УДК 539.375

РЕМОНТ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ ПОСРЕДСТВОМ ЗАПЛАТКИ

В. В. Сильвестров, А. Ю. Землянова

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, 428015 Чебоксары

Изучено напряженное состояние тонкой упругой бесконечной пластины с круговым вырезом, на который наложена круглая заплатка большего радиуса. Центры выреза и заплатки совпадают. Заплатка присоединена к пластине вдоль всей своей границы. На бесконечности пластины и на границе выреза действуют заданные напряжения. Методом степенных рядов найдены комплексные потенциалы Мусхелишвили, исследовано поведение напряжений на линии соединения заплатки с пластиной и на границе выреза.

Ключевые слова: пластина с вырезом, комплексные потенциалы Мусхелишвили, напряжения.

1. Постановка задачи. Пусть на тонкую упругую пластину S с круговым вырезом, занимающую на комплексной плоскости $z = x + iy$ область $|z| \geqslant R$, наложена тонкая упругая круглая заплатка S_1: $|z| \leqslant R_1$ ($R \leqslant R_1$), которая присоединена к пластине без натяга и промежуточных прослоек вдоль своей границы L_1: $|z| = R_1$. Пластина и заплатка являются однородными, изотропными и имеют толщины, модули сдвига, коэффициенты Пуассона h, μ, ν и h_1, μ_1, ν_1 соответственно. На бесконечности в плоскости пластины действуют заданные нормальные σ_x^∞, σ_y^∞, касательное τ_{xy}^∞ напряжения и вращение ω^∞, а на границе L: $|z| = R$ — заданные нормальное σ_r и касательное $\tau_{r\theta}$ напряжения:

$$(\sigma_r + i\tau_{r\theta})(t) = p(t), \qquad t \in L. \tag{1.1}$$

На линии L_1 соединения заплатки с пластиной выполняются условия равенства смещений точек этой линии со стороны пластины и заплатки и условие равновесия ее точек:

$$\begin{gathered}(u + iv)_1(t) = (u + iv)_2(t) = (u + iv)_3(t),\\ h_1(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_1(t) + h(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_2(t) = h(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_3(t), \qquad t \in L_1,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $u+iv$ — вектор смещений; нижний индекс 1 соответствует заплатке; индекс 2 — части S_2: $R < |z| < R_1$ пластины, находящейся внутри линии соединения; индекс 3 — части S_3: $|z| > R_1$ пластины, находящейся снаружи линии соединения.

Будем считать, что поверхности пластины и заплатки касаются друг друга без трения и в них реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, определяемое по формулам Колосова — Мусхелишвили [1] в полярных координатах:

$$\begin{gathered}(\sigma_r + \sigma_\theta)_k(z) = 4\operatorname{Re}\Phi_k(z),\\ (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_k(z) = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - \overline{z\Phi_k'(z)} - z^{-1}\overline{z\Psi_k(z)},\\ 2\mu_k\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(u + iv)_k(z) = iz(æ_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} + \overline{z\Phi_k'(z)} + z^{-1}\overline{z\Psi_k(z)}\,),\end{gathered} \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00160).

$$2\mu_k \frac{\partial}{\partial r}(u+iv)_k(z) = \mathrm{e}^{i\theta}(\text{æ}_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)}\,) - r\overline{\Phi_k'(z)} - \mathrm{e}^{-i\theta}\,\overline{\Psi_k(z)},$$

$$z \in S_k, \qquad \text{æ}_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}, \qquad \text{æ}_2 = \text{æ}_3 = \text{æ} = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \qquad \mu_2 = \mu_3 = \mu, \qquad k = 1,2,3.$$

Здесь σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений в полярных координатах r, θ ($r\,\mathrm{e}^{i\theta} = x+iy$) в расчете на единицу толщины пластины или заплатки; $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ — однозначные аналитические функции (комплексные потенциалы) в области S_k, причем на бесконечности

$$\Phi_3(z) = \Gamma + Qz^{-1} + O(z^{-2}), \qquad \Psi_3(z) = \Gamma' - \text{æ}\overline{Q}z^{-1} + O(z^{-2}), \tag{1.4}$$

где

$$\Gamma = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} + \frac{2i\mu}{1+\text{æ}}\,\omega^\infty, \qquad \Gamma' = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2} + i\tau_{xy}^\infty, \qquad Q = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\text{æ})h}.$$

В (1.4) $X+iY = ih\int\limits_L p(t)\,dt = -hR\int\limits_0^{2\pi} p(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta$ есть главный вектор внешних усилий, действующих на границе выреза.

2. Решение задачи. Запишем заданную функцию $p(t)$, $t \in L$ как функцию от полярного угла θ:

$$p(t) = p(R\,\mathrm{e}^{i\theta}) = g(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad (R = \mathrm{const}). \tag{2.1}$$

Как и при решении основных задач теории упругости для круга [1], будем считать функцию $g(\theta)$ непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющей условиям $g(0) = g(2\pi)$, $g'(0) = g'(2\pi)$ и имеющей вторую производную, удовлетворяющую условию Дирихле. Тогда эта функция разлагается в комплексный ряд Фурье

$$p(R\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\,\mathrm{e}^{in\theta}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{2.2}$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,d\theta, \qquad n = 0, \pm1, \ldots.$$

Коэффициенты A_n удовлетворяют неравенствам

$$|A_n| \leqslant M/|n|^3, \qquad M = \mathrm{const} > 0, \quad n = \pm1, \pm2, \ldots, \tag{2.3}$$

обеспечивающим правомерность всех производимых в дальнейшем операций со степенными рядами.

Комплексные потенциалы в областях S_k будем искать в виде степенных рядов:

$$\Phi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{nk}z^n, \qquad \Psi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{nk}z^n, \tag{2.4}$$

где

$$a_{n1} = b_{n1} = 0, \quad n = -1, -2, \ldots, \qquad a_{n3} = b_{n3} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

и, согласно (1.4),

$$a_{03} = \Gamma, \qquad a_{-13} = Q, \qquad b_{03} = \Gamma', \qquad b_{-13} = -\text{æ}\overline{Q}. \tag{2.6}$$

На основании условий (1.1), (1.2) и формул (1.3) на окружностях L и L_1 имеем следующие краевые условия:

$$
\begin{gathered}
\Phi_2(t)+\overline{\Phi_2(t)}-\overline{t\Phi_2'(t)}-t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)}=p(t), \qquad t=R\,\mathrm{e}^{i\theta},\\
\mu_*^{-1}(æ_1\Phi_1(t)-\overline{\Phi_1(t)}+\overline{t\Phi_1'(t)}+t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}\,)=æ\Phi_2(t)-\overline{\Phi_2(t)}+\overline{t\Phi_2'(t)}+t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)}=\\
=æ\Phi_3(t)-\overline{\Phi_3(t)}+\overline{t\Phi_3'(t)}+t^{-1}\overline{t\Psi_3(t)}, \qquad t=R_1\,\mathrm{e}^{i\theta}, \qquad (2.7)\\
h_*(\Phi_1(t)+\overline{\Phi_1(t)}-\overline{t\Phi_1'(t)}-t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}\,)+\Phi_2(t)+\overline{\Phi_2(t)}-\overline{t\Phi_2'(t)}-t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)}=\\
=\Phi_3(t)+\overline{\Phi_3(t)}-\overline{t\Phi_3'(t)}-t^{-1}\overline{t\Psi_3(t)}, \qquad t=R_1\,\mathrm{e}^{i\theta},\\
0\leqslant\theta\leqslant2\pi, \qquad \mu_*=\mu_1/\mu, \qquad h_*=h_1/h.
\end{gathered}
$$

Считая ряды (2.4) и ряды, полученные почленным дифференцированием от $\Phi_k(z)$, равномерно сходящимися в соответствующих областях S_k, включая их границы, подставим их в условия (2.7). Тогда, учитывая (2.1), (2.2), (2.5), (2.6), для нахождения остальных неизвестных коэффициентов a_{nk}, b_{nk} этих рядов получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которая распадается на конечные системы относительно отдельных групп коэффициентов. Их решения находятся по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
a_{02}=\frac{(æ_1-1)(æ+1)\operatorname{Re}\Gamma+2h_*\mu_*R_*^2\operatorname{Re}A_0}{2h_*\mu_*(æ-1+2R_*^2)+(æ_1-1)(æ+1)}+i\operatorname{Im}\Gamma, \qquad a_{12}=\frac{2(1-R_*^2)\overline{Q}+R_1R_*^3A_1}{R_1^2\beta_1},\\
a_{01}=\frac{\mu_*}{æ_1-1}\,((æ-1+2R_*^2)\operatorname{Re}a_{02}-R_*^2\operatorname{Re}A_0)+\frac{i\mu_*}{æ_1+1}\,((æ+1)\operatorname{Im}\Gamma-R_*^2\operatorname{Im}A_0),\\
a_{11}=-\frac{æ+1}{h_*}\,a_{12}, \qquad a_{22}=\frac{\Delta_2}{R_1^2}\Big(3\,\frac{æ+1}{\mu_*}\,(1-R_*^2)\Gamma'+\gamma_2R_*^4A_2+3\alpha(1-R_*^2)\overline{A_{-2}}\,\Big),\\
a_{21}=-(æ+1)h_*^{-1}a_{22}, \qquad a_{-22}=R_1^2\Delta_2(\mu_*^{-1}(æ+1)\beta_2\overline{\Gamma}'+\alpha\beta_2A_{-2}-\alpha(1-R_*^2)R_*^4\overline{A_2}\,),\\
a_{-23}=\alpha^{-1}\mu_*^{-1}((æ+1)a_{-22}-h_*\mu_*R_1^2\overline{\Gamma}'\,), \qquad a_{-12}=Q, \qquad b_{-12}=-æ\overline{Q},\\
b_{01}=\mu_*\Gamma'+\mu_*æR_1^{-2}\overline{a_{-23}}-R_1^2a_{21}, \qquad b_{02}=R^{-2}\overline{a_{-22}}-R^2a_{22}-\overline{A_{-2}},\\
b_{-33}=æ\overline{a_{12}}R_1^4+b_{-32}, \qquad b_{-32}=\overline{a_{12}}R^4+2QR^2-\overline{A_1}R^3, \qquad (2.8)\\
b_{-23}=\mu_*^{-1}R_1^2(æ_1-1)\operatorname{Re}a_{01}-R_1^2(æ-1)\operatorname{Re}\Gamma+iR^2\operatorname{Im}A_0, \qquad b_{-22}=2R^2\operatorname{Re}a_{02}-R^2\overline{A_0},\\
b_{-42}=3R^2a_{-22}+R^6\overline{a_{22}}-R^4\overline{A_2}, \qquad b_{-43}=\mu_*^{-1}æ_1R_1^6\overline{a_{21}}+3R_1^2a_{-23},\\
a_{n2}=R_1^{-n}\Delta_n(\gamma_nR_*^{n+2}A_n+(n+1)\alpha(1-R_*^2)R_*^{2-n}\overline{A_{-n}}\,), \qquad a_{n1}=-(æ+1)h_*^{-1}a_{n2},\\
a_{-n2}=R_1^n\Delta_n\alpha(R_*^{2-n}\beta_nA_{-n}-(n-1)(1-R_*^2)R_*^{n+2}\overline{A_n}\,), \qquad a_{-n3}=\alpha^{-1}\mu_*^{-1}(æ+1)a_{-n2},\\
b_{-(n+2)2}=(n+1)R^2a_{-n2}+R^{2n+2}\overline{a_{n2}}-R^{n+2}\overline{A_n}, \quad b_{-(n+2)3}=\mu_*^{-1}æ_1R_1^{2n+2}\overline{a_{n1}}+(n+1)R_1^2a_{-n3},\\
b_{(n-2)1}=\mu_*æR_1^{2-2n}\overline{a_{-n3}}-(n-1)R_1^2a_{n1}, \qquad b_{(n-2)2}=R^{2-2n}\overline{a_{-n2}}-(n-1)R^2a_{n2}-\overline{A_{-n}}R^{2-n},\\
b_{(n-2)1}=\frac{\mu_*æ\overline{a_{-n3}}}{R_1^{2n-2}}-(n-1)R_1^2a_{n1}, \quad b_{(n-2)2}=\frac{\overline{a_{-n2}}}{R^{2n-2}}-\frac{\overline{A_{-n}}}{R^{n-2}}-(n-1)R^2a_{n2}, \quad n=3,4,\ldots,
\end{gathered}
$$

где $R_*=R/R_1$, $\alpha=\mu_*^{-1}(æ+1+h_*\mu_*æ)$, $\beta_n=æ+\mu_*^{-1}h_*^{-1}æ_1(æ+1)+R_*^{2n+2}$, $\gamma_n=h_*æ^2+R_*^{2-2n}\alpha$, $\Delta_n=(\beta_n\gamma_n+\alpha(n^2-1)(1-R_*^2)^2)^{-1}$.

Из этих формул и неравенств (2.3) следует, что при $n \to \infty$ коэффициенты рядов (2.4) убывают как $|n|^{-3}$, что обеспечивает сходимость этих рядов.

Замечание. Решение задачи в случае заклеивания кругового выреза заплаткой того же радиуса можно получить из найденного решения непосредственно предельным переходом $R_1 \to R$. Полученные таким образом формулы совпадают с точностью до обозначений с формулами, приведенными в [2]. При этом условия сопряжения (1.2) можно записать в виде

$$(u+iv)_1(t) = (u+iv)_3(t), \qquad h_1(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_1(t) = h(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_3(t),$$
$$(u+iv)_2(t) = (u+iv)_1(t), \qquad t \in L$$

(последнее условие на окончательное решение задачи не влияет).

3. Исследование напряженного состояния при $p(t) = 0$. Если граница выреза свободна от напряжений, то все коэффициенты $A_n = 0$. Тогда из формул (2.4), (2.8) получим следующие представления для комплексных потенциалов:

$$\Phi_k(z) = a_{-2k} z^{-2} + a_{0k} + a_{2k} z^2, \tag{3.1}$$
$$\Psi_k(z) = b_{-4k} z^{-4} + b_{-2k} z^{-2} + b_{0k}, \qquad z \in S_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $a_{-21} = a_{23} = b_{-41} = b_{-21} = 0$. Тогда напряжения в точке $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in S_k$ пластины или заплатки согласно (1.3) находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_r(z)_k &= 2\operatorname{Re} a_{0k} - r^{-2}\operatorname{Re} b_{-2k} + (4r^{-2}\operatorname{Re} a_{-2k} - r^{-4}\operatorname{Re} b_{-4k} - \operatorname{Re} b_{0k})\cos 2\theta + \\
&\qquad + (4r^{-2}\operatorname{Im} a_{-2k} - r^{-4}\operatorname{Im} b_{-4k} + \operatorname{Im} b_{0k})\sin 2\theta, \\
\sigma_\theta(z)_k &= 2\operatorname{Re} a_{0k} + r^{-2}\operatorname{Re} b_{-2k} + (4r^{2}\operatorname{Re} a_{2k} + r^{-4}\operatorname{Re} b_{-4k} + \operatorname{Re} b_{0k})\cos 2\theta + \\
&\qquad + (-4r^{2}\operatorname{Im} a_{2k} + r^{-4}\operatorname{Im} b_{-4k} - \operatorname{Im} b_{0k})\sin 2\theta, \\
\tau_{r\theta}(z)_k &= r^{-2}\operatorname{Im} b_{-2k} + (2r^{2}\operatorname{Im} a_{2k} - 2r^{-2}\operatorname{Im} a_{-2k} + r^{-4}\operatorname{Im} b_{-4k} + \operatorname{Im} b_{0k})\cos 2\theta + \\
&\qquad + (2r^{2}\operatorname{Re} a_{2k} + 2r^{-2}\operatorname{Re} a_{-2k} - r^{-4}\operatorname{Re} b_{-4k} + \operatorname{Re} b_{0k})\sin 2\theta, \qquad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Определим, при каких значениях полярного угла θ напряжения σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ на окружности $|z| = r$ достигают своих экстремальных значений. С этой целью, опустив ради удобства аргументы и индексы у напряжений, запишем формулы (3.2) в виде

$$\sigma_r = \alpha_1 + \operatorname{Re}(c_1\,\mathrm{e}^{2i\theta}), \qquad \sigma_\theta = \alpha_2 + \operatorname{Re}(c_2\,\mathrm{e}^{2i\theta}), \qquad \tau_{r\theta} = \alpha_3 + \operatorname{Im}(c_3\,\mathrm{e}^{2i\theta}),$$

где α_1, α_2, α_3 — не зависящие от полярного угла θ действительные коэффициенты и $c_1 = 4r^{-2}\overline{a_{-2k}} - r^{-4}\overline{b_{-4k}} - b_{0k}$, $c_2 = 4r^2 a_{2k} + r^{-4}\overline{b_{-4k}} + b_{0k}$, $c_3 = 2r^2 a_{2k} + 2r^{-2}\overline{a_{-2k}} - r^{-4}\overline{b_{-4k}} + b_{0k}$. Так как $a_{-21} = a_{23} = b_{-41} = 0$, а остальные неизвестные постоянные a_{2k}, $\overline{a_{-2k}}$, b_{0k}, $\overline{b_{-4k}}$, как видно из формул (2.8), прямо пропорциональны числу Γ' с действительными коэффициентами пропорциональности, то $c_j = d_j \Gamma'$, где d_j — некоторые действительные числа. Следовательно, $\sigma_r = \alpha_1 + d_1|\Gamma'|\operatorname{Re}\mathrm{e}^{i(\arg\Gamma' + 2\theta)}$, $\sigma_\theta = \alpha_2 + d_2|\Gamma'|\operatorname{Re}\mathrm{e}^{i(\arg\Gamma' + 2\theta)}$, $\tau_{r\theta} = \alpha_3 + d_3|\Gamma'|\operatorname{Im}\mathrm{e}^{i(\arg\Gamma' + 2\theta)}$ и на окружности $|z| = r$ напряжения σ_r, σ_θ достигают своих экстремальных значений при полярных углах $\theta_1 = -\arg\Gamma'/2$ и $\theta_2 = (\pi - \arg\Gamma')/2$, а напряжение $\tau_{r\theta}$ — при $\theta_3 = (\pi - 2\arg\Gamma')/4$ и $\theta_4 = -(\pi + 2\arg\Gamma')/4$.

Таким образом, на каждой окружности $|z| = r$ экстремальные значения напряжений достигаются в точках, имеющих одни и те же полярные углы θ_1, θ_2 или θ_3, θ_4, которые не зависят ни от полярного радиуса этих точек, ни от упругих и геометрических параметров пластины и заплатки, а зависят только от $\arg\Gamma'$, т. е. от действующих на бесконечности силовых параметров.

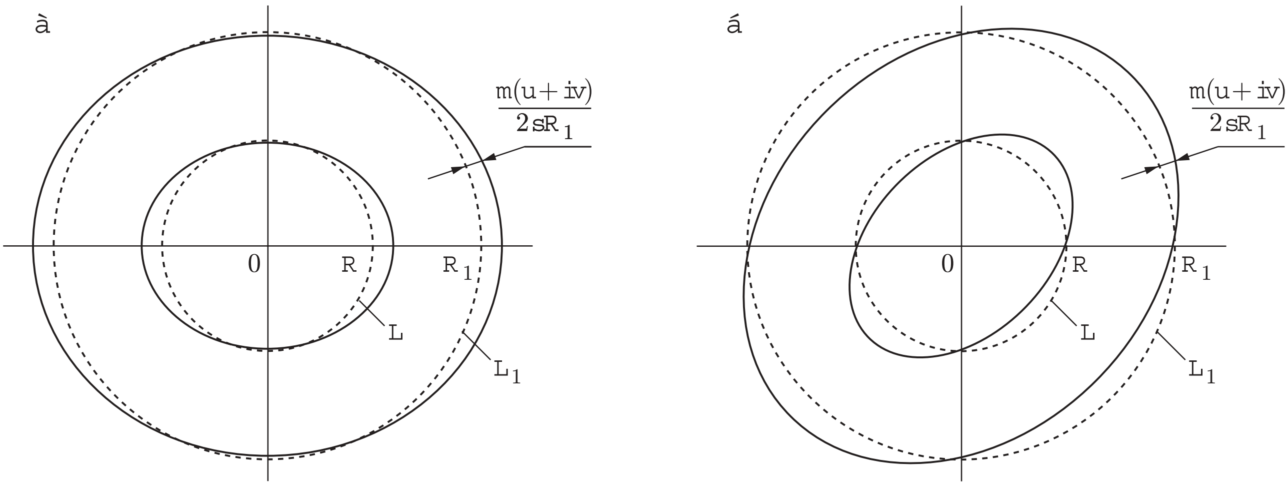

Рис. 1

Далее для нахождения экстремальных значений напряжений в каждой из областей S_k надо в формулах (3.2) положить $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ или $\theta = \theta_3$, $\theta = \theta_4$ и у полученных степенных функций от полярного радиуса r найти экстремальные значения при изменении r в пределах, определяемых выбранной областью S_k.

Для нахождения смещений точек линий L и L_1 воспользуемся формулами

$$(u+iv)(R_1 \,\mathrm{e}^{i\theta}) = \int\limits_0^{R_1} \frac{\partial(u+iv)_1}{\partial r}\,dr + \int\limits_0^{\theta} \frac{\partial(u+iv)_1}{\partial \theta}\,d\theta,$$

$$(u+iv)(R \,\mathrm{e}^{i\theta}) = \int\limits_0^{R_1} \frac{\partial(u+iv)_1}{\partial r}\,dr + \int\limits_{R_1}^{R} \frac{\partial(u+iv)_2}{\partial r}\,dr + \int\limits_0^{\theta} \frac{\partial(u+iv)_2}{\partial \theta}\,d\theta,$$

а также формулами (1.3), (3.1). После элементарных преобразований получим равенства

$$(u+iv)(R_1 \,\mathrm{e}^{i\theta}) = R_1(-(\overline{a_{21}}R_1^2 + \overline{b_{01}})\,\mathrm{e}^{-i\theta} + (æ_1 a_{01} - \overline{a_{01}})\,\mathrm{e}^{i\theta} + æ_1 a_{21} R_1^2 \,\mathrm{e}^{3i\theta}/3)/(2\mu_1),$$

$$(u+iv)(R \,\mathrm{e}^{i\theta}) = R(-(æ a_{-22}R^{-2} + \overline{a_{22}}R^2 + \overline{b_{02}})\,\mathrm{e}^{-i\theta} + (æ a_{02} - \overline{a_{02}} + \overline{b_{-22}}R^{-2})\,\mathrm{e}^{i\theta} +$$

$$+ (æ a_{22}R^2 - 3\overline{a_{-22}}R^{-2} + \overline{b_{-42}}R^{-4})\,\mathrm{e}^{3i\theta}/3)/(2\mu).$$

Примеры. Пусть пластина и заплатка, толщина которой вдвое меньше толщины пластины, имеют упругие постоянные $\mu = 40$ МПа, $\nu = 0{,}37$ и $\mu_1 = 174{,}2$ МПа, $\nu_1 = 0{,}22$ соответственно для Cu и сплава Al_2O_3. Отношение радиусов выреза и заплатки 1:2. На бесконечности на пластину действует только растягивающее напряжение $\sigma_x^\infty = \sigma$ МПа или только сдвигающее напряжение $\tau_{xy}^\infty = \sigma$ МПа (в расчете на единицу толщины пластины). Все остальные исходные силовые параметры нулевые.

На рис. 1 сплошными линиями показаны деформации границ выреза L и заплатки L_1, а пунктирными линиями — исходные положения окружностей L и L_1 до приложения нагрузок. Для наглядности смещения точек линий L и L_1 взяты с коэффициентом $\mu/(2\sigma R_1)$. Рис. 1,*а* соответствует случаю $\sigma_x^\infty \neq 0$, рис. 1,*б* — случаю $\tau_{xy}^\infty \neq 0$.

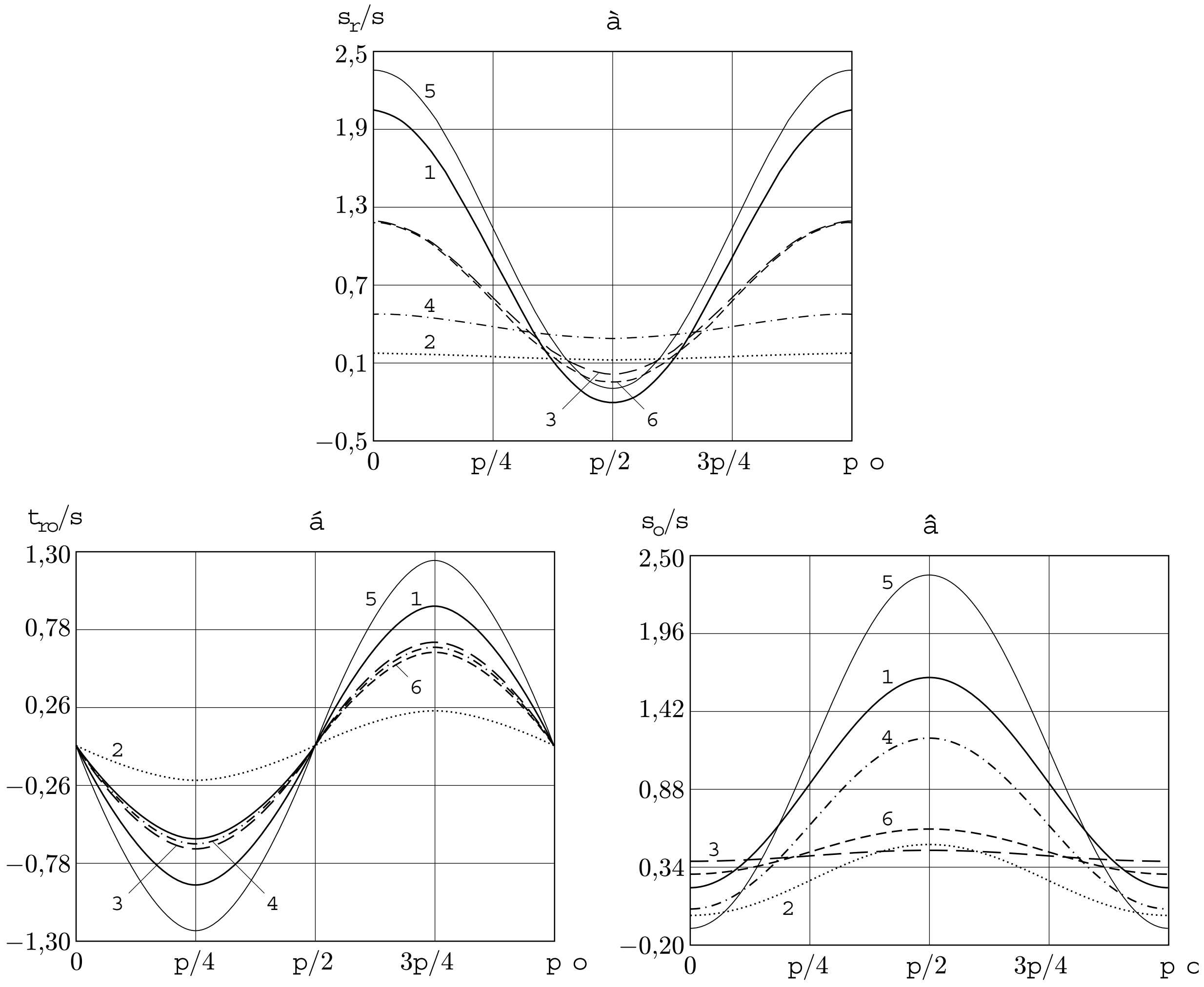

Рис. 2

На рис. 2 для случая приложения к пластине только нагрузки $\sigma_x^\infty = \sigma$ приведены графики напряжений σ_r (рис. 2,*а*), $\tau_{r\theta}$ (рис. 2,*б*) и σ_θ (рис. 2,*в*) на верхней половине линии соединения L_1 как со стороны пластины, так и со стороны заплатки в зависимости от полярного угла θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). На нижней половине линии L_1 ($-\pi \leqslant \theta \leqslant 0$) напряжения распределены симметрично. Здесь и далее на рисунках цифрой *1* обозначены графики напряжений на L_1 со стороны заплатки, цифрами *2* и *3* — графики напряжений соответственно на внутренней и внешней стороне линии L_1 со стороны пластины, цифрой *4* — графики напряжений в случае классической задачи растяжения пластины со свободным от напряжений вырезом $|z| \leqslant R$ под действием отдаленной нагрузки σ_x^∞, цифрами *5* и *6* — графики напряжений на L_1 изнутри и извне соответственно в случае заклеивания кругового выреза радиуса R_1 заплаткой того же радиуса.

Как следует из рис. 2, наличие кругового кольца S_2 в рассматриваемой задаче уменьшает концентрацию напряжений на линии соединения L_1 со стороны заплатки (график *1*) по сравнению со случаем заделки выреза радиуса R_1 заплаткой того же радиуса (график *5*), т. е. S_2 играет роль ребра жесткости.

На рис. 3 представлены графики растягивающего напряжения σ_θ на границе выреза L при $\sigma_x^\infty = \sigma$ (рис. 3,*а*) и $\tau_{xy}^\infty = \sigma$ (рис. 3,*б*). Сплошной линией показаны графики σ_θ на границе выреза при усилении его заплаткой, пунктирной линией — при отсутствии

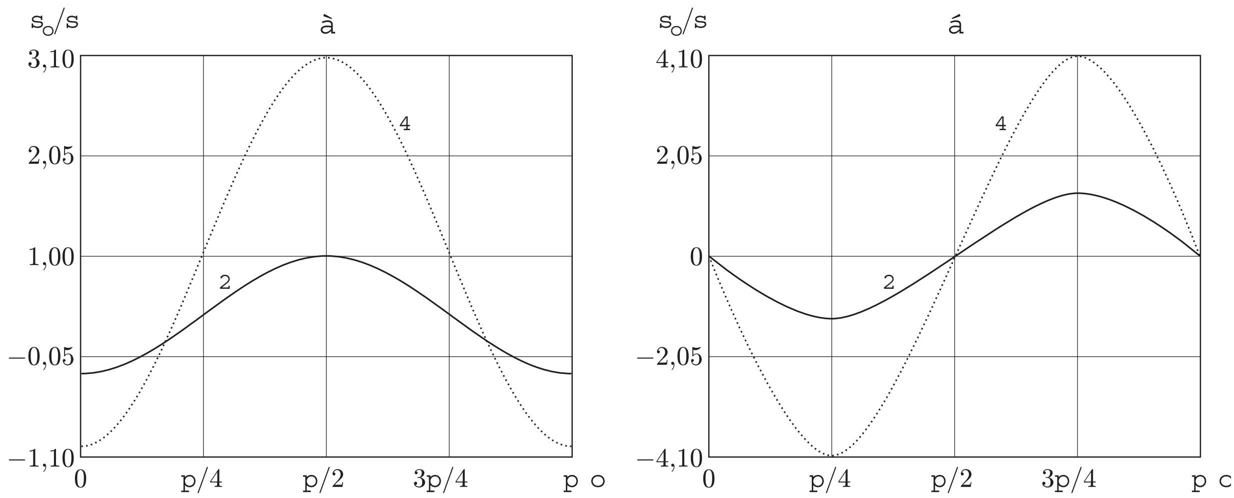

Рис. 3

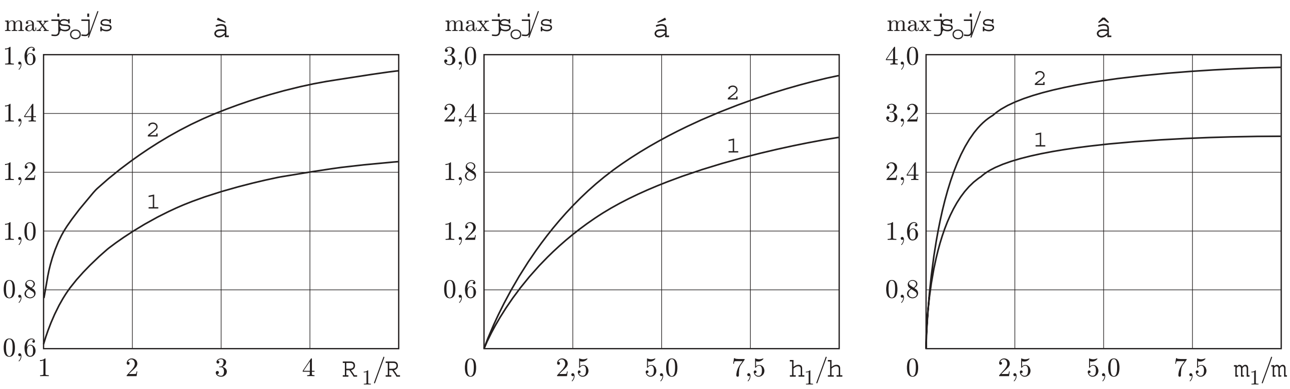

Рис. 4

заплатки. Напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ на L равны нулю априори. Как следует из рисунка, в рассматриваемом примере наличие заплатки уменьшает концентрацию напряжения σ_θ на границе выреза в несколько раз.

На рис. 4 приведены графики максимального по абсолютной величине значения растягивающего напряжения σ_θ в пластине на границе выреза при усилении его заплаткой в зависимости от отношений R_1/R (рис. 4,*а*), h/h_1 (рис. 4,*б*), μ/μ_1 (рис. 4,*в*) — радиусов, толщин и модулей сдвигов заплатки и пластины. Линии *1* на рисунке — графики при нагружении пластины напряжением $\sigma_x^\infty = \sigma$, линии *2* — напряжением $\tau_{xy}^\infty = \sigma$. В отсутствие заплатки $\max|\sigma_\theta|$ на границе выреза равен 3σ при $\sigma_x^\infty = \sigma$ и равен 4σ при $\tau_{xy}^\infty = \sigma$. При $\sigma_x^\infty = \sigma$ максимальное значение $|\sigma_\theta|$ достигается в точках с полярными углами $\theta = \pm\pi/2$, а при $\tau_{xy}^\infty = \sigma$ — в точках с полярными углами $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm 3\pi/4$.

В других постановках задача ремонта пластин с дефектами посредством накладок рассматривается в работах [3–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

2. **Сильвестров В. В., Землянова А. Ю.** Напряженное состояние системы упругих пластин, соединенных вдоль окружности // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республики. 2000. № 4. С. 54–60.
3. **Bardzokas D., Exadaktylos G. E., Anastaselos G.** The effect of stringers and patches on the stress intensities around cracks in the plates // Eng. Frac. Mech. 1996. V. 55. P. 935–955.
4. **Lee K. Y., Kim O. W.** Stress intensity factor for sheet-reinforced and cracked plate subjected to remote normal stress // Eng. Frac. Mech. 1998. V. 61. P. 461–468.
5. **Wang C. H., Rose L. R. F.** Bonded repair of cracks under mixed mode loading // Intern. J. Solids Structures. 1998. V. 35, N 21. P. 2749–2773.

Поступила в редакцию 4/IV 2003 г.,
в окончательном варианте — 23/IX 2003 г.