УДК 536.46

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ ПЛАСТИНЫ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДОВ

Р. Ш. Гайнутдинов

Казанский государственный технологический университет, 420015 Казань

Исследованы критические условия теплового взрыва плоского слоя при граничных условиях второго рода на одной поверхности и третьего рода на другой. Вычислен критический параметр Франк-Каменецкого. Даны аппроксимирующие функции для определения критического параметра.

Необходимость создания безопасных условий работы на предприятиях по производству взрывчатых веществ способствовала появлению многих исследований, посвященных тепловому зажиганию и взрыву [1–6 и др.]. В большинстве случаев на производстве тепловой взрыв или зажигание инициируются теплотой трения. Различные модели зажигания за счет теплоты механического трения рассмотрены в [7, 8]. Задачи зажигания теплотой трения в теоретическом плане сводятся к решению нестационарного уравнения теплопроводности при граничных условиях второго рода для полуограниченного тела. Задача теплового взрыва бесконечного цилиндра при смешанных граничных условиях первого и второго родов в стационарной постановке рассмотрена в [5], где показано, что по достижении критического теплового потока тепловой взрыв происходит в цилиндре любого размера.

В данной работе исследуются условия теплового взрыва неограниченной пластины при граничных условиях второго и третьего родов.

Пусть конденсированное взрывчатое вещество (ВВ) в форме неограниченной пластины с одной поверхности нагревается постоянным тепловым потоком, а с другой — охлаждается конвекцией. В ВВ протекает экзотермическая реакция нулевого порядка, описываемая уравнением Аррениуса. Математическая модель задачи в безразмерном виде в стационарной постановке представляется системой уравнений

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \delta \exp\theta = 0, \qquad (1)$$

$$\xi = 0: \quad \sigma = -\frac{d\theta}{d\xi}, \qquad (2)$$

$$\xi = 1: \quad \mathrm{Bi}(\theta - \theta_e) = -\frac{d\theta}{d\xi}. \qquad (3)$$

Здесь $\theta = E(T - T_*)/RT_*^2$; T_* — масштабная температура; E — энергия активации; R — газовая постоянная; $\xi = x/H$; H — толщина пластины; $\delta = Qk_0 \exp(-E/RT_*)EH^2/RT_*^2\lambda$ — параметр Франк-Каменецкого; Q — тепловой эффект реакции; k_0 — предэкспоненциальный множитель; λ — коэффициент теплопроводности; $\sigma = qHE/\lambda RT_*^2$; q — плотность теплового потока; $\mathrm{Bi} = \alpha H/\lambda$ — критерий Био; α — коэффициент теплоотдачи; $\theta_e = E(T_e - T_*)/RT_*^2$; T_e — температура окружающей среды.

В качестве T_* принимается температура на горячей поверхности пластины, получающаяся из решения системы (1)–(3) в инертной постановке: $T_* = T_e(\mathrm{Ki}(1 + 1/\mathrm{Bi}) + 1)$, где $\mathrm{Ki} = qH/\lambda T_e$ — критерий Кирпичева. В (1) применено разложение экспоненты в уравнении Аррениуса по Франк-Каменецкому [2]. Для определения критического параметра δ_{cr} решаем систему (1)–(3). Решение (1) известно [2]:

$$\exp\theta = a/\operatorname{ch}^2(\mu\xi + b), \qquad (4)$$

где $\mu = (a\delta/2)^{0,5}$, a и b — постоянные интегрирования. Из граничных условий (2) и (3) получаем

$$\sigma = 2\operatorname{th}(b)\mu, \qquad (5)$$

$$\mathrm{Bi}(\ln a - 2\ln\operatorname{ch}(b + \mu) - \theta_e) = 2\operatorname{th}(b + \mu)\mu. \qquad (6)$$

Здесь $\sigma = \mathrm{Ki}U/(\mathrm{Ki}(1+1/\mathrm{Bi})+1)^2$ и $U = E/RT_e$. Решив систему (4)–(6) относительно δ, находим

$$\delta = 2\mu^2/\exp\left(2\operatorname{th}(b + \mu)\mu/\mathrm{Bi} + 2\ln\operatorname{ch}(\mu + b) + \theta_e\right), \qquad (7)$$

где $b = \operatorname{arth}(\sigma/2\mu)$. Функция $\delta(\mu)$ имеет максимум при некотором значении μ_0. Максимальное значение δ принимается за критическое, поскольку при $\delta > \delta_{cr}$ отсутствует стационарное решение системы (1)–(3), которое рассматривается как тепловой взрыв. Приравнивая к нулю производную по μ в правой части (7), приходим к трансцендентному уравнению

$$\frac{\mu}{\mathrm{Bi}}\Big[\frac{\mu - z/(1-z^2)}{\mathrm{ch}^2(b+\mu)} + \mathrm{th}(b+\mu)\Big] + \\ + \mathrm{th}(b+\mu)\Big(\mu - \frac{z}{1-z^2}\Big) = 1, \quad (8)$$

где $z = \sigma/2\mu$. Из (8) находим значение μ_0, при котором δ в (7) имеет критическое значение. Результаты расчетов по (7) и (8) представлены в виде следующих аппроксимирующих функций:

$$(\delta_{cr})_\infty = (0{,}1344\sigma^2 + 0{,}4135\sigma + 0{,}7804)^{0,5}, \quad (9)$$

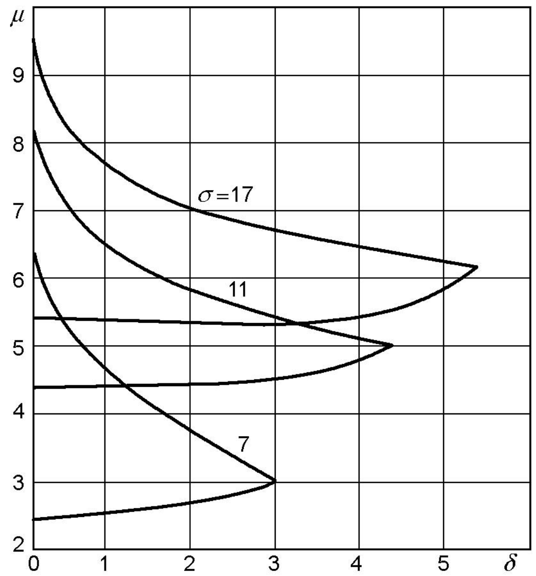
$$\delta_{cr} = (\delta_{cr})_\infty \varphi(\mathrm{Bi}), \quad (10)$$

где $(\delta_{cr})_\infty$ — критическое значение параметра δ при $\mathrm{Bi} \to \infty$. Здесь $\varphi(\mathrm{Bi}) = \varphi_1(\mathrm{Bi})(0{,}57 + \mathrm{Bi})/\mathrm{Bi}$, где $\varphi_1(\mathrm{Bi}) = \mathrm{Bi}((\mathrm{Bi}^2 + 4)^{0,5} - \mathrm{Bi})\exp(((\mathrm{Bi}^2+4)^{0,5} - \mathrm{Bi} - 2)/\mathrm{Bi})/2$ — формула, примененная в [9] при решении третьей краевой задачи теплового взрыва. Относительная ошибка расчетов по формулам (9) и (10) составляет менее 1 и 8 % соответственно в интервалах $\sigma = 0 \div 20$ и $\mathrm{Bi} = 2 \div \infty$.

Из общего решения (7) получаются частные решения. Так, при $\sigma \to 0$ и $\mathrm{Bi} \to \infty$ имеем $b = 0$, $T_* = T_e$ и $\theta_e = 0$. Тогда уравнение (7) приобретает вид $\delta = 2\mu^2/\mathrm{ch}^2\,\mu$. Такое уравнение было получено при решении задачи теплового взрыва при симметричных граничных условиях первого рода для плоского тела [2]. При $\sigma \to 0$ из (7) получаем $\delta = 2\mu^2\exp(-2\mu\,\mathrm{th}\,\mu/\mathrm{Bi})/\mathrm{ch}^2\,\mu$. Эта зависимость ранее была выведена в [10] при решении третьей граничной задачи теплового взрыва. Таким образом, при $\sigma \to 0$ и $\mathrm{Bi} \to \infty$ из решения граничной задачи второго рода можно переходить к граничным задачам первого и третьего родов.

Стационарная теория теплового взрыва Франк-Каменецкого, на которой базируется исследуемая задача, является асимптотической и может быть применена только при условии, что предвзрывные разогревы невелики. Максимальные предвзрывные разогревы находим из (4) при $\xi = 0$:

$$\theta_{\max} = \ln(a/\mathrm{ch}^2\,b). \quad (11)$$



Решение уравнения (7) на устойчивость при $\mathrm{Bi} \to \infty$

Расчеты показали, что при $\mathrm{Bi} = 2 \div \infty$ и $\sigma = 0 \div 20$ максимальные предвзрывные разогревы выражаются зависимостью

$$(\Delta T)_{\max} = (1{,}04 - 1{,}12)RT_*^2/E. \quad (12)$$

Максимальный предвзрывной разогрев в [2] составляет

$$(\Delta T)_{\max} = 1{,}2RT_*^2/E. \quad (13)$$

Следовательно, применение преобразования экспоненты по Франк-Каменецкому в данной работе не противоречит требованиям теории.

В стационарной теории [2], посвященной тепловому взрыву плоского тела при граничных условиях первого рода, было показано, что задача имеет два решения, одно из которых устойчивое. Следуя работе [2], устойчивость решения рассматриваемой задачи исследуем зависимостью $\mu = f(\delta)$, исходя из уравнения (7). Решение этого уравнения приведено на рисунке. Анализ показал, что устойчивому решению отвечает только нижняя часть кривой до максимума. Значение δ_{cr} зависит от σ. Меньшие значения μ соответствуют меньшим максимальным температурам и, как следствие, характеризуют устойчивое решение. Температурное распределение по координате под взрывным пределом определяется из уравнения (4). Необходимые для расчетов значения μ и δ вычисляются из (7) и (8), величина a определяется следующим образом: $a = 2\mu^2/\delta$. Расчеты показали, что максимальная температура достигается на поверхности ($\xi = 0$). Для определения значения μ в приближенных расчетах предлагаются аппроксимирующие функции

$$\mu_\infty = 1{,}4227 + 0{,}4349\sigma + 0{,}2526\sigma^2, \quad (14)$$

$$\mu = \mu_\infty(\mathrm{Bi}/(0{,}23 + \mathrm{Bi})). \quad (15)$$

Функция (14) применяется при $\sigma = 0 \div 20$ и $\mathrm{Bi} \to \infty$. В (15) учитывается конечное значение Bi, и эта формула используется в пределах $\sigma = 2{,}27 \div 20$ и $\mathrm{Bi} = 2 \div \infty$. Относительная ошибка расчетов по формулам (14) и (15) не превышает 1 и 8 % соответственное. Значение δ в приближенных расчетах определяется из (9) и (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мержанов А. Г., Барзыкин В. В., Абрамов В. Г.** Теория теплового взрыва // Хим. физика. 1996. Т. 15, № 6. С. 3–44.
2. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. 3-е изд. М.: Наука, 1987.
3. **Мержанов А. Г., Дубовицкий Ф. И.** Современное состояние теории теплового взрыва // Успехи химии. 1996. Т. 35, вып. 4. С. 656.
4. **Merzhanov A. G., Abramov V. G.** Thermal explosion of explosives and propellants // Propellants and Explosives. 1981. V. 6. P. 130.
5. **Математическая** теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. М.: Наука, 1980.
6. **Barzykin V. V.** High-temperature synthesis in a thermal explosion regime // Intern. J. SHS. 1993. V. 2, N 4. P. 391.
7. **Амосов А. П., Бостанджиян С. А., Козлов В. С.** Зажигание твердых ВВ теплотой сухого взрыва // Физика горения и взрыва. 1972. Т. 8, № 3. С. 362–368.
8. **Амосов А. П., Бостанджиян С. А.** Релаксационный механизм локального разогрева твердых ВВ при механических воздействиях // Физика горения и взрыва. 1976. Т. 12, № 5. С. 699–703.
9. **Барзыкин В. В., Мержанов А. Г.** Краевая задача в теории теплового взрыва // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 6. С. 1271–1273.
10. **Гришин А. М., Тодес О. М.** Об определении условий воспламенения // ПМТФ. 1965. № 1. С. 68–75.

Поступила в редакцию 24/IX 1999 г.,
в окончательном варианте — 12/V 2000 г.