УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

В. А. Вестяк, Д. В. Тарлаковский*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

* Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия

E-mails: v.a.vestyak@mail.ru, tdvhome@mail.ru

Рассматривается однородное изотропное упругое тело, ограниченное концентрическими сферами, на которое действуют осесимметричные нестационарные объемные силы. С использованием разложений в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, преобразования Лапласа по времени и интегральных представлений с ядрами в виде функций Грина определены поля перемещений. Для функций Грина построены явные формулы, допускающие точное определение оригиналов. Приведены примеры расчетов.

Ключевые слова: упругая толстостенная сфера, нестационарные осесимметричные объемные силы, ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, преобразование Лапласа, функции Грина.

DOI: 10.15372/PMTF20150608

Введение. Нестационарное движение однородных изотропных тел со сферическими границами в случае наличия поверхностных возмущений изучено достаточно хорошо (см., например, работу [1] и библиографию к ней), в то время как исследования воздействия на такие тела объемных сил практически не проводились.

Подобные задачи встречаются в авиа- и ракетостроении, судостроении, при учете различных внешних полей (например, электромагнитных или тепловых), воздействие которых на элементы конструкций сводится к воздействию объемных сил.

В настоящей работе приводится аналитическое решение данной задачи.

1. Постановка задачи. В сферической системе координат (r, θ, ϑ) ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$) рассматривается упругая однородная изотропная толстостенная сфера с внутренним r_0 и внешним r_1 радиусами, находящаяся под действием осесимметричных объемных сил с радиальной $F_r(r, \theta, \tau)$ и тангенциальной $F_\theta(r, \theta, \tau)$ компонентами. Введем следующие безразмерные величины:

$$r' = \frac{r}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u' = \frac{u}{L}, \quad v' = \frac{v}{L}, \quad F'_k = \frac{F_k L}{\rho c_1^2} \ (k = r, \theta), \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-08-00788) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2029.2014.8).

(t — время; L — характерный размер; c_1, c_2 — скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; ρ — плотность среды; u, v — радиальное и тангенциальное перемещения).

Движение сферы описывается уравнениями линейной теории упругости в перемещениях [2]

$$\begin{gathered} \ddot{u} = (1-\eta^{-2})I_{1,r} + \eta^{-2}\{\Delta u - 2r^{-2}[l_\theta(v) + u]\} + F_r, \\ \ddot{v} = r^{-1}(1-\eta^{-2})I_{1,\theta} + \eta^{-2}[\Delta v + r^{-2}(2u_{,\theta} - v\sin^{-2}\theta)] + F_\theta, \\ I_1 = l_r(u) + r^{-1}l_\theta(v), \qquad \Delta(u) = l_r(u_{,r}) + l_\theta(u_{,\theta}), \\ l_\theta(v) = (v\sin\theta)_{,\theta}\sin^{-1}\theta, \qquad l_r(u) = r^{-2}(r^2u)_{,r}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь и далее точки обозначают производные по τ, аргумент после запятой в нижнем индексе — соответствующую частную производную.

В начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии:

$$u\big|_{\tau=0} = \dot{u}\big|_{\tau=0} = v\big|_{\tau=0} = \dot{v}\big|_{\tau=0} = 0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что на границах сферы возмущения отсутствуют. Далее ограничимся кинематическими краевыми условиями (в других случаях решение строится аналогично):

$$u\big|_{r=r_0,r_1} = v\big|_{r=r_0,r_1} = 0. \tag{1.3}$$

2. Интегральное представление решения. Для того чтобы построить решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), функции u и F_r разложим в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$, а функции v и F_θ — в ряды по полиномам Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)$ [3]. Тогда в пространстве преобразования Лапласа по времени τ (верхний индекс L соответствует изображению; s — соответствующий параметр преобразования) из (1.1)–(1.3) получаем следующие краевые задачи для коэффициентов рядов (им соответствует нижний индекс n) [2]:

$$\begin{gathered} s^2u_n^L = l_{11n}(u_n^L) + l_{12n}(v_n^L) + F_{rn}^L, \qquad u_n^L\big|_{r=r_0,r_1} = 0, \quad n \geqslant 0, \\ s^2v_n^L = l_{21n}(u_n^L) + l_{22n}(v_n^L) + \eta^2F_{\theta n}^L, \qquad v_n^L\big|_{r=r_0,r_1} = 0, \quad n \geqslant 1, \\ l_{11n}(u) = l_r(u_{,r}) - (m\eta^{-2} + 2)r^{-2}u, \qquad m = n(n+1), \\ l_{21n}(u) = -r^{-2}[(1-\eta^{-2})(ru)_{,r} + (1+\eta^{-2})u], \\ l_{12n}(v) = -m[l_{21n}(v) + r^{-2}(3+\eta^{-2})v], \qquad l_{22n}(v) = \eta^{-2}l_r(v_{,r}) - mr^{-2}v. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Решение задачи (2.1) представим в интегральном виде

$$u_0^L(r,s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}^L(r,\xi,s)F_{r0}^L(\xi,s)\,d\xi; \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} u_n^L(r,s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uun}^L(r,\xi,s)F_{rn}^L(\xi,s)\,d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{uvn}^L(r,\xi,s)F_{r\theta}^L(\xi,s)\,d\xi, \\ v_n^L(r,s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{vun}^L(r,\xi,s)F_{rn}^L(\xi,s)\,d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{vvn}^L(r,\xi,s)F_{r\theta}^L(\xi,s)\,d\xi, \quad n \geqslant 1. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь G_{uun}^L, G_{vun}^L и G_{vun}^L, G_{vvn}^L — объемные функции влияния (функции Грина) краевых задач (2.1):

$$s^2 G_{uu0}^L = l_{110}(G_{uu0}^L) + \delta(r-\xi), \qquad G_{uu0}^L\big|_{r=r_0,r_1} = 0; \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} s^2 G_{uun}^L = l_{11n}(G_{uun}^L) + l_{12n}(G_{vun}^L) + \delta(r-\xi), \qquad n \geqslant 1, \\ s^2 G_{vun}^L = l_{21n}(G_{uun}^L) + l_{22n}(G_{vun}^L), \qquad G_{uun}^L\big|_{r=r_0,r_1} = G_{vun}^L\big|_{r=r_0,r_1} = 0; \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} s^2 G_{uvn}^L = l_{11n}(G_{uvn}^L) + l_{12n}(G_{vvn}^L), \qquad G_{uvn}^L\big|_{r=r_0,r_1} = G_{vvn}^L\big|_{r=r_0,r_1} = 0, \\ s^2 G_{vvn}^L = l_{21n}(G_{uvn}^L) + l_{22n}(G_{vvn}^L) + \delta(r-\xi), \qquad n \geqslant 1, \end{gathered} \tag{2.6}$$

$\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

В пространстве оригиналов формулы (2.2), (2.3) преобразуются следующим образом:

$$u_0(r,\tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}(r,\xi,\tau) * F_{r0}(\xi,s)\, d\xi;$$

$$\begin{gathered} u_n(r,\tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uun}(r,\xi,\tau) * F_{rn}(\xi,s)\, d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{uvn}(r,\xi,\tau) * F_{\theta n}(\xi,s)\, d\xi, \\ v_n(r,\tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{vun}(r,\xi,\tau) * F_{rn}(\xi,s)\, d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{vvn}(r,\xi,\tau) * F_{\theta n}(\xi,s)\, d\xi, \quad n \geqslant 1 \end{gathered} \tag{2.7}$$

(знак “$*$” обозначает свертку по времени τ).

3. Построение функций влияния. Сначала определим структуру функций влияния. Для этого с использованием свойств полиномов Лежандра и Гегенбауэра [3] найдем выражение скалярного произведения определенных и интегрируемых с квадратом на множестве $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ векторов $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(r,\theta)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(r,\theta)$ с ненулевыми радиальными u_r, v_r и тангенциальными u_θ, v_θ координатами через коэффициенты их разложений в ряды:

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \int_{r_0}^{r_1} r^2 (u_{rn} v_{rn} + m u_{\theta n} v_{\theta n})\, dr. \tag{3.1}$$

Утверждение. *Решения задач* (2.4)–(2.6) *обладают следующей симметрией:*

$$\begin{gathered} \xi^2 G_{uun}^L(\xi,\zeta,s) = \zeta^2 G_{uun}^L(\zeta,\xi,s), \qquad \xi^2 G_{vvn}^L(\xi,\zeta,s) = \zeta^2 G_{vvn}^L(\zeta,\xi,s), \\ \xi^2 G_{uvn}^L(\xi,\zeta,s) = m\zeta^2 G_{vun}^L(\zeta,\xi,s). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Доказательство. Сначала положим $s \in \mathbb{R}$. Наряду с функциями $G_{uun}^L(r,\xi,s)$ и $G_{vun}^L(r,\xi,s)$ рассмотрим функции $G_{uun}^L(r,\zeta,s)$ и $G_{vun}^L(r,\zeta,s)$, являющиеся соответственно решениями краевых задач теории упругости с объемными силами

$$F_r = [\delta(r-\xi) - s^2 G_{uun}(r,\xi,s)] P_n(\cos\theta), \qquad F_\theta = -s^2 G_{vun}(r,\xi,s) \sin\theta C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta),$$

$$F_{r1} = [\delta(r-\zeta) - s^2 G_{uun}(r,\zeta,s)] P_n(\cos\theta), \qquad F_{\theta 1} = -s^2 G_{vun}(r,\xi,s) \sin\theta C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta).$$

Для состояний, описываемых функциями $G^L_{uun}(r,\zeta,s)$, $G^L_{vun}(r,\zeta,s)$, с учетом (3.1) применяем теорему взаимности для линейно-упругих тел:

$$\int\limits_{r_0}^{r_1} r^2\{[\delta(r-\xi)-s^2G_{uun}(r,\xi,s)]G_{uun}(r,\zeta,s)-ms^2G_{vun}(r,\xi,s)G_{vun}(r,\zeta,s)\}\,dr =$$

$$=\int\limits_{r_0}^{r_1} r^2\{[\delta(r-\zeta)-s^2G_{uun}(r,\zeta,s)]G_{uun}(r,\xi,s)-ms^2G_{vun}(r,\zeta,s)G_{vun}(r,\xi,s)\}\,dr.$$

Отсюда с использованием свойств дельта-функции получаем первое равенство в (3.2).

Доказательство соответствующего равенства для элемента $G_{vvn}(r,\xi,s)$ проводится аналогично с помощью следующих систем объемных сил:

$$F_r=-s^2G_{uvn}(r,\xi,s),\qquad F_\theta=[\delta(r-\xi)-s^2G_{vvn}(r,\xi,s)]\sin\theta C^{3/2}_{n-1}(\cos\theta),$$

$$F_{r1}=-s^2G_{uvn}(r,\zeta,s)P_n(\cos\theta),\qquad F_{\theta1}=[\delta(r-\zeta)-s^2G_{vvn}(r,\zeta,s)]\sin\theta C^{3/2}_{n-1}(\cos\theta).$$

Для доказательства третьего равенства в (3.2) рассмотрим системы сил

$$F_r=[\delta(r-\xi)-s^2G_{uun}(r,\xi,s)]P_n(\cos\theta),\qquad F_\theta=-s^2G_{vun}(r,\xi,s)\sin\theta C^{3/2}_{n-1}(\cos\theta),$$

$$F_{r1}=-s^2G_{uvn}(r,\zeta,s)P_n(\cos\theta),\qquad F_{\theta1}=[\delta(r-\zeta)-s^2G_{vvn}(r,\zeta,s)]\sin\theta C^{3/2}_{n-1}(\cos\theta).$$

Для двух соответствующих этим силам функций вновь применяем теорему взаимности

$$\int\limits_{r_0}^{r_1} r^2\{[\delta(r-\xi)-s^2G_{uun}(r,\xi,s)]G_{uvn}(r,\zeta,s)-ms^2G_{vun}(r,\xi,s)G_{vvn}(r,\zeta,s)\}\,dr =$$

$$=\int\limits_{r_0}^{r_1} r^2\{-s^2G_{uvn}(r,\zeta,s)G_{uun}(r,\xi,s)+m[\delta(r-\zeta)-s^2G_{vvn}(r,\zeta,s)]G_{vun}(r,\xi,s)\}\,dr,$$

из которой следует требуемое соотношение.

Если $s\in\mathbb{C}$, то достаточно рассмотреть аналитические продолжения функций влияния по параметру s на всю комплексную плоскость.

Следствие. *Указанные выше решения можно представить следующим образом:*

$$\begin{aligned}G^L_{uun}(r,\xi,s)&=\xi^2[G^L_{11n}(r,\xi,s)H(\xi-r)+G^L_{11n}(\xi,r,s)H(r-\xi)],\\ G^L_{vun}(r,\xi,s)&=\xi^2[G^L_{21n}(r,\xi,s)H(\xi-r)+G^L_{12n}(\xi,r,s)H(r-\xi)];\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}G^L_{uvn}(r,\xi,s)&=\xi^2m[G^L_{12n}(r,\xi,s)H(\xi-r)+G^L_{21n}(\xi,r,s)H(r-\xi)],\\ G^L_{vvn}(r,\xi,s)&=\xi^2[G^L_{22n}(r,\xi,s)H(\xi-r)+G^L_{22n}(\xi,r,s)H(r-\xi)]\end{aligned}\tag{3.4}$$

($H(\xi)$ — *функция Хевисайда*).

Доказательство. Функцию G^L_{uun} можно представить в виде

$$G^L_{uun}(r,\xi,s)=\xi^2[G^L_{uun1}(r,\xi,s)H(\xi-r)+G^L_{uun2}(r,\xi,s)H(r-\xi)].$$

С учетом (3.2) получаем соотношение

$$G^L_{uun1}(r,\xi,s)H(\xi-r)+G^L_{uun2}(r,\xi,s)H(r-\xi) = G^L_{uun2}(\xi,r,s)H(\xi-r)+G^L_{uun1}(\xi,r,s)H(r-\xi),$$

из которого следует равенство $G^L_{uun2}(r,\xi,s) = G^L_{uun1}(\xi,r,s)$, соответствующее первому равенству в (3.3). Доказательство второго равенства в (3.4) проводится аналогично с помощью второго соотношения в (3.2).

Для доказательства второго равенства в (3.3) и первого в (3.4) представим входящие в них функции в виде

$$G^L_{vun}(r,\xi,s) = \xi^2[G^L_{vun1}(r,\xi,s)H(\xi-r) + G^L_{vun2}(r,\xi,s)H(r-\xi)],$$
$$G^L_{uvn}(r,\xi,s) = \xi^2 m[G^L_{uvn1}(r,\xi,s)H(\xi-r) + G^L_{uvn2}(r,\xi,s)H(r-\xi)].$$

С учетом последнего равенства в (3.2) получаем соотношение

$$\xi^2 r^2 m[G^L_{uvn1}(\xi,r,s)H(r-\xi) + G^L_{uvn2}(\xi,r,s)H(\xi-r)] = \\ = mr^2\xi^2[G^L_{vun1}(r,\xi,s)H(\xi-r) + G^L_{vun2}(r,\xi,s)H(r-\xi)],$$

из которого следуют равенства

$$G^L_{vun2}(r,\xi,s) = G^L_{uvn1}(\xi,r,s), \qquad G^L_{uvn2}(\xi,r,s) = G^L_{vun1}(r,\xi,s),$$

что и завершает доказательство.

Определим функции G^L_{uun} и G^L_{vun}. С этой целью уравнения в (2.5) сведем к системе первого порядка и запишем ее общее решение

$$\begin{gathered} G^L_{un}(r,\xi,s) = (G^L_{uun},\Gamma^L_{uun},G^L_{vun},\Gamma^L_{vun})^{\text{т}} = X_n(r,s)A_{un} + G^L_{un*}(r,\xi,s), \\ A_{un} = (A_{1un},A_{2un},B_{1un},B_{2un})^{\text{т}}, \qquad \Gamma^L_{uun} = G^L_{uun,r}, \qquad \Gamma^L_{vun} = G^L_{vun,r}, \\ G^L_{un*}(r,\xi,s) = (G^L_{uun*}(r,\xi,s),\Gamma^L_{uun*}(r,\xi,s),G^L_{vun*}(r,\xi,s),\Gamma^L_{vun*}(r,\xi,s))^{\text{т}}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь A_{un}, G^L_{un*} — столбцы постоянных интегрирования и частного решения; $X_n(r,s)$ — фундаментальная матрица:

$$X_n(r,s) = \begin{pmatrix} X_{1n}(rs) & X_{2n}(rs) & X_{3n}(\eta rs) & X_{4n}(\eta rs) \\ sX'_{1n}(rs) & sX'_{2n}(rs) & \eta sX'_{3n}(\eta rs) & \eta sX'_{4n}(\eta rs) \\ Y_{1n}(rs) & Y_{2n}(rs) & Y_{3n}(\eta rs) & Y_{4n}(\eta rs) \\ sY'_{1n}(rs) & sY'_{2n}(rs) & \eta sY'_{3n}(\eta rs) & \eta sY'_{4n}(\eta rs) \end{pmatrix};$$

$$\begin{gathered} X_{kn}(z) = Z'_{kn}(z), \qquad X_{k+2,n}(z) = mz^{-1}Z_{kn}(z), \qquad Y_{kn}(z) = -z^{-1}Z_{kn}(z), \\ Y_{k+2,n}(z) = -X_{kn}(z) - z^{-1}Z_{kn}(z), \\ Z_{1n}(z) = z^{-1/2}K_{n+1/2}(z), \qquad Z_{2n}(z) = z^{-1/2}I_{n+1/2}(z), \end{gathered} \tag{3.6}$$

$K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя [3].

Столбец частных решений находится методом вариации постоянных (функции Γ^L_{uun*} и Γ^L_{vun*} не приводятся, поскольку далее не используются):

$$\begin{gathered} G^L_{uun*}(r,\xi,s) = -\xi R_{uun*}(rs,\xi s), \qquad G^L_{vun*}(r,\xi,s) = -\xi R_{vun*}(rs,\xi s), \\ R_{uun*}(x,y) = yP_{un}(x,y) + m\eta x^{-1}P_{en}(\eta x,\eta y), \\ R_{vun*}(x,y) = x^{-1}yS_{un}(y,x) - \eta^2 S_{en}(\eta x,\eta y). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Здесь

$$P_{en}(x,y) = \begin{vmatrix} Z_{1n}(x) & Z_{2n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix}, \qquad P_{un}(x,y) = \begin{vmatrix} X_{1n}(x) & X_{2n}(x) \\ X_{1n}(y) & X_{2n}(y) \end{vmatrix},$$
$$S_{en}(x,y) = -\begin{vmatrix} Y_{3n}(x) & Y_{4n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix}, \qquad S_{un}(x,y) = \begin{vmatrix} X_{1n}(x) & X_{2n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

При построении формул (3.7) применялись полученные с использованием свойств функций Бесселя миноры M_{kl}^{ij} (верхние индексы соответствуют номерам строк, нижние — номерам столбцов) матрицы X_n и ее определитель:

$$M_{12}^{12} = r^{-3}s^{-3}, \qquad M_{12}^{34} = -M_{12}^{14} = r^{-4}s^{-3}, \qquad M_{12}^{23} = 2M_{12}^{14}, \qquad M_{12}^{24} = -r^{-3}s^{-1}d_n(rs),$$
$$M_{34}^{34} = -\eta^{-1}r^{-2}s^{-1}b_n(\eta rs), \qquad M_{34}^{24} = m\eta^{-1}r^{-3}s^{-1}d_n(\eta rs), \qquad M_{34}^{14} = m\eta^{-3}r^{-4}s^{-3},$$
$$M_{34}^{23} = 2M_{34}^{14}, \qquad M_{34}^{13}(r,s) = -m\eta^{-3}r^{-3}s^{-3}, \qquad M_{34}^{12} = mM_{34}^{14}, \qquad |X_n| = \eta^{-1}r^{-4}s^{-2},$$
$$b_n(z) = 1 + mz^{-2}, \qquad d_n(z) = b_n(z) - 2z^{-2}.$$

Столбец A_{un} является решением следующей из граничных условий в (2.5) системы линейных алгебраических уравнений

$$Z_n(s)A_{un}(\xi,s) = -(0,0,G_{uun*}^L(r_1,\xi,s), G_{vun*}^L(r_1,\xi,s))^{\text{т}}, \qquad Z_n(s) = \Big(\frac{X_{n13}(r_0,s)}{X_{n13}(r_1,s)}\Big),$$

где X_{n13} — матрица, составленная из первой и третьей строк матрицы X_n. Подставляя решение этой системы в (3.5), получаем функции G_{11n}^L и G_{21n}^L, входящие в формулы (3.3), (3.4):

$$\begin{aligned} G_{11n}^L(r,\xi,s) = -\xi^{-1}R_{zn}^{-1}(r_0s,r_1s)[R_{un1}(rs,r_0s,r_1s)R_{uun*}^L(r_1s,\xi s) + {}\\ + mR_{un2}(rs,r_0s,r_1s)R_{vun*}^L(r_1s,\xi s)],\\ G_{21n}^L(r,\xi,s) = -\xi^{-1}R_{zn}^{-1}(r_0s,r_1s)[R_{vn1}(rs,r_0s,r_1s)R_{uun*}^L(r_1s,\xi s) + {}\\ + R_{un1}(r_1s,r_0s,rs)R_{vun*}^L(r_1s,\xi s)], \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} R_{zn}(x,y) = -P_{un}(x,y)Q_{en}(\eta x,\eta y) + m\eta^{-1}[x^{-2}S_{un}(y,x)S_{en}(\eta y,\eta x) + {}\\ + y^{-2}S_{un}(x,y)S_{en}(\eta x,\eta y) - 2\eta^{-2}(xy)^{-3} - m\eta^{-1}(xy)^{-2}P_{en}(x,y)P_{en}(\eta x,\eta y)],\\ R_{un1}(x,y,z) = P_{un}(y,x)Q_{en}(\eta y,\eta z) - m\eta^{-1}[y^{-2}S_{un}(x,y)S_{en}(\eta z,\eta y) + {}\\ + \eta^{-2}y^{-3}z^{-1}S_{un}(x,z) + x^{-1}y^{-3}S_{en}(\eta z,\eta x) + (xz)^{-1}S_{un}(y,z)S_{en}(\eta y,\eta x) - {}\\ - m\eta^{-1}y^{-2}(xz)^{-1}P_{en}(y,z)P_{en}(\eta y,\eta x)],\\ R_{un2}(x,y,z) = \eta^{-1}\{z^{-1}P_{un}(y,x)S_{en}(\eta y,\eta z) - x^{-1}S_{en}(\eta y,\eta x)P_{un}(y,z) + {}\\ + \eta^{-2}y^{-3}P_{un}(z,x) + m\eta^{-1}y^{-2}[z^{-1}P_{en}(\eta y,\eta z)S_{un}(x,y) + {}\\ + x^{-1}P_{en}(\eta x,\eta y)S_{un}(z,y) + (xyz)^{-1}P_{en}(\eta x,\eta z)]\},\\ R_{vn1}(x,y,z) = z^{-1}S_{un}(y,z)Q_{en}(\eta y,\eta x) + y^{-3}Q_{en}(\eta z,\eta x) - {}\\ - x^{-1}Q_{en}(\eta y,\eta z)S_{un}(y,x) + m\eta^{-1}y^{-2}[z^{-1}P_{en}(y,z)S_{en}(\eta x,\eta y) - {}\\ - x^{-1}P_{en}(y,x)S_{en}(\eta z,\eta y) - \eta^{-2}(xyz)^{-1}P_{en}(z,x)]; \end{aligned}$$

$$Q_{en}(x,y) = Y_{3n}(x)Y_{4n}(y) - Y_{3n}(y)Y_{4n}(x). \tag{3.10}$$

Аналогично находятся функции G^L_{uvn} и G^L_{vvn} в (3.4) как решение краевой задачи (2.6). В результате определяются функции G^L_{12n} и G^L_{22n}:

$$\begin{aligned}
G^L_{12n}(r,\xi,s) &= -\xi^{-1}R^{-1}_{zn}(r_0 s, r_1 s)[R_{un1}(rs, r_0 s, r_1 s)R^L_{uvn*}(r_1 s, \xi s) + \\
&\qquad + R_{un2}(rs, r_0 s, r_1 s)R^L_{vvn*}(r_1 s, \xi s)],\\
G^L_{22n}(r,\xi,s) &= -\xi^{-1}R^{-1}_{zn}(r_0 s, r_1 s)[R_{vn1}(rs, r_0 s, r_1 s)R^L_{uvn*}(r_1 s, \xi s) + \\
&\qquad + R_{un1}(r_1 s, r_0 s, rs)R^L_{vvn*}(r_1 s, \xi s)],\\
R_{uvn*}(x,y) &= -x^{-1}yR_{vun*}(y,x), \qquad R_{vvn*}(x,y) = \eta^3 y Q_{en}(\eta x, \eta y) + mx^{-1}P_{en}(x,y).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Формула для функции G^L_{uu0} есть частный случай соответствующих равенств в (3.3) и (3.9) при $n = 0$.

4. Определение оригиналов функций влияния. Для того чтобы определить оригиналы функций влияния, используем выражения модифицированных функций Бесселя полуцелого индекса через элементарные функции [1–3]:

$$K_{n+1/2}(z) = \frac{1}{z^{n+1/2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, R_{n0}(z)\,\mathrm{e}^{-z}, \qquad I_{n+1/2}(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n+1/2}\sqrt{2\pi}}\,[R_{n0}(-z)\,\mathrm{e}^{z} - R_{n0}(z)\,\mathrm{e}^{-z}],$$

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{nk} z^{n-k}, \qquad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k (n-k)!k!}.$$

Подставляя эти равенства в (3.6), а затем последовательно в (3.8), (3.10), (3.7), (3.11), (3.9), получаем равенства

$$\begin{aligned}
2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}R_{uun*}(x,y) &= (-1)^n L_{uun*}(x,y),\\
2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}R_{vun*}(x,y) &= (-1)^n L_{vun*}(x,y),\\
2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}R_{uvn*}(x,y) &= (-1)^{n+1} L_{vun*}(y,x),\\
2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}R_{vvn*}(x,y) &= (-1)^n L_{vvn*}(x,y),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{uun*}(x,y) &= -P^{(1)}_{uun*}(x,y)\,\mathrm{e}^{x-y} - P^{(2)}_{uun*}(x,y)\,\mathrm{e}^{\eta(x-y)} + \\
&\qquad + P^{(1)}_{uun*}(-x,-y)\,\mathrm{e}^{y-x} + P^{(2)}_{uun*}(-x,-y)\,\mathrm{e}^{\eta(y-x)},\\
L_{vun*}(x,y) &= -P^{(1)}_{vun*}(x,y)\,\mathrm{e}^{x-y} - P^{(2)}_{vun*}(x,y)\,\mathrm{e}^{\eta(x-y)} + \\
&\qquad + P^{(1)}_{vun*}(-x,-y)\,\mathrm{e}^{y-x} + P^{(2)}_{vun*}(-x,-y)\,\mathrm{e}^{\eta(y-x)},\\
L_{vvn*}(x,y) &= -P^{(1)}_{vvn*}(x,y)\,\mathrm{e}^{x-y} - P^{(2)}_{vvn*}(x,y)\,\mathrm{e}^{\eta(x-y)} + \\
&\qquad + P^{(1)}_{vvn*}(-x,-y)\,\mathrm{e}^{y-x} + P^{(2)}_{vvn*}(-x,-y)\,\mathrm{e}^{\eta(y-x)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(1)}_{uun*}(x,y) &= \eta^{2n+1}R_{n1}(-x)R_{n1}(y), \qquad P^{(2)}_{uun*}(x,y) = mR_{n0}(-\eta x)R_{n0}(\eta y),\\
P^{(1)}_{vun*}(x,y) &= \eta^{2n+1}R_{n1}(y)R_{n0}(-x), \qquad P^{(2)}_{vun*}(x,y) = R_{n3}(-\eta x)R_{n0}(\eta y),\\
P^{(1)}_{vvn*}(x,y) &= m\eta^{2n+1}R_{n0}(-x)R_{n0}(y), \qquad P^{(2)}_{vvn*}(x,y) = R_{n3}(-\eta x)R_{n3}(\eta y);
\end{aligned}$$

$$4\eta^{2(n+2)}(xys^2)^{2(n+2)}R_{zn}(x,y) = L_{zn}(x,y); \tag{4.2}$$

$$
\begin{gathered}
L_{zn}(x,y) = -8m\eta^{2n+1}x^{2n+1}y^{2n+1} - D_n(-x,-x)D_n(y,y)\,\mathrm{e}^{\eta_+(x-y)} + \\
+ D_n(-x,x)D_n(y,-y)\,\mathrm{e}^{-\eta_-(x-y)} + D_n(x,-x)D_n(-y,y)\,\mathrm{e}^{\eta_-(x-y)} - \\
- D_n(x,x)D_n(-y,-y)\,\mathrm{e}^{-\eta_+(x-y)}, \\
D_n(x,y) = R_{n1}(x)R_{n3}(\eta y) - mR_{n0}(x)R_{n0}(\eta y), \qquad \eta_\pm = \eta \pm 1; \\
4(\eta^2 xy^2 z)^{n+2} R_{un1}(x,y,z) = L_{un1}(x,y,z), \\
4(\eta^2 xy^2 z)^{n+2} R_{un2}(x,y,z) = L_{un2}(x,y,z), \\
4(\eta^2 xy^2 z)^{n+2} R_{vn1}(x,y,z) = L_{vun1}(x,y,z); \\
L_{un1}(x,y,z) = E_{11n}(y,x)E_{33n}(\eta y,\eta z) - m\{E_{10n}(x,y)E_{30n}(\eta z,\eta y) + \\
+ E_{10n}(y,z)E_{30n}(\eta y,\eta x) - 2(-1)^n y^{2n+1}[\eta^{2n+1}E_{10n}(x,z) + \\
+ E_{30n}(\eta z,\eta x)] - n(n+1)E_{00n}(y,z)E_{00n}(\eta y,\eta x)\}, \\
L_{un2}(x,y,z) = E_{11n}(x,y)E_{30n}(\eta y,\eta z) + E_{30n}(\eta y,\eta x)E_{11n}(y,z) + \\
+ 2(-1)^n\eta^{2n+1}y^{2n+1}E_{11n}(z,x) + m[2(-1)^n y^{2n+1}E_{00n}(\eta x,\eta z) - \\
- E_{00n}(\eta y,\eta z)E_{10n}(x,y) - E_{00n}(\eta x,\eta y)E_{10n}(z,y)], \\
L_{vn1}(x,y,z) = E_{33n}(\eta y,\eta z)E_{10n}(y,x) - E_{10n}(y,z)E_{33n}(\eta y,\eta x) + \\
+ 2(-1)^n y^{2n+1}E_{33n}(\eta z,\eta x) + m[2(-1)^{n+1}\eta^{2n+1}y^{2n+1}E_{00n}(z,x) + \\
+ E_{00n}(y,x)E_{30n}(\eta z,\eta y) - E_{00n}(y,z)E_{30n}(\eta x,\eta y)].
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Введенные в (4.1)–(4.3) дополнительные функции определяются следующим образом:

$$
R_{n3}(z) = R_{n1}(z) - R_{n0}(z), \qquad R_{n1}(z) = R_{n+1,0}(z) - nR_{n0}(z),
$$

$$
E_{kln}(x,y) = R_{nk}(x)R_{nl}(-y)\,\mathrm{e}^{y-x} - R_{nk}(-x)R_{nl}(y)\,\mathrm{e}^{x-y}, \qquad k = 0,1,3, \quad l = 0,1,3.
$$

Подставляя в (3.9), (3.11) равенства (4.1)–(4.3), получаем представления функций влияния G^L_{11n}, G^L_{21n}, G^L_{12n}, G^L_{22n}:

$$
\begin{gathered}
G^L_{11n}(r,\xi,s) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}}\,\frac{F_{uun}(s)}{L_{zn}(r_0 s, r_1 s)}, \\
G^L_{21n}(r,\xi,s) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}}\,\frac{F_{vun}(s)}{L_{zn}(r_0 s, r_1 s)}, \\
G^L_{12n}(r,\xi,s) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}}\,\frac{F_{uvn}(s)}{L_{zn}(r_0 s, r_1 s)}, \\
G^L_{22n}(r,\xi,s) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}}\,\frac{F_{vvn}(s)}{L_{zn}(r_0 s, r_1 s)},
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
F_{uun}(s) = L_{uun*}(r_1 s,\xi s)L_{un1}(rs,r_0 s,r_1 s) + mL_{vun*}(r_1 s,\xi s)L_{un2}(rs,r_0 s,r_1 s), \\
F_{vun}(s) = L_{uun*}(r_1 s,\xi s)L_{vn1}(rs,r_0 s,r_1 s) + L_{vun*}(r_1 s,\xi s)L_{un1}(r_1 s,r_0 s,rs), \\
F_{uvn}(s) = -L_{vun*}(\xi s,r_1 s)L_{un1}(rs,r_0 s,r_1 s) + L_{vvn*}(r_1 s,\xi s)L_{un2}(rs,r_0 s,r_1 s), \\
F_{vvn}(s) = -mL_{vun*}(\xi s,r_1 s)L_{vn1}(rs,r_0 s,r_1 s) + L_{vvn*}(r_1 s,\xi s)L_{un1}(r_1 s,r_0 s,rs).
\end{gathered}
$$

Согласно (4.1), (4.3) функции $F_{uun}(s)$, $F_{vun}(s)$, $F_{uvn}(s)$, $F_{vvn}(s)$ в формулах (4.4) имеют структуры экспоненциальных многочленов:

$$F_{uun}(s) = \sum_{\alpha_1} P_{uun}^{(\alpha_1)}(rs, \xi s)\,\mathrm{e}^{\tau_{\alpha_1}(r,\xi)s}, \qquad F_{vun}(s) = \sum_{\alpha_2} P_{vun}^{(\alpha_2)}(rs, \xi s)\,\mathrm{e}^{\tau_{\alpha_2}(r,\xi)s},$$

$$F_{uvn}(s) = \sum_{\alpha_3} P_{uvn}^{(\alpha_3)}(rs, \xi s)\,\mathrm{e}^{\tau_{\alpha_3}(r,\xi)s}, \qquad F_{vvn}(s) = \sum_{\alpha_4} P_{vvn}^{(\alpha_4)}(rs, \xi s)\,\mathrm{e}^{\tau_{\alpha_4}(r,\xi)s},$$

конкретный вид которых определяется методами компьютерной алгебры в процессе вычисления оригиналов функций G_{11n}^L, G_{21n}^L, G_{12n}^L, G_{22n}^L.

Используя (4.2), представим экспоненциальный многочлен $L_{zn}(r_0 s, r_1 s)$ в виде

$$L_{zn}(r_0 s, r_1 s) = -D_n(r_0 s, r_0 s) D_n(-r_1 s, -r_1 s)\Big[1 + \sum_{k=1}^{4} B_k(r_0 s, r_1 s)\,\mathrm{e}^{-\tau_{zk} s}\Big]\,\mathrm{e}^{\eta_+ hs},$$

где

$$\tau_{z1} = 2h, \qquad \tau_{z2} = \eta_+ h, \qquad \tau_{z3} = 2\eta h, \qquad \tau_{z4} = 2\eta_+ h,$$

$$B_{1n}(x,y) = -\frac{D_n(-x,x)D_n(y,-y)}{D_n(x,x)D_n(-y,-y)}, \qquad B_{2n}(x,y) = \frac{8m\eta^{2n+1}x^{2n+1}y^{2n+1}}{D_n(x,x)D_n(-y,-y)},$$

$$B_{3n}(x,y) = -\frac{D_n(x,-x)D_n(-y,y)}{D_n(x,x)D_n(-y,-y)}, \qquad B_{4n}(x,y) = \frac{D_n(-x,-x)D_n(y,y)}{D_n(x,x)D_n(-y,-y)}.$$

Учитывая, что в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > \alpha_*$ имеет место неравенство $\Big|\sum_{k=1}^{4} B_{kn}(r_0 s, r_1 s)\,\mathrm{e}^{-\tau_{zk} s}\Big| < 1$, получаем ряд [3]

$$L_{zn}^{-1}(r_0 s, r_1 s) = -D_n^{-1}(r_0 s, r_0 s) D_n^{-1}(-r_1 s, -r_1 s)\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \sum_{|\beta|=l}(l;\beta)\,\mathrm{e}^{-\sigma_\beta s}\prod_{k=1}^{4} B_{kn}^{l_k}(r_0 s, r_1 s),$$

$$\beta = (l_1, l_2, l_3, l_4), \quad |\beta| = \sum_{k=1}^{4} l_k, \quad (l;\beta) = \frac{l!}{l_1! l_2! l_3! l_4!}, \quad \sigma_\beta = \tau_{z2} + \sum_{k=1}^{4}\tau_{zk} l_k,$$

где β — мультииндекс; $|\beta|$ — его модуль; $(l;\beta)$ — мультиномиальный коэффициент.

Окончательно изображения G_{11n}^L, G_{21n}^L, G_{12n}^L, G_{22n}^L принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
2\eta^{2n+1}(r\xi)^{n+2} G_{11n}^L(r,\xi,s) &= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \sum_{\alpha_1}\sum_{|\beta|=l} Q_{11n}^{(\alpha_1 \beta l)}(s)\,\mathrm{e}^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_1}(r,\xi)]s},\\
2\eta^{2n+1}(r\xi)^{n+2} G_{21n}^L(r,\xi,s) &= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \sum_{\alpha_2}\sum_{|\beta|=l} Q_{21n}^{(\alpha_2 \beta l)}(s)\,\mathrm{e}^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_2}(r,\xi)]s},\\
2\eta^{2n+1}(r\xi)^{n+2} G_{12n}^L(r,\xi,s) &= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \sum_{\alpha_3}\sum_{|\beta|=l} Q_{12n}^{(\alpha_3 \beta l)}(s)\,\mathrm{e}^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_3}(r,\xi)]s},\\
2\eta^{2n+1}(r\xi)^{n+2} G_{22n}^L(r,\xi,s) &= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \sum_{\alpha_4}\sum_{|\beta|=l} Q_{22n}^{(\alpha_4 \beta l)}(s)\,\mathrm{e}^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_4}(r,\xi)]s},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

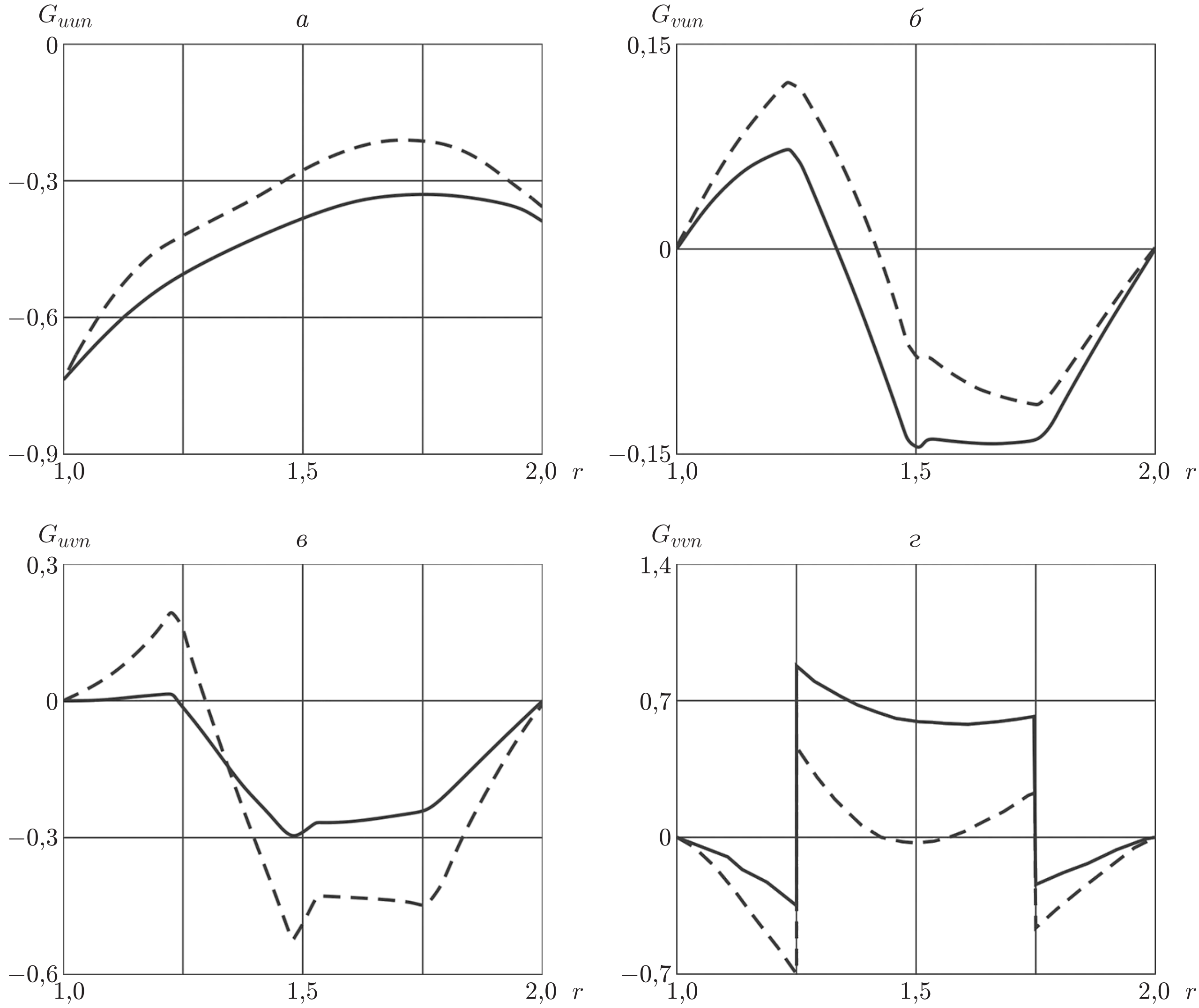

Рис. 1. Распределения функций влияния G_{uun} (*а*), G_{vun} (*б*), G_{uvn} (*в*), G_{vvn} (*г*) по радиусу: сплошные кривые — $n = 1$, штриховые — $n = 2$

$$i = 1, 2, \qquad j = 1, 2,$$

$$s^{2n+3} D_n(r_0 s, r_0 s) D_n(-r_1 s, -r_1 s) Q_{ijn}^{(\alpha\beta l)}(s) = (l;\beta) P_{ijn}^{(\alpha)}(rs, \xi s) \prod_{k=1}^{4} B_{kn}^{l_k}(r_0 s, r_1 s).$$

Следует отметить, что функции $Q_{uun}^{(\alpha\beta l)}(s)$, $Q_{vun}^{(\alpha\beta l)}(s)$, $Q_{uvn}^{(\alpha\beta l)}(s)$, $Q_{vvn}^{(\alpha\beta l)}(s)$ являются правильными рациональными дробями, поэтому оригиналы каждого слагаемого в (4.5) могут быть найдены точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления [2]. При этом в пространстве оригиналов на конечном интервале времени вследствие наличия экспоненциальных множителей ряды в (4.5) являются конечными суммами.

Окончательно для оригиналов искомых функций влияния в соответствии с (3.2), (3.3) получаем следующие равенства:

$$G_{uun}(r, \xi, \tau) = \xi^2 [G_{11n}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + G_{11n}(\xi, r, \tau) H(r - \xi)],$$

$$G_{vun}(r, \xi, \tau) = \xi^2 [G_{21n}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + G_{12n}(\xi, r, \tau) H(r - \xi)], \qquad (4.6)$$

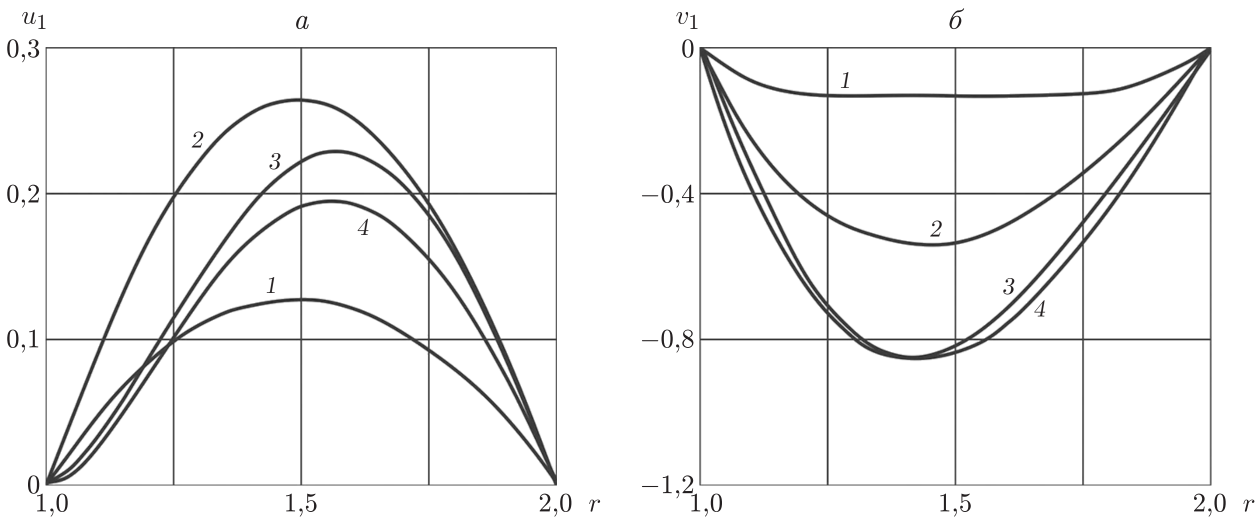

Рис. 2. Распределения функций $u_1(r,\tau)$ (*а*) и $v_1(r,\tau)$ (*б*) по радиусу в различные моменты времени:
1 — $\tau = 0{,}5$, *2* — $\tau = 1{,}0$, *3* — $\tau = 1{,}5$, *4* — $\tau = 2{,}0$

$$G_{uvn}(r,\xi,\tau) = m\xi^2[G_{12n}(r,\xi,\tau)H(\xi-r) + G_{21n}(\xi,r,\tau)H(r-\xi)],$$
$$G_{vvn}(r,\xi,\tau) = \xi^2[G_{22n}(r,\xi,\tau)H(\xi-r) + G_{22n}(\xi,r,\tau)H(r-\xi)].$$

5. Примеры. Рассмотрим сферу с радиусами $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, изготовленную из алюминия ($\eta = 2{,}04$).

На рис. 1 приведены полученные по формулам (4.6) при $\xi = 0{,}5$, $\tau = 1{,}5$ распределения функций влияния G_{uun}, G_{vun}, G_{uvn}, G_{vvn} по радиусу.

Рассмотрим движение сферы под действием объемной силы $F_r(r,\theta,\tau) = H(\tau)\cos\theta$, $F_\theta(r,\theta,\tau) = -H(\tau)\sin\theta$. Этой объемной силе соответствуют следующие коэффициенты рядов [3]:

$$F_{r1}(r,\tau) = H(\tau), \quad F_{\theta 1}(r,\tau) = -H(\tau), \quad F_{r0}(r,\tau) = F_{rn}(r,\tau) = F_{\theta n}(r,\tau) = 0,\ n \geqslant 2.$$

При этом в соответствии с (2.7) имеет место поступательное движение сферы: $u(r,\theta,\tau) = u_1(r,\tau)\cos\theta$, $v(r,\theta,\tau) = v_1(r,\tau)\sin\theta$. Полученные по формулам (2.7) распределения функций $u_1(r,\tau)$ и $v_1(r,\tau)$ по радиусу представлены на рис. 2.

Таким образом, в работе получено решение задачи о движении однородного изотропного тела под действием объемных сил. Рассмотрены примеры движения сферы под действием объемных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горшков А. Г.** Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы / А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский. М.: Наука, 1990.
2. **Горшков А. Г.** Волны в сплошных средах: Учеб. пособие для вузов / А. Г. Горшков, А. Л. Медведский, Л. Н. Рабинский, Д. В. Тарлаковский. М.: Физматлит, 2004.
3. **Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 8/VI 2015 г.,
в окончательном варианте — 13/VII 2015 г.