}$$

В уравнениях (35), (36) $W \equiv W(x,t)$ — поперечное смещение трубы, x — координата вдоль трубы, t — время, V — скорость жидкости, причем выполняются следующие условия: $V > 0$, когда жидкость течет по направлению координаты x, $V < 0$, когда жидкость течет в противоположном направлении, $N \equiv N(x)$ — растягивающее усилие, действующее на трубу по направлению оси x, l — длина трубы, ρ — погонная плотность жидкости, ρ_0 — погонная плотность и жидкости, и трубы, ρ, ρ_0 — постоянные величины.

Слагаемые $-\rho V^2 W_{,xx}$, $-\rho V W_{,xt}$ впервые ввел В.И. Феодосьев [8]. Эти слагаемые учитывают реакцию жидкости на поперечные колебания трубы, при этом слагаемое $-\rho V^2 W_{,xx}$ учитывает центробежную силу, а слагаемое $-\rho V W_{,xt}$ учитывает силу Кориолиса. Задача (35), (36) рассматривалась во многих работах при дополнительных ограничениях $N(x) = \mathrm{const}$. В условиях, когда $N(x)$ произвольная непрерывная функция координаты x, эта задача никем не решалась.

Собственные колебания трубы ищутся в виде

$$W(x,t) = U(x)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{37}$$

где ω — собственная частота колебаний. При подстановке (37) в (35), (36), получаем спектральную задачу

$$[(N(x) - \rho V^2)U_{,x}]_{,x} - i\omega\rho V U_{,x} + \rho_0\omega^2 U = 0, \quad 0 < x < l, \tag{38}$$

$$U\,|_{x=0} = 0, \qquad U\,|_{x=l} = 0. \tag{39}$$

Соотношения (38), (39) удобно привести к безразмерному виду, вводя безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$, безразмерную частоту колебаний $\lambda = \omega\frac{l}{V}$, безразмерный параметр $\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}$, $\varepsilon < 1$, и безразмерную функцию $h(\xi) = \frac{\rho}{\rho_0}\left[\frac{N(\xi)}{\rho V^2} - 1\right]$, $h(\xi) > 0$:

$$[h(\xi)U_{,\xi}]_{,\xi} - i\lambda\varepsilon U_{,\xi} + \lambda^2 U = 0, \quad 0 < \xi < 1, \tag{40}$$

$$U\,|_{\xi=0} = 0, \qquad U\,|_{\xi=1} = 0. \tag{41}$$

Если ввести функцию

$$y = U_{,\xi}, \qquad U = \int\limits_0^{\xi} y(\xi_1)\,d\xi_1, \tag{42}$$

то соотношения (40), (41) можно записать в виде

$$[h(\xi)y(\xi)]_{,\xi\xi} - i\lambda\varepsilon y_{,\xi} + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < \xi < 1, \tag{43}$$

$$\int\limits_0^1 y(\xi)\,d\xi = 0. \tag{44}$$

Это спектральная задача в дифференциальной форме относительно спектрального параметра λ, который является действительным числом. Из (43) следует, что функция $y = y(\xi)$ должна быть комплексной. Все результаты п. 2 справедливы не только для действительных, но и для комплексных функций от действительного аргумента.

При этом необходимо лишь записывать соответствующим образом выражение для скалярного произведения в гильбертовом пространстве.

Размерная частота колебаний по физическому смыслу больше нуля, но безразмерная частота колебаний λ может быть и положительной, и отрицательной величиной в зависимости от знака скорости жидкости.

5. Спектральная задача в операторной форме с компактными операторами, эквивалентная спектральной задаче в дифференциальной форме

Элементами гильбертова пространства H будем считать комплексные функции действительного аргумента. Скалярное произведение для двух элементов: $u(\xi) = u_1 + iu_2$, $v(\xi) = v_1 + iv_2$, которое является действительным числом, вводится с учетом условия $h(\xi) > 0$ следующим образом:

$$(u,v) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 h(\xi)(u\overline{v} + v\overline{u})d\xi,$$

где $\overline{u}$, $\overline{v}$ — комплексно-сопряженные величины к величинам u, v. При этом можно записать

$$(u,v) = \int\limits_0^1 h(\xi)(u_1v_1 + u_2v_2)\,d\xi. \tag{45}$$

Скалярное произведение (u,u) в этом случае положительно и норму элемента u в H можно ввести в виде $\|u\|^2 = (u,u)$.

Множества H, E, P задаются следующим образом:

$$H = \{u \mid u \in L_2(0,1)\}, \qquad E = \left\{u \mid u \in L_2(0,1), \int\limits_0^1 u\,d\xi = 0\right\},$$

$$P = \left\{u \mid u \in C(0,1), \int\limits_0^1 u\,d\xi = 0\right\}, \quad P \subset E \subset H.$$

При этом соотношения $u \in L_2(0,1)$, $u \in C(0,1)$ означают, что они справедливы для действительной и мнимой части U. В H вводятся операторы A, B:

$$Ay = \frac{1}{h(\xi)}\left[-\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\xi_1} y(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1 + a(y)\right], \quad a(y) = \left(\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{h(\xi)}\right)^{-1}\int\limits_0^1 \frac{1}{h(\xi)}\left(\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\xi_1} y(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1\right)d\xi, \tag{46}$$

$$By = \frac{i}{h(\xi)}\left[\int\limits_0^{\xi} y(\xi_1)\,d\xi_1 - b(y)\right], \quad b(y) = \left(\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{h(\xi)}\right)^{-1}\int\limits_0^1 \frac{1}{h(\xi)}\left(\int\limits_0^{\xi} y(\xi_1)\,d\xi_1\right)d\xi. \tag{47}$$

Функционалы $a(y), b(y)$ записываются, исходя из условий:

$$\int_0^1 Ay\,d\xi = 0, \qquad \int_0^1 By\,d\xi = 0. \tag{48}$$

Рассматривается спектральное уравнение с компактными операторами A, B:

$$y = \lambda\varepsilon By + \lambda^2 Ay. \tag{49}$$

Относительно операторов A, B справедливы следующие утверждения.

Утверждение 3. Операторы A, B компактны в H и справедливы вложения:

$$R(A) \subset P, \qquad R(B) \subset P. \tag{50}$$

Доказательство компактности основано на критерии Ф. Рисса [6] и того, что операторы A, B состоят из интегралов с переменным верхним пределом, для которых этот критерий выполняется, а при умножении на функцию $\frac{1}{h(\xi)}$ операторы остаются компактными в силу утверждения [9], что произведение компактного оператора на ограниченный снова является компактным оператором и условия $h(\xi)>0$. Из условия компактности Ф. Рисса следует, что операторы A, B отображают $H \to C(0,1)$, а из соотношения (48) следует выполнение вложений (50).

Утверждение 4. Операторы A, B являются частично симметричными:

$$(u, Av) = (v, Au), \quad (u, Bv) = (v, Bu) \ \ \forall\, u, v \in E. \tag{51}$$

Доказательство основано на интегрировании по частям левой части равенств (51) и использовании условий (48).

Утверждение 5. Оператор A — положительный:

$$(u, Au) > 0 \quad \forall\, u \in E. \tag{52}$$

Доказательство основано на интегрировании по частям и использовании условия (48).

Утверждение 6. Ядерное пространство оператора A — нулевое:

$$\mathrm{Ker} A = 0. \tag{53}$$

Доказательство производится от противного. Предполагается, что существует $u_0 \in H$, $\|u_0\| \neq 0$ и при этом выполняется равенство $Au_0 = 0$. Это равенство умножается на функцию $h(\xi)$ и дважды дифференцируется по ξ. В результате получается $u_0 = 0$, что противоречит предположению.

Утверждение 7. Спектральное уравнение для квадратичного пучка операторов (49) эквивалентно спектральной задаче (43), (44).

Доказательство основано на интегрировании дважды по ξ соотношения (43) и нахождении постоянных интегрирования из условий (48).

Из утверждений 3–7 следует, что спектральную задачу (43), (44) в дифференциальной форме можно заменить на спектральную задачу в операторной форме (49) и для численного ее решения использовать результаты приведенных теорем 1, 2.

6. Аналитическое решение тестовой задачи

Для одного из нескольких подтверждений правильности составления программы численного решения задачи и проведения расчетов используется аналитическое решение тестовой задачи для частного случая задания функции $h(\xi)$ в виде $h(\xi) = \alpha = \text{const}$.

Соответствующее уравнение и краевые условия (43), (44) имеют вид:

$$\alpha U_{,\xi\xi} - i\lambda\varepsilon U_{,\xi} + \lambda^2 U = 0, \quad 0 < \xi < 1, \tag{54}$$

$$U\,|_{\xi=0} = 0, \qquad U\,|_{\xi=1} = 0. \tag{55}$$

Аналитическое решение этой задачи ищется в виде

$$U = \sin k\pi\xi \; e^{i\gamma\xi}, \quad k = 1, 2, 3, \dots . \tag{56}$$

Подставляя производные (56) в (54) и приравнивая коэффициенты при выражениях $\sin k\pi\xi e^{i\gamma\xi}$ и $\cos k\pi\xi e^{i\gamma\xi}$ к нулю, получим два алгебраических уравнения относительно неизвестных λ, γ:

$$\lambda = 2\frac{\alpha\gamma}{\varepsilon}, \tag{57}$$

$$\lambda\varepsilon\gamma + \lambda^2 - \alpha(\gamma^2 + k^2\pi^2) = 0. \tag{58}$$

Из (57), (58) находятся выражения для γ, λ:

$$\gamma = \pm\frac{k\pi\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\alpha}}, \tag{59}$$

$$\lambda = \pm\frac{2k\pi\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\alpha}}. \tag{60}$$

Так как в итерационной схеме (1), (2), на основании дополнительного исследования по результатам теоремы 2, получаются минимальные корни $|\lambda^+|$, $|\lambda^-|$, то для сравнения с аналитическим решением (60) в нем надо положить $k = 1$, т. е. получится

$$|\lambda_1| = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\alpha}}. \tag{61}$$

7. Численные расчеты

Для нахождения границ задания параметра ε, при которых сходится итерационный процесс (2), (3), необходимо проведение вспомогательных расчетов по нахождению нормы оператора B, которая зависит от функции $h(\xi)$. Эта функция конкретизировалась в виде $h(\xi) = \alpha + \beta\xi$, где α, β — произвольные варьируемые параметры. Норма $\|B\|$ находилась численно при использовании итерационной схемы [1]:

$$\tau_{k+1} y_{k+1} = BBy_k, \quad k = 1, 2, 3 \dots, \quad y_1 = Ay_0, \quad y_0 \in H, \tag{62}$$

$$\tau_{k+1} = \frac{(By_k, By_k)}{\|y_k\|^2}, \quad \tau_{k+1} > \tau_k, \tag{63}$$

$$\|B\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\tau_k}, \tag{64}$$

где y_0 — произвольный элемент, в качестве которого бралась функция $y_0(\xi) = 1$.

По значению $\|B\|$ находилась величина p из формулы (15). Величины $\|B\|$, p зависят от функции $h(\xi)$ и, следовательно, параметров α, β. Эта зависимость представлена в табл. 1, 2.

Таблица 1. Норма $\|B\|$

α \ β	0.00	0.01	0.02	0.03
0.10	1.59	1.57	1.53	1.50
0.15	1.06	1.05	1.04	1.02
0.20	0.80	0.79	0.78	0.78
0.25	0.64	0.63	0.63	0.62

Таблица 2. Значения параметра p

α \ β	0.00	0.01	0.02	0.03
0.10	1.31	1.15	1.08	1.05
0.15	2.95	2.67	2.51	2.42
0.20	5.25	4.84	4.59	4.42
0.25	8.20	7.67	7.31	7.05

За величину p можно взять наименьшую величину из табл. 2, $p = 1.05$, тогда диапазон изменений ε будет $0 \leqslant \varepsilon < 1.05$.

При компьютерной реализации итерационного алгоритма (2), (3) возникают некоторые погрешности, связанные с численным нахождением корней уравнения (3), с заменой бесконечного итерационного процесса конечным, с представлением чисел в компьютере с конечной разрядностью, с погрешностями вычисления интегралов при вычислении операторов. Это приводит к тому, что приближенное уравнение на конечном итерационном шаге

$$y_k = \sigma_k \varepsilon B y_k + \sigma_k^2 A y_k \tag{65}$$

точно не выполняется, начиная с некоторого номера k начинает не выполняться и неравенство

$$|\sigma_{k+1}| < |\sigma_k|, \tag{66}$$

которое является одним из результатов теоремы 1.

Невыполнение неравенства (66) можно рассматривать как потерю устойчивости итерационного процесса и можно обрывать итерационный процесс, принимая за решение результаты, полученные на k-м итерационном шаге. Потеря устойчивости итерационного процесса при численной реализации с практической точки зрения не представляет проблемы, если до потери устойчивости достигнута приемлемая точность решения, при этом итерационный алгоритм можно считать работоспособным, в противном случае — неработоспособным.

Точность решения можно оценить погрешностями решения δ_1 и δ_2, задаваемые в виде:

$$\delta_1 = \frac{\|y_k - \sigma_k \varepsilon B y_k - \sigma_k^2 A y_k\|}{\|y_k\| + |\sigma_k|\varepsilon\|B y_k\| + \sigma_k^2\|A y_k\|}, \qquad \delta_2 = 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}. \tag{67}$$

Величина δ_1 характеризует ошибку в выполнении уравнения (65), а величина δ_2 характеризует близость итерационного процесса к предельному соотношению.

Итерационный процесс (2), (3) для данной задачи характеризуется следующими параметрами и результатами. Интегралы в операторах A, B на промежутке $0 < \xi < 1$ считались методом трапеций с равномерным разбиением интервала на 2000 узлов. Итерационный процесс заканчивался при наступлении его неустойчивости, т. е. при выполнении неравенства $|\sigma_{k+1}| > |\sigma_k|$. Для всех расчетных вариантов, приводимых далее, это требовало 15–40 итераций. Расчеты проводились при задании величины ε: 0.1; 0.25; 0.5. Параметры α, β, характеризующие функцию $h(\xi)$, задавались следующим образом:

$$\alpha = 0.1,\ 0.15,\ 0.2,\ 0.25, \qquad \beta = 0,\ 0.01,\ 0.02,\ 0.03.$$

Погрешность решения оценивалась не только величинами δ_1, δ_2, но и сравнением с аналитическим решением (61), полученным при $\beta = 0$. Эти результаты представлены в табл. 3–5.

Таблица 3. Погрешность решения $\delta_1 \cdot 10^8$ в зависимости от параметров

ε	α \ β	0	0.01	0.02	0.03
0.1	0.10	1.17	0.40	0.75	1.07
	0.15	0.92	0.23	0.43	0.63
	0.20	0.82	0.15	0.29	0.42
	0.25	0.76	0.11	0.21	0.31
0.25	0.10	1.23	0.87	1.64	2.33
	0.15	1.79	0.51	0.97	1.40
	0.20	1.12	0.34	0.66	0.96
	0.25	0.81	0.25	0.49	0.71
0.5	0.10	0.79	1.33	2.52	3.61
	0.15	1.59	0.82	1.57	2.27
	0.20	0.75	0.57	1.10	1.60
	0.25	1.21	0.43	0.83	1.22

Таблица 4. Погрешность решения $\delta_2 \cdot 10^{15}$ в зависимости от параметров

ε	α \ β	0.0	0.01	0.02	0.03
0.1	0.10	1.812	0.337	0.874	0.728
	0.15	0.137	0.144	0.185	0.152
	0.20	0.599	0.371	0.059	0.396
	0.25	0.591	0.271	0.143	0.080
0.25	0.10	3.626	0.004	0.213	0.008
	0.15	4.908	0.187	0.535	0.523
	0.20	4.646	0.140	0.045	0.080
	0.25	3.705	0.210	0.162	0.095
0.5	0.10	2.854	0.407	0.025	0.338
	0.15	0.161	0.461	0.137	0.146
	0.20	2.232	0.191	0.099	0.573
	0.25	2.910	0.279	0.020	0.034

Таблица 5. Сравнительная таблица спектральных чисел λ_1, полученных по итерационному алгоритму (2), (3) и чисел λ_1^*, полученных по аналитической зависимости (61) при $\beta = 0$

спектральные числа	ε \ β	0.1	0.15	0.2	0.25
λ_1^*	0.1	0.981268686	1.206719164	1.396263402	1.563000763
	0.25	0.923897942	1.157919016	1.353101303	1.523896276
	0.5	0.779333222	1.022260699	1.2263522	1.404962946
λ_1	0.1	0.981268903	1.206719424	1.396263699	1.563001094
	0.25	0.923898209	1.157919321	1.353101641	1.523896644
	0.5	0.779333567	1.022261095	1.226352632	1.404963408

Результаты расчетов положительного спектрального параметра λ^+ представлены в табл. 6, результаты расчетов отрицательного спектрального парметра λ^- в статье не представлены, так как они с точностью до погрешности совпадают по модулю с результатом табл. 6, $\lambda^+ = |\lambda^-|$. Рассчитывались и собственные функции φ^+, φ^-, которые с точностью до погрешности оказались линейно зависимыми. Этот результат не противоречит теореме 1 согласно замечанию к ней.

Из анализа таблиц 3–6 следует, что результаты вычисления спектральных чисел λ^+ имеют достоверными, по крайней мере 6 значащих цифр, полученных до потери устойчивости. Эта точность для большинства прикладных задач является избыточной.

Таблица 6. Зависимость спектральных чисел λ_1^+, полученных по итерационному алгоритму (2), (3) от параметров ε, α, β

ε	α \ β	0.0	0.01	0.02	0.03
0.1	0.10	0.9812689026	1.0057622683	1.0290978400	1.0514219768
	0.15	1.2067194245	1.2268116589	1.2462489297	1.2650898777
	0.20	1.3962636993	1.4137045580	1.4307115290	1.4473146892
	0.25	1.5630010943	1.5786223822	1.5939294582	1.6089400924
0.25	0.10	0.9238982092	0.9494286931	0.9737099949	0.9969029331
	0.15	1.1579193212	1.1786661881	1.1987159283	1.2181320738
	0.20	1.3531016414	1.3710007511	1.3884427770	1.4054599175
	0.25	1.5238966443	1.5398610055	1.5554968619	1.5708230619
0.5	0.10	0.7793335671	0.8056181896	0.8306438193	0.8545694827
	0.15	1.0222610946	1.0439181482	1.0648417955	1.0850986720
	0.20	1.2263526322	1.2450752627	1.2633098758	1.2810910453
	0.25	1.4049634084	1.4216394933	1.4379632955	1.4539552427

Заключительное замечание

На все проблемы, перечисленные в п. 1 для апробации итерационного алгоритма, получены положительные ответы. Проводимые расчеты показали работоспособность итерационного алгоритма и полную предсказуемость сходимости итерационного алгоритма в достаточно широком диапазоне параметра $\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}$.

Целью данной статьи, как и работ [1–5], является конструирование новых итерационных алгоритмов для исследования и решения интегральных спектральных уравнений, не прибегая к матричным аппроксимирующим уравнениям, причем подразумевается, что эти интегральные спектральные уравнения эквивалентны исходным дифференциальным уравнениям. Основная причина этого заключается в том, что интегральные спектральные уравнения рассматриваются в бесконечномерном пространстве, а матричные спектральные уравнения в конечномерном пространстве. При численном решении спектральных интегральных уравнений необходимо переходить в конечномерное пространство для выполнения операции численного интегрирования. Однако в этом случае явное использование матричных уравнений не обязательно и при составлении программы численных расчетов они не использовались, хотя такое использование допустимо, при этом получались бы полностью заполненные матрицы. Необязательность использования матричных уравнений в явном виде отмечена и в работе [10, с. 278].

Данная статья так же, как и работы [1–5], является развитием идей, заложенных в статье О. Келлога, опубликованной на немецком языке в 1922 г. и воспроизводимая на русском языке в неоднократно переиздаваемых книгах [6, 7]. В последующие годы было опубликовано большое число работ по спектральным уравнениям, например [10–15], однако все эти работы посвящены только матричным уравнениям. В них рассматриваются и различные алгоритмы решения, но эти алгоритмы даже формально не совпадают с итерационными алгоритмами работ [1–5] и данной статьи. Это отличие заключается в том, что при реализации многочисленных алгоритмов матричной алгебры производится изменение структуры первоначально заполненной матрицы, а в итерационных алгоритмах теоремы 1 (если бы использовалось матричное представление) структура матрицы в каждом итерационном цикле на итерациях не меняется. И на каждой итерации, в каждом итерационном цикле матрица уравнений является полностью заполненной без появления систематических нулей.

Итерационные алгоритмы данной статьи можно использовать и при решении матричных спектральных уравнений для квадратичных пучков матриц A, B, если эти матрицы симметричны и не вырожденные, а матрица A является положительной, причем условие компактности матриц выполняется всегда для матриц конечного порядка. Других ограничений, связанных со структурой матриц A и B, нет.

Литература

1. **Тараканов В.И.** Уравнения с компактными операторами в гильбертовом пространстве и итерационные алгоритмы их решения. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
2. **Тараканов В.И., Нестеренко М.В.** Итерационный алгоритм исследования и численного решения спектральных задач для линейного пучка компактных частично симметричных операторов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 3. — С. 343–359.
3. **Тараканов В.И., Лысенкова С.А.** Итерационные алгоритмы определения устойчивости колебаний при наличии демпфирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15. № 1. — С. 103–119.
4. **Tarakanov V.I., Nesterenko M.V.** Iterative algorithm of investigation and numerical solving spectral problems for a linear bunch of compact, partially symmetrical operators // Numerical Analysis and Application. — Pleiades Publishing Inc., 2010. — Vol. 3, № 3. — P. 279–293. — (DOI: 10.1134/S1995423910030079.)
5. **Tarakanov V.I., Lysenkova S.A.** Iterative Algorithm of Determining the Stability of an Equation of Oscillations with Damping // Numerical Analysis and Application. — Pleiades Publishing Inc., 2012. — Vol. 5, № 1. — P. 84–98. — (DOI: 10.1134/S1995423912010089.)
6. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
7. **Васильева А.Б., Тихонов Н.А.** Интегральные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
8. **Феодосьев В.И.** О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сборник. — 1951. — Т. 10. — С. 169–178.
9. **Садовничий В.А.** Теория операторов. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
10. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений. — М.: Мир, 1983.
11. **Bai Z., Su Y.** SOAR: A second-order Arnoldi method for the solution of the quadratic eigenvalue problem // Siam J. Matrix. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 26, № 3. — P. 640–659.
12. **Arnoldi W.E.** The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem // Quart. Appl. Math. — 1951. — Vol. 9. — P. 17—29.
13. **Крылов А.Н.** О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. — 1931. — № 4. — С. 491–539.
14. **Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. — М.-Л.: Физматгиз, 1969.
15. **Lanczos C.** An Iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Natl. Bur. Standards. — 1950. — Vol. 45, № 4. — P. 255–282.

Поступила в редакцию 7 ноября 2013 г.,
в окончательном варианте 15 апреля 2014 г.