УДК 532.13

ТЕЧЕНИЕ НАНОЖИДКОСТИ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Т. Хайат[*,**], М. Хусейн[***], С. А. Шехзад[****], А. Алсаеди[**]

[*] Университет Каид-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан
[**] Университет короля Абдул-Азиза, 21589 Джедда, Саудовская Аравия
[***] Университет техники и технологии, 54890 Лахор, Пакистан
[****] Институт информационных технологий COMSATS, 57000 Сахивал, Пакистан
E-mails: fmgpak@gmail.com, majid_gul@yahoo.com,
ali_qau70@yahoo.com, aalsaedi@hotmail.com

Исследовано течение в пограничном слое неньютоновской жидкости, содержащей наночастицы, на вертикальной растягивающейся пластине. Проверена сходимость полученного решения. Получены значения скорости, температуры, поверхностного трения и числа Нуссельта в пограничном слое.

Ключевые слова: наночастицы, реологический степенной закон для жидкости, конвективное граничное условие.

DOI: 10.15372/PMTF20160119

Введение. Жидкости с взвешенными в них наночастицами называются наножидкостями. Такие жидкости характеризуются большими теплопроводностью и скоростью теплообмена. В [1] впервые сформулировано уравнение движения наножидкости. Теплообмен в ньютоновской наножидкости в ламинарном внешнем пограничном слое исследован в работе [2]. В [3] предложена модель с эффективной теплопроводностью. В этой модели теплопроводность нелинейно зависит от концентрации наночастиц. В [4] показано, что при наличии даже небольшого количества наночастиц теплопроводность жидкости увеличивается приблизительно в два раза. В [5] получены численные решения задачи о смешанном конвективном течении наножидкости в наклонной каверне с движущейся крышкой. Осесимметричное смешанное конвективное течение вязкой наножидкости на вертикальном растягивающемся цилиндре исследовано в [6]. В работе [7] с использованием модели вязкости Бринкмана проведен анализ смешанного конвективного течения наножидкости в квадратной каверне с одной и двумя движущимися крышками. Решение получено с помощью метода конечных объемов второго порядка. В [8] представлены аналитические решения задачи о естественном конвективном течении наножидкости при наличии магнитного поля. В работе [9] выполнен численный анализ естественного конвективного течения наножидкости при неизотермическом распределении температуры. В [10] изучена скорость теплообмена в наножидкости на основе воды в случае смешанной конвекции в каверне с движущейся крышкой. В [11] исследовано течение наножидкости при наличии тепломассообмена на поверхности скольжения и получены точные и аналитические решения. Процессы тепломассообмена в наножидкостях проанализированы в работе [12]. В [13] с использованием метода наименьших квадратов и метода Галеркина изучено магнитогидродинамическое течение наножидкости в полупористом канале. Влияние двойной стратификации на течение в пограничном слое наножидкости на вертикальной пластине численно исследовано в работе [14]. В [15] изучен процесс теплообмена в наножидкости медь — вода, находящейся между параллельными пластинами. В [16] получены численные решения задачи о течении в пограничном слое наножидкости в случае конвективного теплового граничного условия.

В работе [17] изучены течение в пограничном слое и теплообмен неньютоновской наножидкости на вертикальной растягивающейся пластине. В [18] исследовано течение в пограничном слое неньютоновской наножидкости на вертикальном конусе в пористой среде при наличии источника (стока) тепла. В [19] проведен анализ теплообмена в неньютоновской наножидкости стеариновая кислота — TiO_2, заполняющей пористую среду между двумя коаксиальными цилиндрами. В [20] изучено течение в неортогональной точке торможения потока неньютоновской наножидкости.

При анализе теплообмена большое внимание уделялось задачам с заданной температурой или потоком тепла на поверхности, однако теплообмен в наножидкости в случае конвективного граничного условия изучен недостаточно. Целью данной работы является исследование течения в пограничном слое неньютоновской наножидкости на растягивающейся поверхности в случае конвективного теплового условия с использованием реологического степенного закона. С помощью метода гомотопического анализа (МГА) строятся решения в виде ряда для скорости и температуры [21–25]. Доказана сходимость полученных решений и проведен их анализ.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное двумерное смешанное конвективное течение в пограничном слое наножидкости со степенным законом. Пластина растягивается вдоль оси x со скоростью u_w, при этом температура стенки обозначена T_w, температура жидкости — T_∞. Рассматриваемое течение описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho_{nf}}\Big(- \mu_{nf}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(- \frac{\partial u}{\partial y}\Big)^k \pm g(\rho\beta)_{nf}(T - T_\infty)\Big), \\ u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \end{gathered} \tag{2}$$

где u, v — компоненты скорости в направлениях осей x, y соответственно; μ_{nf} — эффективная динамическая вязкость; T — температура жидкости; k — показатель степени в степенном законе; g — ускорение свободного падения; ρ_{nf} — эффективная плотность; $(\rho\beta)_{nf}$ — коэффициент теплового расширения; α_{nf} — эффективная температуропроводность. Данные параметры определяются следующим образом:

$$\rho_{nf} = (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_s, \quad \mu_{nf} = \mu_f/(1-\varphi)^{2,5}, \quad (\rho\beta)_{nf} = (1-\varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_s,$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1-\varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)s, \qquad \alpha_{nf} = k_{nf}/(\rho C_p)_{nf},$$

$$k_{nf} = k_f\,\frac{k_s + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_s)}$$

(φ — объемная доля твердых наночастиц; ρC_p — теплоемкость; k_{nf} — эффективная теплопроводность наножидкости).

Граничные условия задачи имеют вид

$$
\begin{gathered}
y=0: \qquad u=bx, \quad v=0, \quad -k_{nf}\,\frac{\partial T}{\partial y}=-h(T_f-T),\\
y\to\infty: \qquad u=0, \quad T\to T_\infty.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Введем функцию тока Ψ. Тогда компоненты скорости имеют вид $u=\partial\Psi/\partial y$, $v=-\partial\Psi/\partial x$. Введем также следующие зависимости:

$$
\Psi=xu_w(\mathrm{Re}_x)^{-1/(k+1)}f(\eta), \quad \eta=\frac{y}{x}\,(\mathrm{Re}_x)^{-1/(k+1)}, \quad \theta(\eta)=\frac{T-T_\infty}{T_f-T_\infty}
$$

(Re_x — локальное число Рейнольдса). С учетом этих соотношений условие несжимаемости (1) тождественно удовлетворяется, а уравнения (2), (3), (5) принимают вид

$$
\frac{k}{(1-\varphi)^{2,5}}\,(-f'')^{k-1}f'''+\Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{\rho_s}{\rho_f}\Big)\Big)\Big(\frac{2k}{k+1}\,ff''-f'^2\Big)+\lambda\Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{(\rho\beta)_s}{(\rho\beta)_f}\Big)\Big)\theta=0,
$$

$$
\frac{1}{\mathrm{Pr}_m}\Big(\frac{k_{nf}}{k_f}\Big)\varphi''+\Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}\Big)\Big)\frac{2k}{1+k}\,f\theta'-f'\theta=0,
$$

$$
\begin{gathered}
f(0)=0, \qquad f'(0)=1, \qquad \theta'(0)=-\gamma(1-\theta(0)),\\
f'(\eta)=0, \qquad \theta(\eta)=0, \qquad \eta\to\infty,
\end{gathered}
$$

где штрих обозначает дифференцирование по η; Pr_m — модифицированное число Прандтля для жидкости со степенным законом; λ — параметр смешанной конвекции; Gr_x — число Грасгофа:

$$
\mathrm{Pr}_m=\frac{bx^2}{\alpha f}\,(\mathrm{Re}_x)^{-2/(k+1)}, \qquad \lambda=\pm\frac{\mathrm{Gr}_x}{\mathrm{Re}_x}, \qquad \mathrm{Gr}_x=\frac{g\beta(T_w-T_\infty)xb^{-n}}{v_f}.
$$

Коэффициент поверхностного трения C_f и локальное число Нуссельта Nu_x определяются по формулам

$$
C_f=\frac{2\mu_{nf}}{\rho_f u_w^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^n\Big|_{y=0}, \qquad \mathrm{Nu}_x=\frac{xk_{nf}}{k_f(T_w-T_\infty)}\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}.
$$

Представим эти выражения в безразмерной форме:

$$
(\mathrm{Re}_x)^{-1/(k+1)}C_f=\frac{2}{(1-\varphi)^{2,5}}-(f''(0))^k, \quad (\mathrm{Re}_x)^{-1/(k+1)}\,\mathrm{Nu}_x=1+\frac{1}{\theta'(0)}\,\frac{k_{nf}}{k_f}.
$$

2. Представление решения. Исходные функции f_0, θ_0 и вспомогательные линейные операторы L_f, L_θ выбраны следующим образом:

$$
f_0(\eta)=1-\mathrm{e}^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta)=\frac{\gamma\,\mathrm{e}^{-\eta}}{1-\gamma}, \quad L_f=\frac{d^3f}{d\eta^3}+\frac{d^2f}{d\eta^2}, \quad L_\theta=\frac{d^2\theta}{d\theta^2}-\theta.
$$

Операторы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
L_f[C_1+C_2\eta+C_3\,\mathrm{e}^{-\eta}]=0, \qquad L_\theta[C_4\,\mathrm{e}^{\eta}+C_5\,\mathrm{e}^{-\eta}]=0
$$

(C_i $(i=1\div 5)$ — произвольные постоянные).

Вводя параметр $p\in[0,1]$ и полагая, что вспомогательные параметры h_f, h_θ отличны от нуля, получаем следующие задачи нулевого порядка:

$$
(1-p)L_f[\hat f(\eta;\,p)-f_0(\eta)]=ph_fN_f[\hat f(\eta;p),\hat\theta(\eta;p)],
$$

$$
\begin{gathered}
(1-p)L_\theta[\hat\theta(\eta;p)-\theta_0(\eta)] = ph_\theta N_\theta[\hat f(\eta;p),\hat\theta(\eta;p)],\\
\hat f(\eta,p)\Big|_{\eta=0}=0,\qquad \frac{\partial\hat f(\eta,p)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\infty}=1,\qquad \hat\theta(\eta,p)\Big|_{\eta=0}=-\gamma(1+\theta(0)),\\
\frac{\partial\hat f(\eta,p)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\infty}=0,\qquad \hat\theta(\eta,p)\Big|_{\eta=\infty}=0.
\end{gathered} \tag{4}
$$

При $k = 1$ нелинейные операторы имеют вид

$$
N_f[\hat f(\eta;p),\hat g(\eta;p)] = \frac{k}{(1-\varphi)^{2,5}}\,\frac{\partial^3\hat f(\eta;p)}{\partial\eta^3} + \Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{\rho_s}{\rho_f}\Big)\Big)\frac{2k}{k+1}\,\hat f(\eta;p)\,\frac{\partial f(\eta;p)}{\partial\eta} - {}
$$

$$
{}-\Big(\frac{\partial f(\eta;p)}{\partial\eta}\Big)^2 + \lambda\Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{(\rho\beta)_s}{(\rho\beta)_f}\Big)\Big)\theta,
$$

$$
N_\theta[\hat f(\eta;p),\hat\theta(\eta;p)] = \frac{1}{\mathrm{Pr}_m}\,\frac{k_{nf}}{k_f}\,\frac{\partial^2\hat\theta(\eta;p)}{\partial\eta^2} + \Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}\Big)\Big)\frac{2k}{1+k}\,\hat f(\eta;p)\,\frac{\partial\hat\theta(\eta;p)}{\partial\eta} - {}
$$

$$
{}-\hat\theta(\eta;p)\,\frac{\partial\hat f(\eta;p)}{\partial\eta}.
$$

При $p = 0$ и $p = 1$ получаем

$$
\hat f(\eta;0)=f_0(\eta),\quad \hat f(\eta;1)=f(\eta),\quad \hat\theta(\eta;0)=\theta_0(\eta),\quad \hat\theta(\eta;1)=\theta(\eta),
$$

поэтому функции $\hat f$ и $\hat\theta$ можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
\hat f(\eta;p) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)p^m,\qquad \hat\theta(\eta;p) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty}\theta_m(\eta)p^m,\\
f_m(\eta) = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m f(\eta;p)}{\partial\eta^m}\Big|_{p=0},\qquad \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m\theta(\eta;p)}{\partial\eta^m}\Big|_{p=0}.
\end{gathered}
$$

Значения h_f и h_θ выбраны таким образом, чтобы ряды решения сходились при $p = 1$. Тогда

$$
f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta),\qquad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty}\theta_m(\eta).
$$

Задачи для деформации m-го порядка имеют вид

$$
\begin{gathered}
L_f[f_m(\eta)-\chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_m^f(\eta),\quad L_\theta[\theta_m(\eta)-\chi_m\theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_m^\theta(\eta),\\
f_m(0)=0,\quad f_m'(0)=0,\quad f_m'(\infty)=0,\quad \theta_m'(0)=\theta_m(\infty)=0,
\end{gathered} \tag{5}
$$

где нелинейные операторы при $k = 1, 2$ определены следующим образом:

$$
R_m^f(\eta) = \frac{k}{(1-\varphi)^{2,5}}\,f_{m-1}''' + \Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{\rho_s}{\rho_f}\Big)\Big)\sum_{k=0}^{m-1} f_k f_{m-1-k}'' - {}
$$

$$
{}-\Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{\rho_s}{\rho_f}\Big)\Big)\sum_{k=0}^{m-1} f_k' f_{m-1-k}' + \lambda\theta_{m-1}; \tag{6}
$$

$$
R_m^\theta(\eta) = \frac{1}{\mathrm{Pr}_m}\Big(\frac{k_{nf}}{k_f}\Big)\theta_{m-1}'' + \Big(1-\varphi+\varphi\Big(\frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}\Big)\Big)\sum_{k=0}^{m-1} f_k\theta_{m-1-k}' - \sum_{k=0}^{m-1}\theta_k f_{m-1-k}'; \tag{7}
$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leqslant 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

Общие решения уравнений (6), (7) могут быть записаны в следующем виде:

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{\eta} + C_3\,\mathrm{e}^{-\eta}, \qquad \theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + C_4\,\mathrm{e}^{\eta} + C_5\,\mathrm{e}^{-\eta}.$$

Здесь $f_m^*(\eta)$, $\theta_m^*(\eta)$ — частные решения уравнений (4). Следует отметить, что уравнения (4) могут быть решены с использованием любого вычислительного программного обеспечения (Maple, Mathematica и т. д.).

3. Сходимость решений и обсуждение результатов. Вспомогательные параметры h_f, h_θ, входящие в выражения (5), обеспечивают сходимость решений. На рис. 1 показаны h-кривые для функций $f''(0)$, $\theta'(0)$. Видно, что допустимые значения h_f и h_θ находятся в диапазонах $-0{,}8 \leqslant h_f \leqslant -0{,}2$ и $-1{,}5 \leqslant h_\theta \leqslant -1{,}0$. Из рис. 1 следует, что полученные решения справедливы для всех физических параметров во всей рассматриваемой области. В таблице показано, что начиная с приближения 25-го порядка решения не меняются.

На рис. 2–6 показано влияние объемной доли наночастиц φ, числа Био γ и модифицированного числа Прандтля Pr_m на свойства жидкости со степенным реологическим законом. На рис. 2 показано влияние объемной доли наночастиц φ на температуру. Видно, что с увеличением значений φ увеличиваются температура и толщина теплового пограничного слоя. На рис. 3 показано влияние числа Био γ на температуру. Из рис. 3 следует, что с увеличением числа Био γ толщина теплового пограничного слоя и температура жидкости увеличиваются. Число Био прямо пропорционально коэффициенту теплопередачи. При увеличении числа Био коэффициент теплопередачи увеличивается, что в свою очередь

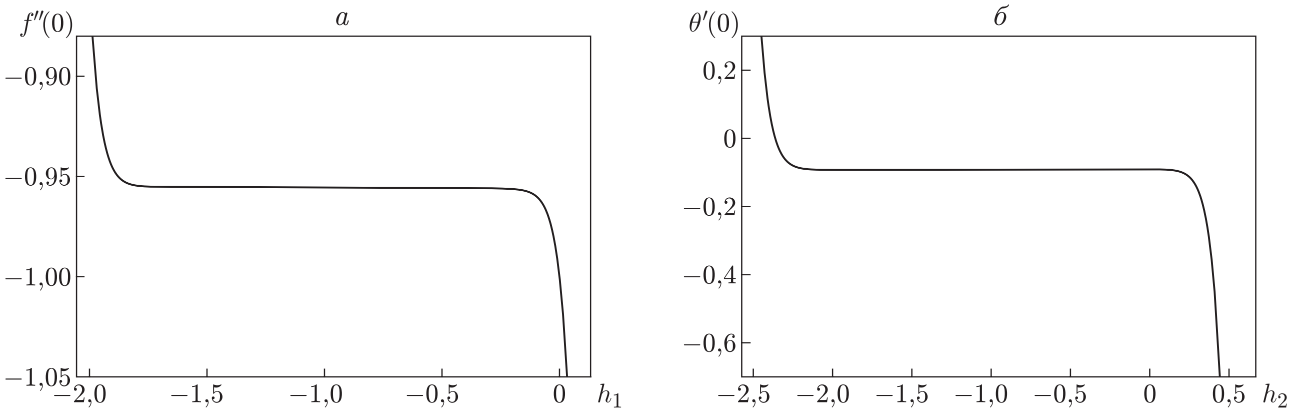

Рис. 1. h-кривые для функций $f''(0)$ (*а*) и $\theta'(0)$ (*б*) при порядке аппроксимации решения, равном 20

Сходимость решения при аппроксимациях различного порядка

Порядок приближения	$-f''(0)$	$-\theta'(0)$
1	0,503 80	0,9855
5	0,521 29	1,1792
10	0,524 26	1,1841
15	0,524 49	1,1841
20	0,524 50	1,1841
25	0,524 51	1,1842
30	0,524 51	1,1842
40	0,524 51	1,1842

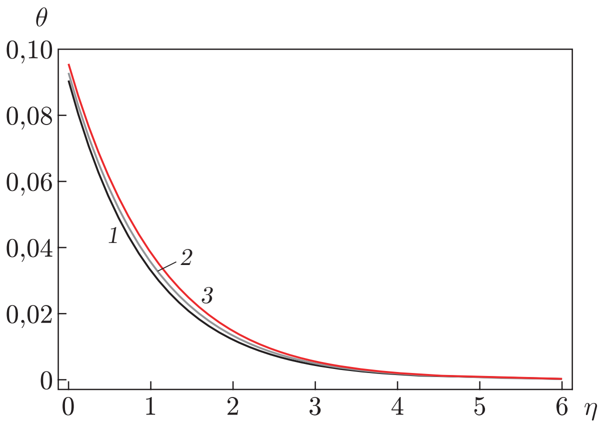

Рис. 2

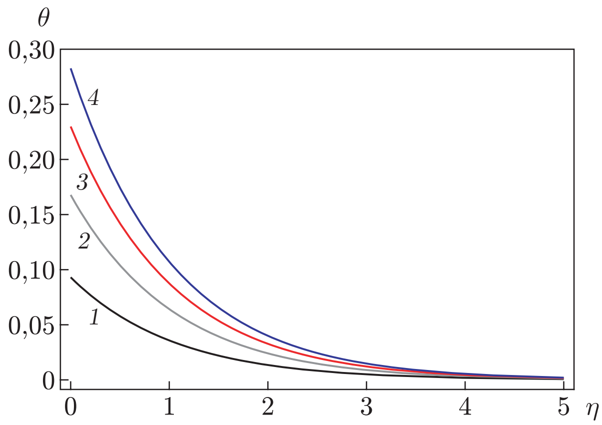

Рис. 3

Рис. 2. Профиль температуры при $\mathrm{Pr}_m = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0{,}1$ и различных значениях φ:
1 — $\varphi = 0$, *2* — $\varphi = 0{,}09$, *3* — $\varphi = 0{,}25$

Рис. 3. Профиль температуры при $\mathrm{Pr}_m = 1$, $\lambda = 1$, $\varphi = 1$ и различных значениях γ:
1 — $\gamma = 0{,}1$, *2* — $\gamma = 0{,}2$, *3* — $\gamma = 0{,}3$, *4* — $\gamma = 0{,}4$

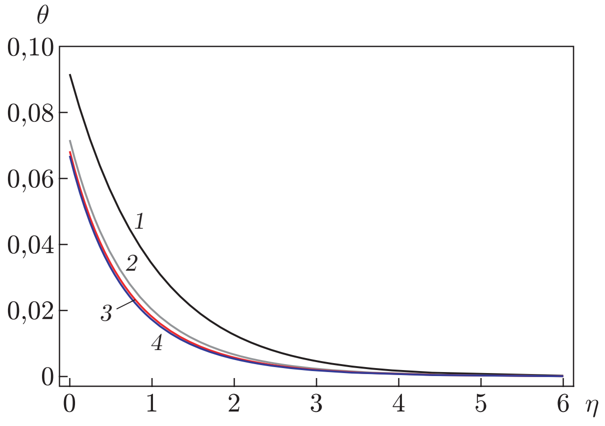

Рис. 4

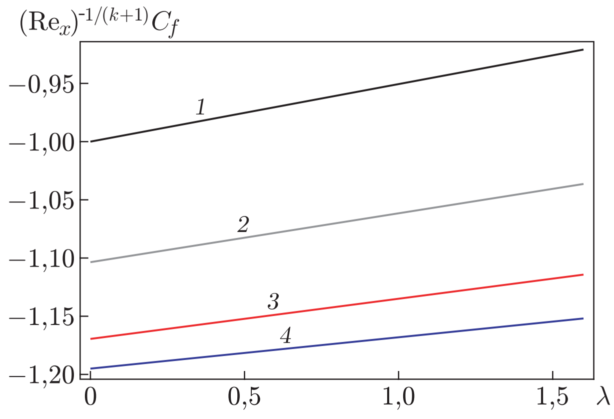

Рис. 5

Рис. 4. Профили температуры при $\varphi = 0{,}1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0{,}1$ и различных значениях Pr_m:
1 — $\mathrm{Pr}_m = 1$, *2* — $\mathrm{Pr}_m = 4$, *3* — $\mathrm{Pr}_m = 7$, *4* — $\mathrm{Pr}_m = 10$

Рис. 5. Зависимость коэффициента поверхностного трения от параметра смешанной конвекции λ при $\mathrm{Pr}_m = 1$, $\gamma = 0{,}1$ и различных значениях φ:
1 — $\varphi = 0$, *2* — $\varphi = 0{,}05$, *3* — $\varphi = 0{,}10$, *4* — $\varphi = 0{,}15$

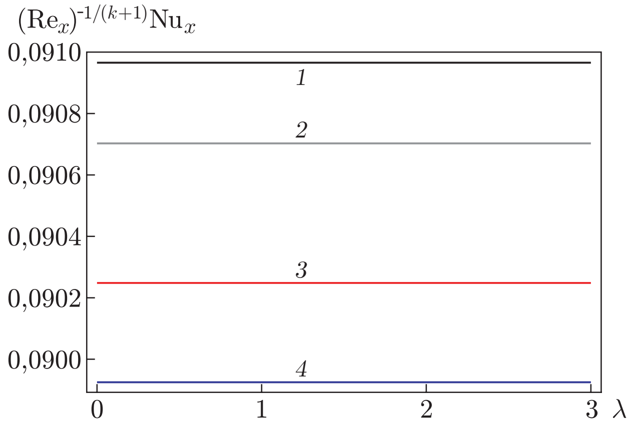

Рис. 6. Зависимость числа Нуссельта от параметра смешанной конвекции λ при $\mathrm{Pr}_m = 1$, $\gamma = 0{,}1$ и различных значениях φ:
1 — $\varphi = 0$, *2* — $\varphi = 0{,}05$, *3* — $\varphi = 0{,}15$, *4* — $\varphi = 0{,}25$

приводит к увеличению температуры и толщины теплового пограничного слоя. Влияние модифицированного числа Прандтля Pr_m на температуру показано на рис. 4. Видно, что с увеличением Pr_m температура уменьшается. Модифицированное число Прандтля Pr_m зависит от температуропроводности. С увеличением значения Pr_m температуропроводность уменьшается, что приводит к уменьшению температуры и толщины теплового пограничного слоя. Влияние объемной доли наночастиц φ на коэффициент поверхностного трения и число Нуссельта показано на рис. 5, 6. Видно, что с увеличением φ коэффициент поверхностного трения увеличивается, а локальное число Нуссельта уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Choi S. U. S., Eastman J. A.** Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // Proc. of the 1995 ASME. Intern. mech. engng congress and exhibition, San Francisco (USA), 12–17 Nov. 1995. S. l.: ASME, 1995. P. 99–105.
2. **Polidori G., Fohanno S., Nguyen C. T.** A note on heat transfer modelling of Newtonian nanofluids in laminar free convection // Intern. J. Thermal Sci. 2007. V. 46. P. 739–744.
3. **Moghadassi A. R., Hosseini S. M., Henneke D., Elkamel A.** A model of nanofluids effective thermal conductivity based on dimensionless group // J. Thermal Anal. Calorimetry. 2009. V. 96. P. 81–84.
4. **Choi S. U. S., Zhang Z. G., Yu W., et al.** Anomalously thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions // Appl. Phys. Lett. 2001. V. 79. P. 2252–2254.
5. **Alinia M., Ganji D. D., Gorji-Bandpy M.** Numerical study of mixed convection in an inclined two sided lid driven cavity filled with nanofluid using two-phase mixture model // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2011. V. 38. P. 1428–1435.
6. **Grosan T., Pop I.** Axisymmetric mixed convection boundary layer flow past a vertical cylinder in a nanofluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 3139–3145.
7. **Chamkha A. J., Abu-Nada E.** Mixed convection flow in single- and double-lid driven square cavities filled with water — Al_2O_3 nanofluid: Effect of viscosity models // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2012. V. 36. P. 82–96.
8. **Hamad M. A. A.** Analytical solution of natural convection flow of a nanofluid over a linearly stretching sheet in the presence of magnetic field // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2011. V. 38. P. 487–492.

9. **Oztop H. F., Abu-Nada E., Varol Y., Al-Salem K.** Computational analysis of non-isothermal temperature distribution on natural convection in nanofluid filled enclosures // Superlattices Microstruct. 2011. V. 49. P. 453–467.
10. **Cho C. C., Chen C. L., Chen C. K.** Mixed convection heat transfer performance of water-based nanofluids in lid-driven cavity with wavy surfaces // Intern. J. Thermal Sci. 2013. V. 68. P. 181–190.
11. **Turkyilmazoglu M.** Exact analytical solutions for heat and mass transfer of MHD slip flow in nanofluids // Chem. Engng Sci. 2012. V. 84. P. 182–187.
12. **Turkyilmazoglu M., Pop I.** Heat and mass transfer of unsteady natural convection flow of some nanofluids past a vertical infinite flat plate with radiation effect // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 59. P. 167–171.
13. **Sheikholeslami M., Hatami M., Ganji D. D.** Analytical investigation of MHD nanofluid flow in a semi-porous channel // Powder Technol. 2013. V. 246. P. 327–336.
14. **Ibrahim W., Makinde O. D.** The effect of double stratification on boundary-layer flow and heat transfer of nanofluid over a vertical plate // Comput. Fluids. 2013. V. 86. P. 433–441.
15. **Sheikholeslami M., Ganji D. D.** Heat transfer of Cu — water nanofluid flow between parallel plates // Powder Technol. 2013. V. 235. P. 873–879.
16. **Makinde O. D., Aziz A.** Boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with a convective boundary condition // Intern. J. Thermal Sci. 2011. V. 50. P. 1326–1332.
17. **Hamad M. A. A., Bashir M. A.** Boundary layer flow and heat transfer of power-law non-Newtonian nanofluid over vertical stretching sheet // World Appl. Sci. J. 2009. V. 7. P. 172–178.
18. **Hady F. M., Ibrahim F. S., Abdel-Gaied S. M., Eid M. R.** Effect of heat generation/absorption on natural convective boundary-layer flow from a vertical cone embedded in a porous medium filled with a non-Newtonian nanofluid // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2011. V. 38. P. 1414–1420.
19. **Hatami M., Ganji D. D.** Heat transfer and flow analysis for SA–TiO_2 non-Newtonian nanofluid passing through the porous media between two coaxial cylinders // J. Molecular Liquids. 2013. V. 188. P. 155–161.
20. **Nadeem S., Mehmood R., Akbar N. S.** Non-orthogonal stagnation point flow of a nano non-Newtonian fluid towards a stretching surface with heat transfer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 57. P. 679–689.
21. **Liao S. J.** Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
22. **Turkyilmazoglu M.** Solution of the Thomas — Fermi equation with a convergent approach // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. P. 4097–4103.
23. **Rashidi M. M., Keimanesh M., Rajvanshi S. C.** Study of pulsatile flow in a porous annulus with the homotopy analysis method // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2012. V. 22. P. 971–989.
24. **Abbasbandy S., Hashemi M. S., Hashim I.** On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations // Quaestiones Math. 2013. V. 36. P. 93–105.
25. **Hayat T., Shehzad S. A., Al-Sulami H. H., Asghar S.** Influence of thermal stratification on the radiative flow of Maxwell fluid // J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Engng. 2013. V. 35. P. 381–389.

Поступила в редакцию 28/XI 2013 г.