

17. Гухман А. А., Пильохин Н. В. и др. Экспериментальное исследование теплообмена и сопротивления в дозвуковой области. — Тр. ЦКТИ, 1951, вып. 5, № 24.
 18. Pinkel B. A summary of NACA research on heat transfer and friction for air flowing through tube with large temperature difference. — Trans. ASME, 1954, vol. 76, N 2.
 19. Humble L. V., Lowdermilk W. H., Desmon L. G. Measurements of average heat-transfer and friction coefficients for subsonic flow of air in smooth tubes at high surface and fluid temperatures. NACA Report, 1950, N 1020.

УДК 533.6.011.6

К РАСЧЕТУ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВДУВЕ ОДНОРОДНОГО ГАЗА В КОРМОВОЙ ОБЛАСТИ ТЕЛА

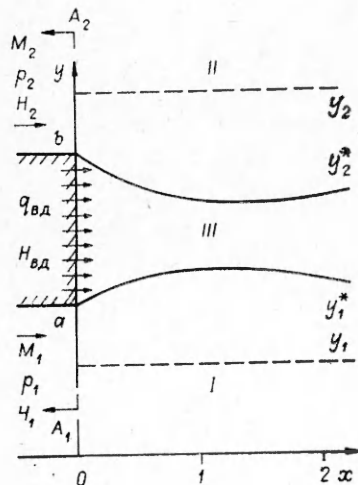
И. С. Белоцерковец, В. И. Тимошенко

(Днепропетровск)

Задача о вдуве в донную область за плохообтекаемыми телами рассматривалась в различных постановках, в случае вдува малой интенсивности эта задача решалась в рамках модели разделяющей линии тока [1]. Влияние сверхзвукового вдува газа на характеристики течения в сверхзвуковых спутных потоках исследовано в [2—4]. В данной работе изложен подход и результаты решения задачи о дозвуковом вдуве конечной интенсивности однородного газа в кормовой области тела в сверхзвуковом потоке.

Анализ экспериментальных данных (см., например, [5]) показывает, что в определенном диапазоне изменения интенсивности вдува распределение давления вдоль вязкой области незначительно отличается от значения давления в невозмущенном потоке перед донным срезом. В этом диапазоне течение во вдуваемой дозвуковой струе и зонах смешения можно описать в приближении узкого канала. Это приближение используется в решении задач о расчете течений через сопла с плавным наклоном стенок [6, 7]. С другой стороны, при расчете отрывных стационарных течений с развитыми циркуляционными зонами [8] для описания течения в области горла следа обычно используют уравнения пограничного слоя. Наличие вдува оказывает существенное влияние на структуру течения в донной области. Увеличение интенсивности вдува уменьшает размеры циркуляционной области [9] и повышает донное давление. Это приводит к расширению области течения в окрестности горла, обычно описываемой в приближении пограничного слоя. При определенной интенсивности вдува циркуляционная область полностью исчезает, что создает возможность использовать уравнения пограничного слоя для описания течения во всей вязкой области непосредственно от кромки донного среза.

1. Рассмотрим двумерное течение, образующееся при взаимодействии двух сверхзвуковых потоков, обтекающих донный срез, через торцевую стенку которого осуществляется распределенный дозвуковой вдув газа конечной интенсивности. Газ в сверхзвуковых потоках и во вдуваемой струе будем считать совершенным и однородным с постоянными удельными теплоемкостями. Температуры торможения в потоках и струе в общем случае могут быть различными. Течение в окрестности донного среза обычным образом разобьем на невязкие области внешних сверхзвуковых потоков и область «вязкого» течения, под которой будем понимать потенциальное ядро вдуваемой струи и зоны смешения, переходящие в вязкое течение ближнего следа. Влияние вязкости на характеристики невязких потоков будем учитывать через эффективное тело вытеснения [10]. Идеализированная картина рассматриваемого течения представлена на фиг. 1, где I, II — области невязкого течения, III — область «вязкого» течения, y_1, y_2 — асимптотические границы «вязкой» области, y_1^*, y_2^* — границы эффективного тела вытеснения. Характеристики невязких невозмущенных потоков в сечении донного среза $A_1 A_2$ полагаются известными. Значе-



Ф и г. 1

ния газодинамических параметров в областях невязких эквивалентных потоков находятся в результате интегрирования уравнений Эйлера. Течение в «вязкой» области будем описывать сквозным образом уравнениями пограничного слоя. В цилиндрической системе координат эти уравнения в безразмерных переменных

$$\bar{x} = x/R_*, \quad \bar{y} = y/R_*, \quad \bar{u} = u/U_*, \quad \bar{v} = v/U_*, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_*, \quad \bar{H} = H/U_*^2, \quad \bar{T} = T/T_*, \quad \bar{p}_e = p_e/(\rho_* U_*^2), \quad \bar{\mu} = \mu/\mu_*, \quad \text{Re}_* = \rho_* U_* R_*/\mu_*,$$

дополненные уравнением состояния и соотношением для коэффициента вязкости, запишем в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} (y^j \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^j \rho v) = 0;$$

$$(1.2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{\text{Re}_* y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right];$$

$$(1.3) \quad \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}_* y^j} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) y^j \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\};$$

$$(1.4) \quad p_e = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho h,$$

где $j = 0$ соответствует плоскому случаю, $j = 1$ — осесимметричному. Здесь приняты следующие обозначения: u, v, ρ, p_e, h, μ — продольная и поперечная составляющие скорости, плотность, давление, статическая энтальпия, коэффициент вязкости соответственно; $H = u^2/2 + h$; $\gamma = c_p/c_v - \text{const}$; Pr — число Прандтля, Re — число Рейнольдса. При записи системы уравнений (1.1)–(1.4) черточки над безразмерными параметрами опущены; индексом * отмечены характерные значения параметров, по которым производится обезразмеривание, а индексом e — значения параметров на границах невязких эквивалентных потоков.

Система уравнений (1.1)–(1.4) решается при следующих граничных условиях:

$$u = u_{ek}, \quad H = H_{ek} \quad \text{при} \quad y = y_k, \quad k = 1, 2.$$

Значение $k = 1$ соответствует граничному условию на нижней границе «вязкой» области, $k = 2$ — на верхней. Для симметричной «вязкой» области граничные условия на нижней границе запишем в виде

$$\partial u / \partial y = \partial H / \partial y = v = 0, \quad y = y_1 \equiv 0.$$

В общем случае несимметричной «вязкой» области граничное условие для поперечной составляющей скорости существенным образом зависит от выбора эффективного тела, стыковки решений между областями и будет оговорено ниже.

Начальные условия для системы уравнений (1.1)–(1.4) задаются в сечении донного среза в виде

$$(1.5) \quad u(0, y) = u_0(y), \quad H(0, y) = H_0(y).$$

Выражения (1.5) учитывают как неравномерность параметров в струе, так и наличие начального пограничного слоя. Распределение давления $p_e(x)$ определяется в результате решения задачи о взаимодействии течения в «вязкой» области с внешними эквивалентными невязкими потоками. Границы тела вытеснения определим следующим образом:

$$(1.6) \quad y_k^{*j+1} = y_{mk}^{j+1} + (1 + j) \int_{y_{mk}}^{y_k} \left(1 - \frac{\rho u}{\hat{r}_{ek} v_{ek}} \right) y^j dy, \quad k = 1, 2,$$

где y_{mk} — линии тока постоянных масс, отделяющие массу газа, поступающую в донную область в результате вдува, от всей массы, захватываемой «вязкой» областью. Для того чтобы исключить неизвестную величину y_{mk} , входящую в определение границы тела вытеснения (1.6), проинтегрируем уравнение неразрывности поперек вязкой области в пределах $[y_{mk}, y_k]$:

$$(1.7) \quad \frac{1}{\rho_{ek} u_{ek}} \frac{d}{dx} \int_{y_{mk}}^{y_k} \rho u y^j dy = y_k^j \left(\frac{dy_k}{dx} - \operatorname{tg} \theta_k \right), \quad k = 1, 2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{v}{u}.$$

При записи (1.7) учтено, что $y_{mk}(x)$ — линия тока, следовательно, вдоль нее $dy_{mk}/dx = \operatorname{tg} \theta_{mk}$.

Комбинируя (1.6), (1.7) и используя принятое допущение узкого канала $\partial p / \partial y = 0$, получим соотношение, связывающее угол наклона вектора скорости эквивалентного вязкого потока с границей тела вытеснения и градиентом давления:

$$(1.8) \quad y_k^j \operatorname{tg} \theta_k = y_k^{*j} \frac{dy_k^*}{dx} - \frac{y_k^{*j+1} - y_k^{*j+1}}{j+1} \frac{M_{ek}^2 - 1}{M_{ek}^2} \frac{1}{\gamma p_e} \frac{dp_e}{dx}, \quad k = 1, 2.$$

Будем рассматривать (1.8) как систему уравнений относительно неизвестных функций $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $p_e(x)$. Для вывода третьего замыкающего уравнения преобразуем (1.1) согласно [11] к виду

$$(1.9) \quad \frac{\partial}{\partial y} (y^j \operatorname{tg} \theta) + \frac{1}{\gamma p_e} \frac{dp_e}{dx} \frac{M^2 - 1}{M^2} y^j + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p_e \operatorname{Re}_*} \frac{1}{u} \left\{ \frac{h}{u} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \frac{\mu}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right] - y^j \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} = 0, \quad M = \frac{u}{a}$$

и проинтегрируем (1.9) поперек «вязкой» области. Получим

$$(1.10) \quad \gamma p_e (y_2^j \operatorname{tg} \theta_2 - y_1^j \operatorname{tg} \theta_1) + B \frac{dp_e}{dx} + A = 0.$$

Величины A , B имеют вид

$$A = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma \operatorname{Re}_*} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{u} \left\{ \frac{h}{u} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \frac{\mu}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right] - y^j \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dy,$$

$$B = \int_{y_1}^{y_2} \frac{M^2 - 1}{M^2} y^j dy.$$

Исключим из (1.8), (1.10) $\operatorname{tg} \theta_1$ и $\operatorname{tg} \theta_2$, записав полученное уравнение относительно dp_e/dx :

$$(1.11) \quad \frac{dp_e}{dx} = \frac{\gamma p_e \left(y_2^{*j} \frac{dy_2^*}{dx} - y_1^{*j} \frac{dy_1^*}{dx} \right) + A}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{1}{(1+j)} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2} \right) y^{j+1} dy - \frac{M_{e2}^2 - 1}{M_{e2}^2} y_2^{*j+1} + \frac{M_{e1}^2 - 1}{M_{e1}^2} y_1^{*j+1} \right].$$

Уравнение (1.11) не зависит от выбора асимптотических границ «вязкой» области y_1 , y_2 , так как производные от газодинамических параметров в вязкой зоне в принятом приближении стремятся к нулю при $y \rightarrow y_1, y_2$ [8, 10].

Прежде чем формулировать задачу вязко-невязкого взаимодействия, остановимся более подробно на задании граничных условий для поперечной составляющей скорости при $y = y_1 \neq 0$. В этом случае при заданных $y_1, y_1^*, dp_e/dx$ составляющая скорости v определится из (1.8) при $k = 1$ и $v = u \operatorname{tg} \theta$. Изменение v поперек «вязкой» области находится в результате интегрирования уравнения первого порядка (1.11). Условие для поперечной составляющей скорости, вытекающее из (1.8) при $k = 2$, будет выполняться автоматически при dp_e/dx , определенном из соотношения (1.11).

Уравнение (1.11) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестных функций p_e, y_1^*, y_2^* . Недостающие два уравнения получаются в результате определения течения в невязких сверхзвуковых эквивалентных потоках. В общем случае решение уравнений Эйлера позволяет получить функциональные зависимости:

$$(1.12) \quad f_k \left(p_e, \frac{dy_k^*}{dx} \right) = 0, \quad k = 1, 2.$$

В случае, если внешнее сверхзвуковое течение описывается решением для простой волны, функциональные зависимости (1.12) имеют вид соотношений Прандтля — Майера:

$$(1.13) \quad \left[1 + \left(\frac{dy_k^*}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \frac{d^2 y_k^*}{dx^2} = (-1)^k \frac{\sqrt{M_{ek}^2 - 1}}{M_{ek}^2} \frac{1}{\gamma p_e} \frac{dp_e}{dx}, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, система трех дифференциальных уравнений (1.11), (1.12) или (1.11), (1.13) для случая простой волны полностью определяет течение взаимодействия. Эту систему в дальнейшем будем называть системой уравнений вязко-невязкого взаимодействия.

Система уравнений вязко-невязкого взаимодействия обладает особенностью, связанной с обращением в нуль в некотором сечении вниз по потоку определителя Δ . Численное исследование особой точки в широком диапазоне параметров показывает, что эта точка соответствует типу «седло». Аналогичные особые точки возникают в задачах отрывных течений с развитыми циркуляционными зонами, исследуемых в рамках интегрального метода уравнений пограничного слоя [8], а также течений в соплах, например [7, 12]. В этих работах подробно описаны методы прохождения особой точки, которые могут быть использованы в данном исследовании.

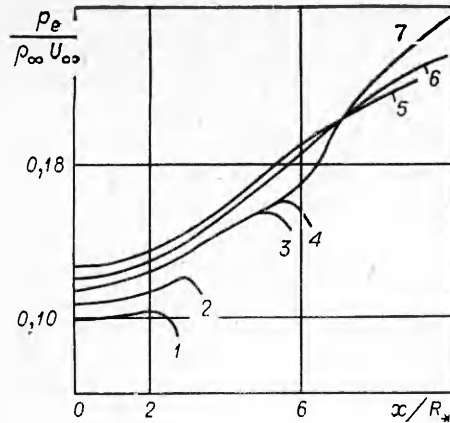
2. В качестве примера применения описанного метода к расчету вязко-невязкого взаимодействия и исследования влияния вдува конечной интенсивности на характеристики течения в донной области рассматривалась задача расчета течения за полубесконечной пластиной конечной ширины R_* , обтекаемой равномерными сверхзвуковыми потоками. Через донную поверхность пластины осуществляется дозвуковой вдув газа, интенсивность которого достаточна, чтобы в «вязкой» области не образовались зоны возвратно-циркуляционного течения. Исследование ограничивалось случаем отрыва внешних потоков с кромок донного среза и нулевой начальной толщины пограничного слоя. Распределение параметров во внешних невязких невозмущенных потоках полностью определялось заданием чисел Маха M_1, M_2 , статических давлений p_1, p_2 , полных энтальпий H_1, H_2 в сечении среза. Невязкие эквивалентные потоки, обтекающие эффективное тело, описывались решением Прандтля — Майера для простой волны. Газ во внешних потоках и струе принимался совершенным с $\gamma = 1,4$ и постоянным числом Прандтля $\operatorname{Pr} = 0,72$. Для коэффициента молекулярной вязкости был выбран степенной закон $\mu/\mu_* = (T/T_*)^\omega$, показатель степени ω в котором полагался равным 0,5. Начальные условия для системы уравнений (1.1) — (1.4) задавались в сечении донного среза в виде параметрического семейства от величины донного давления $p_d = p_e(x = 0)$:

$$u_c = \begin{cases} \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \frac{H_1}{H_2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_1^2} \left(1 - \left(\frac{p_D}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, & H_c = \begin{cases} H_1, & y < a, \\ H_{вд}, & a \leq y \leq b, \\ H_2, & y > b. \end{cases} \\ \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_D}{q_{вд}} \right)^2 + 2H_{вд} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_D}{q_{вд}}, \\ \left[1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_2^2} \left(1 - \left(\frac{p_D}{p_2} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

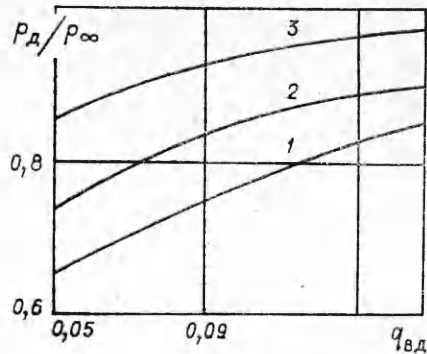
Здесь a, b — ординаты кромок донного среза, $b = a + R_*$; $q_{вд}$ — интенсивность вдува, определяется как $q_{вд} = \frac{Q}{\rho_* U_*^2 R_*}$, где Q — массовый

расход вдуваемого газа; $H_{вд}$ — полная энтальпия вдуваемой струи. Интегрирование уравнений пограничного слоя, описывающих течение в «вязкой» области, осуществлялось численно с использованием четырехточечной неявной разностной схемы [13], а интегрирование системы вязко-невязкого взаимодействия (1.11), (1.13) проводилось по схеме Эйлера [14]. Алгоритм расчета течения состоял в определении особой интегральной кривой системы уравнений вязко-невязкого взаимодействия. Вследствие того, что характеристики течения в «вязкой» области непрерывным образом зависят от начальных данных, выбор той или иной интегральной кривой полностью определяется заданием значения свободного параметра p_D . Подбором этого параметра осуществляется процесс нахождения особой интегральной кривой.

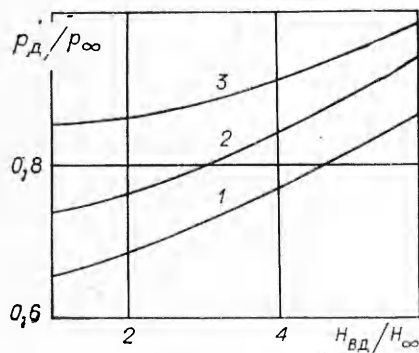
Результаты проведенных расчетов представлены на фиг. 2—5. Во всех расчетах шаг интегрирования системы уравнений пограничного слоя выбирался равным 0,025, а количество расчетных узлов в поперечном направлении — равным 51. Типичная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки при симметричном изоэнергетическом обтекании пластины изображена на фиг. 2, где кривые 1—7 соответствуют значениям $p_D/p_\infty = 0,55; 0,60; 0,65; 0,65078; 0,70; 0,675; 0,65156$. Значения характерных параметров течения следующие: $a = -1, b = 1, M_1 = M_2 = M_\infty = 2,0, H_1 = H_2 = H_{вд} = 0,5 + 1/((\gamma-1)M_\infty^2), p_1 = p_2 = 1/(\gamma M_\infty^2), q_{вд} = 0,05, Re_\infty = 500$. Результаты расчетов влияния интенсивности вдува на донное давление при $Re_\infty = 500; 1000; 5000$ (кривые 1—3 соответственно), выполненные при прежних значениях определяющих параметров, отражены на фиг. 3. На фиг. 4 при тех же значениях Re_∞ представлено влияние неизоэнергетичности течения, обусловленной вдувом горячего газа, на донное давление. Течение предполагается симметричным. Из фиг. 3, 4 видно, что увеличение интенсивности вдува и повышение температуры вдуваемого газа приводит к росту донного давления при различных значениях чисел Рейнольдса. Влияние интенсивности вдува при несимметричном обтекании пластины показано на фиг. 5, где кривые 1, 2 соответствуют $Re_\infty = 500; 1000$. Значения характерных параметров следующие: $a = 0,5, b = 1, M_1 = 3,0, M_2 = 2,0, H_1 = H_2 = H_{вд} = 0,5 + ((\gamma-1)M_2^2)^{-1}, p_1 = p_2 = 1/(\gamma M_2^2)$. Как видно из фиг. 5, возрастание скорости истечения одного из потоков приводит к увеличению массы газа, эжектируемой потоками из струи, что ведет к понижению донного давления по сравнению со случаем симметричного обтекания.



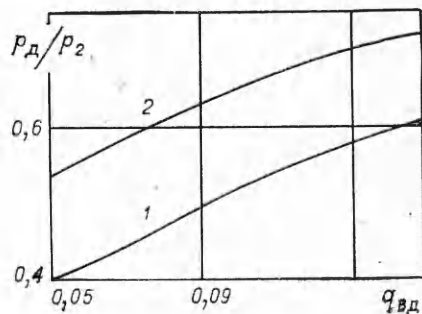
Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

Геометрия эффективного тела вытеснения, соответствующая описанному выше примеру расчета при $q_{вд} = 0,05$ и $Re_{\infty} = 10^3$, представлена на фиг. 1.

Поступила 21 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Юрченко К. Е. Давление и температура за телами со срезом в сверхзвуковом потоке при подаче инертных и реагирующих газов в донную область.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 2.
2. Бондарев Е. Н., Горина А. Н. Решение задачи о сверхзвуковой ламинарной нерасчетной струе в слутном потоке разностным методом.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.
3. Бондарев Е. Н., Лисичко И. Д. О влиянии вязкости на течение недорасширенной струи, распространяющейся в слутном сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2.
4. Бондарев Е. Н., Лисичко И. Д. Распространение недорасширенной турбулентной струи в слутном сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4.
5. Швец А. И., Швец И. Т. Газодинамика ближнего следа. Киев: Наукова думка, 1976.
6. Быркин А. П., Межиров И. И. О расчете течения вязкого газа в канале.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 6.
7. Rae W. J. Some numerical results on viscous low-density nozzle flows in the slender-channel approximation.— AIAA J., 1971, N 5.
8. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
9. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969.
10. Гогиш Л. В., Покровский О. С. Расчет гистерезиса и расходных колебаний донного давления в сверхзвуковых кольцевых соплах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
11. Weinbaum S., Garvine R. W. On the two-dimensional viscous counterpart of the one-dimensional sonic throat.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt 1.
12. Тимошенко В. И. К расчету истечения вязкого газа через сопло Лавала.— Косм. исслед. на Украине, 1976, № 8.
13. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
14. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.