

УДК 532.59

## СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ СТЕКАНИЯ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Д. Г. Архипов, Д. И. Качулин, О. Ю. Цвелодуб

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск  
Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе, 630090 Новосибирск  
E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассмотрен ряд наиболее известных моделей волнового стекания тонких пленок жидкости по вертикальной плоскости. Для каждой модели проведен анализ линейной устойчивости плоскопараллельного движения. Построены кривые нейтральной устойчивости, дисперсионные соотношения и картины возмущенного течения при различных параметрах задачи. Выявлено, что среди всех моделей первого порядка точности по малому параметру — отношению толщины пленки к длине характерных возмущений — предлагаемая дивергентная система уравнений наиболее адекватно описывает рассматриваемый класс течений.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, свободная поверхность, тонкие пленки, нелинейные волны.

**Постановка задачи.** Изучение процесса стекания пленки жидкости позволяет выявлять закономерности нелинейной волновой динамики. Особенность этого процесса состоит в том, что, с одной стороны, вследствие малости характерных толщин течение жидкости обычно остается ламинарным, а с другой — амплитуда волны в пленке может существенно превышать ее невозмущенное значение. Таким образом, нелинейные эффекты оказывают существенное влияние на волновой процесс.

Полная постановка задачи включает уравнения Навье — Стокса и уравнения неразрывности с соответствующими граничными условиями. При этом возникают существенные затруднения, обусловленные тем, что положение границы заранее неизвестно.

Если не учитывать процессы каплеобразования и осушения, то область, занимаемая жидкостью, будет односвязной. Наличие поверхностного натяжения приводит к отсутствию острых кромок на поверхности пленки. Поэтому если функция  $y = h(x, t)$ , определяющая положение точек границы области, является однозначной, то существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, переводящее область течения жидкости в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = y/h(x, t), \quad t = t. \quad (1)$$

Это преобразование задает свободную границу. Однако новые переменные (1) являются неортогональными, поэтому для них обычная формулировка уравнений движения в векторной форме неприменима. В этом случае можно ограничиться простой заменой переменных в исходных уравнениях без преобразования векторов и тензоров (см., например, [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (грант № 11.G34.31.0035 (ГОУ ВПО “Новосибирский государственный университет”)).

В результате получаются системы уравнений для компонент скорости жидкости в декартовой системе координат. В новой криволинейной системе координат (1) эти компоненты не образуют вектор.

Другой способ выполнения преобразования (1) предполагает использование новых переменных в уравнениях, записанных в тензорной, инвариантной относительно систем координат форме. Однако для этого необходима система уравнений движения жидкости в полном четырехмерном пространстве, где одной из координат является время. В физике такая система известна как система уравнений релятивистской гидродинамики [2]. Тензорные обозначения позволяют переходить в произвольную подвижную систему координат, а применение основной идеи общей теории относительности, в соответствии с которой гравитация не меняет уравнения движения, но влияет на метрику пространства, позволяет решить проблему внешней силы тяжести. Записывая уравнения в новых криволинейных координатах покомпонентно и ограничиваясь первым членом разложения по малому параметру — отношению скорости жидкости к скорости света, с помощью такого подхода в длинноволновом пределе можно получить систему [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{\rho h} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) &= gh + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 1, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = 0.$$

Здесь  $h$  — толщина пленки;  $u, v$  — контравариантные компоненты продольной и поперечной скорости соответственно;  $\sigma$  — поверхностное натяжение;  $\rho$  — плотность;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости. Эта система, описывающая эволюцию длинноволновых возмущений пленки жидкости при умеренных числах Рейнольдса, содержит три неизвестные функции, две из которых зависят от поперечной координаты  $\eta$ . Граничное условие  $v(x, 1, t) = 0$  на свободной поверхности позволяет однозначно определить значение толщины пленки, т. е. является третьим уравнением системы (2). В работе [4] показано, что система (2) эквивалентна системе уравнений пограничного слоя.

Целью данной работы является изучение системы уравнений (2). Введем функцию  $\psi(x, \eta, t)$ , аналогичную гидродинамической функции тока, так чтобы второе уравнение в (2) выполнялось тождественно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = hu, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -hv - \eta \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в первое уравнение системы (2), получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi_\eta^2}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\psi_\eta (\psi_x + \eta h_t)}{h} \right) - \frac{\mu}{\rho h^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} = gh + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (4)$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta}(x, 0, t) = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}(x, 1, t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя характерные масштабы скорости  $u_0$ , длины  $l_0$ , толщины  $h_0$ , времени  $l_0/u_0$  и функции тока  $u_0 h_0$ , уравнение (4) и граничные условия (5) запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta \partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\tilde{\psi}_\eta^2}{\tilde{h}} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\tilde{\psi}_\eta (\tilde{\psi}_{\tilde{x}} + \eta \tilde{h}_{\tilde{t}})}{\tilde{h}} \right) - \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re} \tilde{h}^2} \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial \eta^3} = \\ = \frac{3\tilde{h}}{\varepsilon \operatorname{Re}} + \frac{3^{1/3} \operatorname{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}{\operatorname{Re}^{5/3}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\operatorname{Re} = \rho u_0 h_0 / \mu$  — число Рейнольдса;  $\operatorname{Fi} = \rho \sigma^3 / (g \mu^4)$  — пленочное число;  $\varepsilon = h_0 / l_0$  — отношение характерной толщины пленки к характерной длине волны.

Известно, что при любых значениях числа Рейнольдса задача (6), (7) имеет решение, в котором толщина пленки постоянна. Выберем характерные масштабы  $h_0$  и  $u_0$ , так чтобы для этого безволнового течения выполнялись условия  $\tilde{h} = 1$  и  $\tilde{\psi}(1) = 1$ . Тогда

$$\tilde{\psi}(1) = \frac{\rho g h_0^2}{3 \mu u_0} = 1, \quad u_0 = \frac{\rho g h_0^2}{3 \mu}.$$

Таким образом, постановка задачи завершена.

**Анализ линейной устойчивости невозмущенного течения пленки.** В рамках полной системы уравнений Навье — Стокса задача описания волновых режимов стекающей пленки жидкости имеет следующий вид [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + 3 \right), \\ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \tilde{u} = \tilde{v} = 0, \quad \tilde{y} = 0, \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \tilde{p} = - \frac{3^{1/3} \varepsilon^2 \operatorname{Fi}^{1/3}}{\operatorname{Re}^{5/3} (1 + \varepsilon^2 (\partial \tilde{h} / \partial \tilde{x})^2)^{3/2}} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{2\varepsilon}{\operatorname{Re}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial \tilde{h} / \partial \tilde{x})^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial \tilde{h} / \partial \tilde{x})^2} \right), \quad \tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ 4\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \left( 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) = 0, \quad \tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}). \end{aligned} \quad (8)$$

В случае безволнового стекания слоя жидкости ( $\tilde{h} \equiv 1$ ) только продольная компонента скорости отлична от нуля, при этом она зависит только от поперечной координаты. Тогда система (8) принимает вид

$$\frac{d^2 U_0}{d\tilde{y}^2} = -3, \quad U_0(0) = 0, \quad \frac{dU_0}{d\tilde{y}}(1) = 0.$$

Профиль скорости представляет собой полупараболу, описываемую уравнением

$$U_0 = \frac{3}{2} (2\tilde{y} - \tilde{y}^2).$$

Для исследования устойчивости данного течения к бесконечно малым возмущениям решение системы (8) представим в виде

$$\tilde{u} = U_0 + u', \quad \tilde{v} = v', \quad \tilde{p} = P + p', \quad \tilde{h} = 1 + H',$$

затем введем функцию тока для возмущенной части течения:

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial \tilde{y}}, \quad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial \tilde{x}},$$

и линеаризуем систему (8) относительно возмущений. В результате для функции тока получаем систему уравнений [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{t}} + U_0 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - \frac{dU_0}{d\tilde{y}} \frac{\partial \psi'}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{\partial p'}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^3 \psi'}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial \tilde{y}^3} \right), \\ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} + U_0 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \tilde{x}^2} \right) &= \frac{\partial p'}{\partial \tilde{y}} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^3 \psi'}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{x}} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

с перенесенными на невозмущенный уровень  $\tilde{y} = 1$  граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi' = \frac{\partial \psi'}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{y} = 0, \quad -\frac{\partial \psi'}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial H'}{\partial \tilde{t}} + U_0 \frac{\partial H'}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{y} = 1, \\ \frac{d^2 U_0}{d\tilde{y}^2} H' + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \tilde{y}^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad p' + \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{3^{1/3} \varepsilon^2 \text{Fi}^{1/3}}{\text{Re}^{5/3}} \frac{\partial^2 H'}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \tilde{y} = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как в систему уравнений (9), (10) координата  $\tilde{x}$  и время  $\tilde{t}$  не входят явно, будем искать ее решение в виде

$$\psi' = \varphi(\tilde{y}) \exp[i\tilde{k}(\tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t})], \quad p' = f(\tilde{y}) \exp[i\tilde{k}(\tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t})], \quad H' = H_a \exp[i\tilde{k}(\tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t})],$$

где волновое число  $\tilde{k}$  является вещественным;  $\tilde{c}$  — комплексная фазовая скорость. Если при каких-либо значениях  $\tilde{k}$  мнимая часть фазовой скорости положительна ( $\text{Im}(\tilde{c}) > 0$ ), то имеет место неустойчивость.

Исключая давление из уравнений и граничных условий и используя следующую из кинематического граничного условия связь между  $H_a$  и  $\varphi(1)$ :

$$H_a = \varphi(1)/(\tilde{c} - 3/2),$$

получаем известное уравнение Орра — Зоммерфельда для амплитуды функции тока  $\varphi(y)$

$$\frac{d^4 \varphi}{d\tilde{y}^4} - 2\varepsilon^2 \tilde{k}^2 \frac{d^2 \varphi}{d\tilde{y}^2} + \varepsilon^4 \tilde{k}^4 \varphi = i\varepsilon \tilde{k} \text{Re} \left[ (U_0 - \tilde{c}) \left( \frac{d^2 \varphi}{d\tilde{y}^2} - \varepsilon^2 \tilde{k}^2 \varphi \right) - \frac{d^2 U_0}{d\tilde{y}^2} \varphi \right], \quad (11)$$

удовлетворяющей граничным условиям

$$\varphi(0) = \frac{d\varphi}{d\tilde{y}}(0) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tilde{y}^2}(1) + \left( \varepsilon^2 \tilde{k}^2 - \frac{3}{\tilde{c} - 3/2} \right) \varphi(1) = 0,$$

$$\frac{d^3 \varphi}{d\tilde{y}^3}(1) - i \frac{3^{1/3} \varepsilon^3 \text{Fi}^{1/3} \tilde{k}^3}{\text{Re}^{2/3}(\tilde{c} - 3/2)} \varphi(1) + i\varepsilon \tilde{k} \left( \text{Re} \left( \tilde{c} - \frac{3}{2} \right) + 3i\varepsilon \tilde{k} \right) \frac{d\varphi}{d\tilde{y}}(1) = 0. \quad (13)$$

Значение фазовой скорости  $\tilde{c}$  является собственным числом краевой задачи (11)–(13). При решении этой задачи собственная функция  $\varphi$  представлялась в виде суперпозиции двух решений уравнения (11)

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — линейно независимые решения, на нижней границе удовлетворяющие соответственно условиям

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{d\tilde{y}} = 0, \quad \frac{d^2\varphi_1}{d\tilde{y}^2} = 1, \quad \frac{d^3\varphi_1}{d\tilde{y}^3} = 0, \\ \varphi_2 = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tilde{y}} = 0, \quad \frac{d^2\varphi_2}{d\tilde{y}^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi_2}{d\tilde{y}^3} = 1. \end{aligned}$$

Функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  рассчитывались методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага. Ясно, что каждая из этих функций на нижней границе удовлетворяет условиям (12). Требование выполнения для  $\varphi$  на верхней границе условий (13) приводит к следующим уравнениям для  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} C_1 \left( \frac{d^2\varphi_1}{d\tilde{y}^2} + \left( \varepsilon^2 \tilde{k}^2 - \frac{3}{\tilde{c} - 3/2} \right) \varphi_1 \right) + C_2 \left( \frac{d^2\varphi_2}{d\tilde{y}^2} + \left( \varepsilon^2 \tilde{k}^2 - \frac{3}{\tilde{c} - 3/2} \right) \varphi_2 \right) = 0, \\ C_1 \left( \frac{d^3\varphi_1}{d\tilde{y}^3} - i \frac{3^{1/3} \varepsilon^3 \text{Fi}^{1/3} \tilde{k}^3}{\text{Re}^{2/3}(\tilde{c} - 3/2)} \varphi_1 + i \varepsilon \tilde{k} \left( \text{Re} \left( \tilde{c} - \frac{3}{2} \right) + 3i \varepsilon \tilde{k} \right) \frac{d\varphi_1}{d\tilde{y}} \right) + \\ + C_2 \left( \frac{d^3\varphi_2}{d\tilde{y}^3} - i \frac{3^{1/3} \varepsilon^3 \text{Fi}^{1/3} \tilde{k}^3}{\text{Re}^{2/3}(\tilde{c} - 3/2)} \varphi_2 + i \varepsilon \tilde{k} \left( \text{Re} \left( \tilde{c} - \frac{3}{2} \right) + 3i \varepsilon \tilde{k} \right) \frac{d\varphi_2}{d\tilde{y}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для того чтобы данная система алгебраических уравнений относительно неизвестных  $C_1, C_2$  имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель матрицы коэффициентов был равен нулю. Отсюда следует уравнение для собственного значения фазовой скорости  $\tilde{c}$ , поиск которого осуществлялся методом Ньютона.

Аналогично проведем анализ для системы (6), стационарное решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^3\psi_0}{d\eta^3} = -3, \quad \psi_0(0) = 0, \quad \frac{d\psi_0}{d\eta}(0) = 0, \quad \frac{d^2\psi_0}{d\eta^2}(1) = 0, \\ \psi_0 = \frac{3}{2} \left( \eta^2 - \frac{\eta^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Чтобы исследовать устойчивость данного решения системы (6), добавим к стационарным значениям функции тока и толщины пленки бесконечно малые возмущения

$$\tilde{\psi} = \psi_0(\eta) + \psi'(\tilde{x}, \eta, \tilde{t}), \quad \tilde{h} = 1 + H'$$

и линеаризуем эту систему по  $\psi'(\tilde{x}, \eta, \tilde{t})$  и  $H'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta \partial \tilde{t}} + \frac{d\psi_0}{d\eta} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta \partial \tilde{x}} - \frac{d^2\psi_0}{d\eta^2} \frac{\partial \psi'}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \frac{\partial^3 \psi'}{\partial \eta^3} = \\ = \left( \frac{d\psi_0}{d\eta} + \eta \frac{d^2\psi_0}{d\eta^2} \right) \frac{\partial H'}{\partial \tilde{t}} + \left( \frac{d\psi_0}{d\eta} \right)^2 \frac{\partial H'}{\partial \tilde{x}} + \frac{9H'}{\varepsilon \text{Re}} + \frac{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}{\text{Re}^{5/3}} \frac{\partial^3 H'}{\partial \tilde{x}^3}, \quad (15) \\ \psi'(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) = 0, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial \eta}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \psi'}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2}(\tilde{x}, 1, \tilde{t}) = 0. \end{aligned}$$

Решение (15) будем искать в виде бегущей волны:  $\psi' = \varphi(\tilde{\eta}) \exp[i\tilde{k}(\tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t})]$ ,  $H' = H_a \exp[i\tilde{k}(\tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t})]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi}{d\eta^3} + \varepsilon \operatorname{Re} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \left( i\tilde{c}\tilde{k} - i\tilde{k} \frac{d\psi_0}{d\eta} \right) + i\tilde{k} \frac{d^2\psi_0}{d\eta^2} \varphi \right) = \\ = \left( \varepsilon \operatorname{Re} \left( i\tilde{c}\tilde{k} \left( \frac{d\psi_0}{d\eta} + \eta \frac{d^2\psi_0}{d\eta^2} \right) - i\tilde{k} \left( \frac{d\psi_0}{d\eta} \right)^2 \right) - 9 + i\varepsilon^3 \tilde{k}^3 \frac{3^{1/3} \operatorname{Fi}^{1/3}}{\operatorname{Re}^{2/3}} \right) H_a, \quad (16) \\ \varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\eta}(0) = 0, \quad \varphi(1) = \tilde{c}H_a, \quad \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}(1) = 0. \end{aligned}$$

Для задачи (16) стандартным методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага строились общее решение однородной задачи, удовлетворяющее на нижней границе условиям

$$\varphi_h(0) = 0, \quad \frac{d\varphi_h}{d\eta}(0) = 0,$$

и частное неоднородное решение с однородными граничными условиями на дне

$$\varphi_n(0) = 0, \quad \frac{d\varphi_n}{d\eta}(0) = 0, \quad \frac{d^2\varphi_n}{d\eta^2}(0) = 0.$$

Полное решение задачи представляется в виде суммы

$$\varphi = C_1\varphi_h + \varphi_n,$$

а коэффициент  $C_1$  определяется из динамического условия на свободной поверхности. Фазовая скорость, являющаяся собственным значением системы, находится методом Ньютона с использованием последнего граничного условия  $\varphi(1) = \tilde{c}H_a$ .

Часто моделирование волнового течения пленок жидкости выполняется на основе более простых интегральных моделей. Рассмотрим систему уравнений Шкадова [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{h}} \right) = \frac{3\tilde{h}}{\varepsilon \operatorname{Re}} - \frac{3\tilde{q}}{\varepsilon \operatorname{Re} \tilde{h}^2} + \frac{3^{1/3} \operatorname{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}{\operatorname{Re}^{5/3}} \tilde{h} \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^3}. \quad (17) \end{aligned}$$

В аналогичной модели Руйер-Квила [8] первое уравнение совпадает с первым уравнением системы (17), а второе имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{17}{7} \frac{\tilde{q}}{\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} - \frac{9}{7} \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{h}^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \frac{5}{2\varepsilon \operatorname{Re}} \tilde{h} - \frac{5}{2\varepsilon \operatorname{Re}} \frac{\tilde{q}}{\tilde{h}^2} + \frac{3^{1/3} \operatorname{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}{\operatorname{Re}^{5/3}} \frac{5}{6} \tilde{h} \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^3}. \quad (18)$$

Здесь  $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{t})$  — безразмерный расход пленки в заданном сечении (в случае безволнового течения  $\tilde{q} \equiv 1$ ).

При использовании указанных моделей задача исследования линейной устойчивости невозмущенного течения существенно упрощается. Представляя решение (17) (или (18)) в виде  $\tilde{q} = 1 + q'$ ,  $\tilde{h} = 1 + H'$  и линеаризуя системы по этим бесконечно малым возмущениям, получаем

$$\frac{\partial H'}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial q'}{\partial \tilde{x}} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial \tilde{t}} + \frac{12}{5} \frac{\partial q'}{\partial \tilde{x}} - \frac{6}{5} \frac{\partial H'}{\partial \tilde{x}} = \frac{9H'}{\varepsilon \operatorname{Re}} - \frac{3q'}{\varepsilon \operatorname{Re}} + \frac{3^{1/3} \operatorname{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}{\operatorname{Re}^{5/3}} \frac{\partial^3 H'}{\partial \tilde{x}^3}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{17}{7} \frac{\partial q'}{\partial \tilde{x}} - \frac{9}{7} \frac{\partial H'}{\partial \tilde{x}} = \frac{15H'}{2\varepsilon \text{Re}} - \frac{5q'}{2\varepsilon \text{Re}} + \frac{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}{\text{Re}^{5/3}} \frac{5}{6} \frac{\partial^3 H'}{\partial \tilde{x}^3}. \quad (21)$$

Для решения в виде бегущей волны  $q' = q_a \exp[i\tilde{k}(\tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t})]$ ,  $H' = H_a \exp[i\tilde{k}(\tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t})]$  из уравнения (19) следует  $q_a = \tilde{c}H_a$ . Используя эту связь между амплитудами в уравнениях (20), (21), для моделей (17), (18) соответственно получаем следующие дисперсионные соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{Re} \left( -i\tilde{c}^2\tilde{k} + \frac{12}{5} i\tilde{c}\tilde{k} - \frac{6}{5} i\tilde{k} \right) &= 9 - 3\tilde{c} - \frac{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^3}{\text{Re}^{2/3}} i\tilde{k}^3, \\ \varepsilon \text{Re} \left( -i\tilde{c}^2\tilde{k} + \frac{17}{7} i\tilde{c}\tilde{k} - \frac{9}{7} i\tilde{k} \right) &= \frac{15}{2} - \frac{5\tilde{c}}{2} - \frac{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^3}{\text{Re}^{2/3}} \frac{5}{6} i\tilde{k}^3. \end{aligned}$$

В общем случае эти уравнения нужно решать численно (например, методом Ньютона), однако для нейтрально-устойчивых возмущений ( $\text{Im}(c) = 0$ ) фазовая скорость и волновые числа нетрудно найти аналитически. Выделяя для этого в уравнениях вещественную и мнимую части, получаем

$$\tilde{c} = 3, \quad \tilde{k}_{sh} = \sqrt{\frac{3 \text{Re}^{5/3}}{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}}, \quad \tilde{k}_{rq} = \sqrt{\frac{6}{5} \frac{3 \text{Re}^{5/3}}{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}}. \quad (22)$$

Известно, что в случае малых чисел Рейнольдса ( $\text{Re} \approx 1$ ) задачу о волновых режимах течения пленки можно свести к одному уравнению для ее толщины, которое в модели Гевика имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + 3\tilde{h}^2 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon \text{Re} \left( \frac{36}{5} \tilde{h}^5 \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \frac{6}{5} \tilde{h}^6 \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \\ + \frac{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^3}{\text{Re}^{2/3}} \tilde{h}^2 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{3^{-2/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^3}{\text{Re}^{2/3}} \tilde{h}^3 \frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Если ограничиться случаем малых, но конечных возмущений, то из (23) следует уравнение с квадратичной нелинейностью, в настоящее время широко известное как уравнение Курамото — Сивашинского. Для пленочных течений это уравнение было получено А. А. Непомнящим [10].

В пределе линейных возмущений уравнения (20), (21) имеют вид

$$\frac{\partial H'}{\partial \tilde{t}} + 3 \frac{\partial H'}{\partial \tilde{x}} + \frac{6\varepsilon \text{Re}}{5} \frac{\partial^2 H'}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{3^{-2/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^3}{\text{Re}^{2/3}} \frac{\partial^4 H'}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \quad (24)$$

Из (24) следует дисперсионное соотношение

$$-i\tilde{c}\tilde{k} + 3i\tilde{k} - \frac{6\varepsilon \text{Re}}{5} \tilde{k}^2 + \frac{3^{-2/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^3}{\text{Re}^{2/3}} \tilde{k}^4 = 0,$$

из которого в случае нейтральных возмущений находим

$$\tilde{c} = 3, \quad \tilde{k}_{gj} = \tilde{k}_{rq} = \sqrt{\frac{6}{5} \frac{3 \text{Re}^{5/3}}{3^{1/3} \text{Fi}^{1/3} \varepsilon^2}}. \quad (25)$$

**Результаты анализа.** Представляет интерес сравнение результатов исследования линейной устойчивости невозмущенного течения с использованием приведенных выше моделей. При фиксированных свойствах жидкости (в настоящей работе в качестве рабочей жидкости была выбрана вода при нормальных условиях, в этом случае  $\text{Fi} = 3,94 \cdot 10^{10}$ )

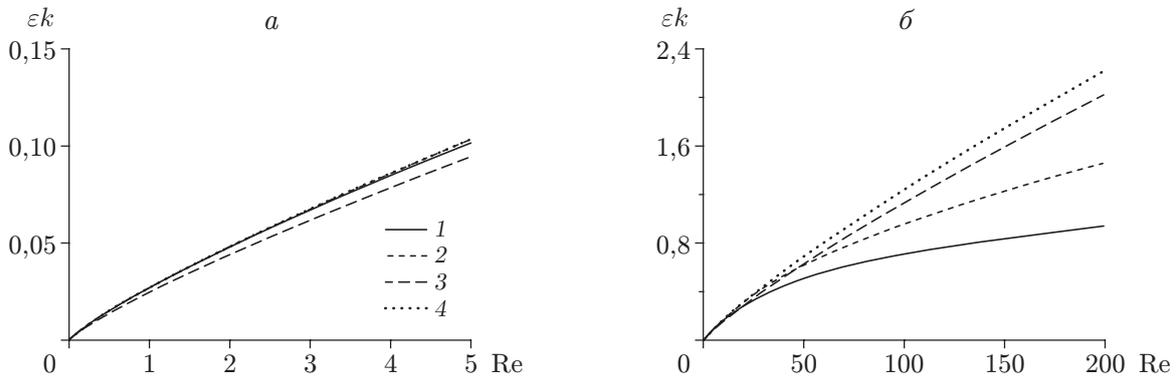


Рис. 1. Нейтральные кривые устойчивости в областях малых (*а*) и больших (*б*) чисел Рейнольдса для воды, рассчитанные по различным моделям: 1 — уравнение Орра — Зоммерфельда, 2 — предлагаемая система уравнений, 3 — система Шкадова, 4 — система Руйер-Квила (уравнение Непомнящего)

в данной задаче имеется только два независимых параметра: число Рейнольдса и волновое число возмущений. На рис. 1 для всех рассматриваемых моделей, а именно уравнения Орра — Зоммерфельда, системы уравнений (4), (5), системы Шкадова и эквивалентного ей в линейном приближении двухволнового уравнения Алексеенко — Накорякова [11], системы Руйер-Квила и уравнений Гевика и Непомнящего (Курамото — Сивашинского), на плоскости  $(Re, \varepsilon k)$  приведены нейтральные кривые, ограничивающие области неустойчивости сверху. Видно, что при малых числах Рейнольдса результаты расчетов по всем моделям хорошо согласуются. Нейтральные кривые для всех моделей (за исключением кривых, полученных для системы (19), (20)) совпадают с графической точностью. Нейтральная кривая системы (19), (20) лежит ниже остальных кривых.

При увеличении числа Рейнольдса наиболее близко расположенной к нейтральной кривой, полученной в полной постановке задачи Орра — Зоммерфельда (11)–(13), оказалась нейтральная кривая для системы (16). При значениях числа Рейнольдса ( $Re \approx 150$ ) величина отклонения этой кривой от кривой, соответствующей точному решению, почти в два раза меньше величины отклонения аналогичной кривой для системы (19), (20). При больших числах Рейнольдса наибольшее различие с точным решением наблюдается для моделей Непомнящего (24) и Руйер-Квила (18). Для модели Непомнящего (24) это различие обусловлено тем, что ее область применимости ограничена малыми значениями числа Рейнольдса. В данной работе исследуются только модели первого порядка по параметру длины волны, поэтому результаты анализа устойчивости систем более высоких порядков, например модифицированной модели Руйер-Квила [8], не приводятся.

На рис. 2 представлены зависимости дисперсионных характеристик, а также инкрементов роста возмущений от волновых чисел для воды при  $Re = 1, 10, 100$ . Видно, что при всех значениях  $Re$  наиболее хорошо результаты решения задачи в полной постановке (задачи Орра — Зоммерфельда (11)–(13)) согласуются с результатами расчетов по уравнениям (16). В то же время, поскольку система (16) выведена с учетом членов только первого порядка по малому параметру, при больших значениях волнового числа ее решение существенно отличается от точного решения. Этот вывод согласуется с результатами, полученными в работе [12].

Также представляет интерес определение адекватности описания картины возмущенного течения с помощью рассматриваемых систем. Ясно, что при решении линейной краевой задачи собственные функции определяются с точностью до произвольного множителя. Для уравнения Орра — Зоммерфельда (11)–(13) собственные функции, соответствующие

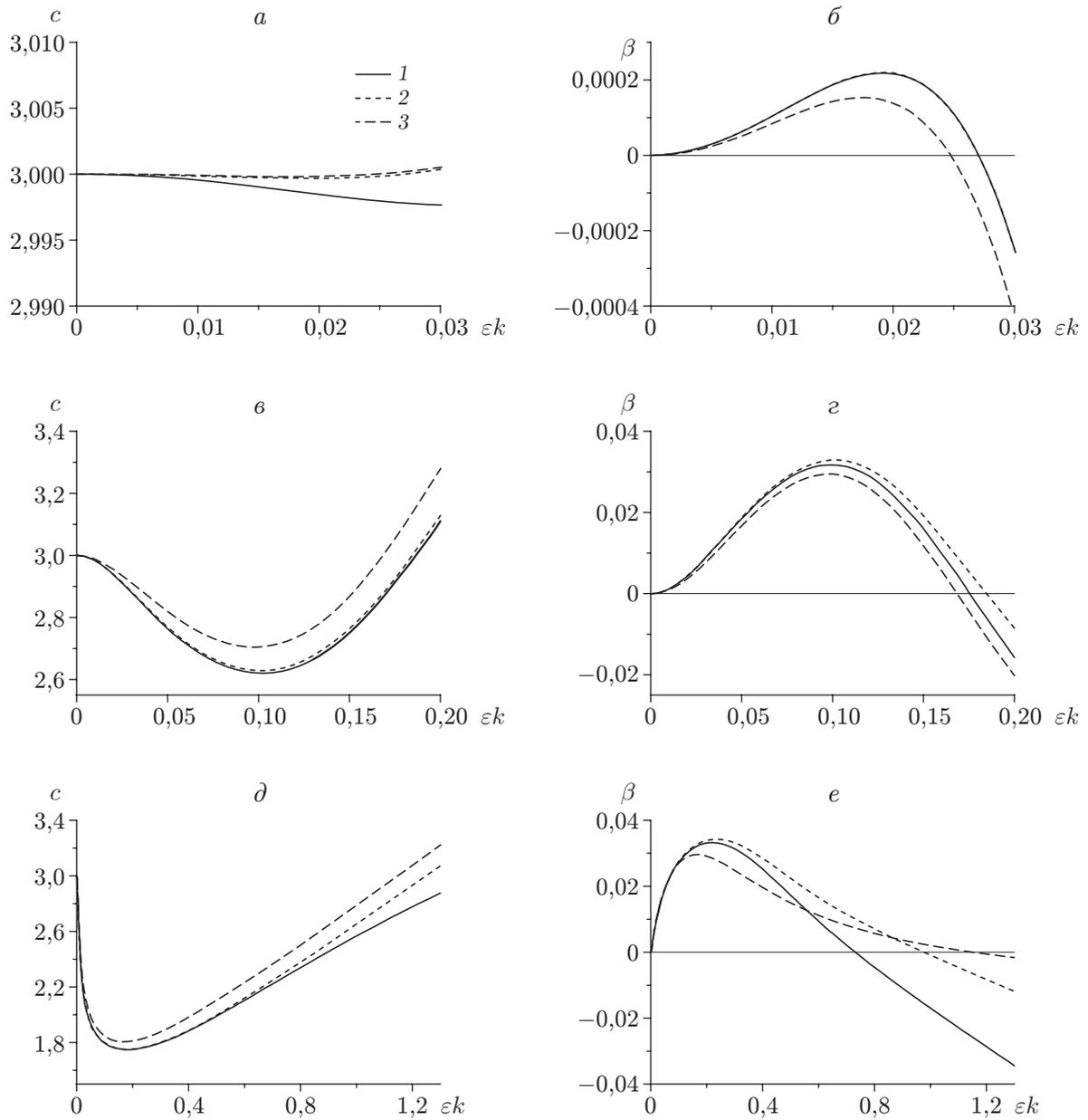


Рис. 2. Дисперсионные кривые (*a*, *в*, *д*) и инкременты роста волн (*б*, *г*, *е*) для воды, полученные с использованием различных моделей: *a*, *б* —  $Re = 1$ , *в*, *г* —  $Re = 10$ , *д*, *е* —  $Re = 100$ ; 1 — уравнение Орра — Зоммерфельда, 2 — предлагаемая система уравнений, 3 — система Шкадова

полученному значению фазовой скорости, находятся непосредственно после определения коэффициентов в системе (14) с кинематическим условием  $\varphi(1) = (\tilde{c} - 3/2)H_a$ . Без ограничения общности можно положить  $H_a = 1$ . Аналогичную нормировку будем использовать при вычислении функции тока для системы (16). При этом необходимо учитывать криволинейность системы координат:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{3}{2} \left( \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{h}^2(\tilde{x}, \tilde{t})} - \frac{\tilde{y}^3}{3\tilde{h}^3(\tilde{x}, \tilde{t})} \right) + \psi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{\tilde{y}^2}{(1 + H'(\tilde{x}, \tilde{t}))^2} - \frac{\tilde{y}^3}{3(1 + H'(\tilde{x}, \tilde{t}))^3} \right) + \psi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \\ &= \frac{3}{2} \left( \tilde{y}^2 - \frac{\tilde{y}^3}{3} \right) - \frac{3}{2} H'(\tilde{x}, \tilde{t}) (2\tilde{y}^2 - \tilde{y}^3) + \psi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}). \quad (26)\end{aligned}$$

Возмущение поля скорости определяется в результате непосредственной подстановки (26) в первое уравнение системы (3):

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})} \frac{\partial \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})}{\partial \tilde{y}} = \\ &= \frac{3}{2} (2\tilde{y} - \tilde{y}^2) - \frac{3}{2} H'(\tilde{x}, \tilde{t}) (4\tilde{y} - 3\tilde{y}^2) + \frac{\partial \psi_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})}{\partial \tilde{y}}.\end{aligned}$$

Аналогично для системы Шкадова имеем

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{3\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{t})}{2\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})} \left( \frac{2\tilde{y}}{\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})} - \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{h}^2(\tilde{x}, \tilde{t})} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1 + \tilde{c}H'(\tilde{x}, \tilde{t})}{1 + H'(\tilde{x}, \tilde{t})} \left( \frac{2\tilde{y}}{1 + H'(\tilde{x}, \tilde{t})} - \frac{\tilde{y}^2}{(1 + H'(\tilde{x}, \tilde{t}))^2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} (2\tilde{y} - \tilde{y}^2) + 3(\tilde{c} - 2)\tilde{y}H'(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{3}{2} (3 - \tilde{c})H'(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{y}^2.\end{aligned}$$

На рис. 3 показаны профили возмущений продольной компоненты скорости, построенные при  $Re = 100$  с использованием модели Орра — Зоммерфельда, системы (16) и

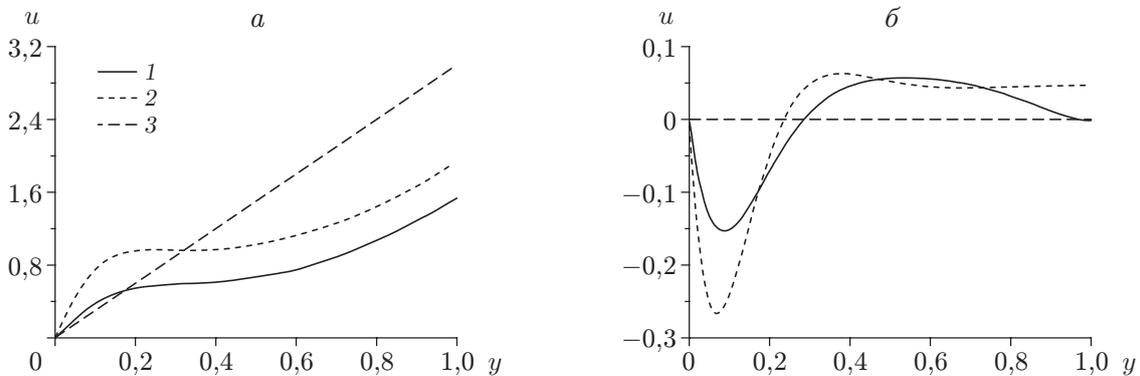


Рис. 3. Профили возмущений продольной компоненты скорости, построенные при  $Re = 100$  в сечениях гребня волны (а) и узловых точках (б) по различным моделям: 1 — уравнение Орра — Зоммерфельда, 2 — предлагаемая система уравнений, 3 — система Шкадова для нейтрально-устойчивых возмущений

системы Шкадова (19), (20) для нейтрально-устойчивых возмущений в сечениях гребня волны и в узловых точках. Имеет место соответствие между результатами расчетов по системе (16) и точным решением, в то время как система (19), (20) предсказывает качественно неверную картину возмущенного течения.

Таким образом, среди всех моделей первого порядка точности по малому параметру — отношению толщины пленки к длине характерных возмущений — предлагаемая дивергентная система уравнений наиболее адекватно описывает рассматриваемый класс течений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Гешев П. И., Ездин Б. С.** Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости // Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной поверхностью: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1985. С. 49–57.
2. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
3. **Алексеев С. В., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю.** Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 1. С. 43–46.
4. **Arkhipov D., Tsvlodub O.** Investigation of the divergent system of equations for a vertically flowing liquid film // Microgravity Sci. Tech. 2011. V. 23. P. S123–S128.
5. **Trifonov Yu. Ya., Tsvlodub O. Yu.** Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. Pt 1. Waves of the first family and their stability // J. Fluid Mech. 1991. V. 229. P. 531–554.
6. **Yih C. S.** Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6, N 3. P. 321–334.
7. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. Т. 2, № 1. С. 43–51.
8. **Ruyer-Quil C., Manneville P.** Improved modeling of flows down inclined planes // Europ. Phys. J. B. 2000. V. 15. P. 357–369.
9. **Gjevik B.** Occurrence of finite amplitude surface waves on falling liquid films // Phys. Fluids. 1970. V. 13, N 8. P. 1918–1925.
10. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. Т. 9, № 3. С. 28–34.
11. **Алексеев С. В.** Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеев, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
12. **Chang H. C., Demekhin E. A., Kopelevich D. I.** Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 433–480.

*Поступила в редакцию 30/IX 2011 г.,  
в окончательном варианте — 2/II 2012 г.*