

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

А. О. Ватульян, О. В. Денина*

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону

* Южный научный центр РАН, 344006 Ростов-на-Дону

E-mails: vatulyan@aaanet.ru, olga_rostov1983@mail.ru

Рассмотрена обратная задача о восстановлении трех неоднородных характеристик стержня: модуля Юнга, модуля сдвига и плотности по амплитудно-частотным характеристикам в режиме установившихся продольных, изгибных и крутильных колебаний. Для идентификации неизвестных характеристик построены итерационные процессы, основанные на аппарате интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: упругий неоднородный стержень, модули упругости, некорректная задача, уравнения Фредгольма.

Введение. В настоящее время модели неоднородных сред часто используются в различных областях математической физики. Простота измерения двух упругих постоянных (модуля Юнга и коэффициента Пуассона) на основе макроэкспериментов (одноосное растяжение и кручение стержней) с помощью известной модели линейной однородной изотропной теории упругости обуславливает использование этой модели в качестве эффективного средства теоретического и численного анализа различных задач механики деформируемого твердого тела и смежных областей (акустики, геофизики). При исследовании ряда новых задач (для функционально-градиентных материалов, грунтов, слоистых композитов, твердых пористых и пенных материалов, пьезокompозитов при неоднородной поляризации, биологических тканей и имплантатов, растущих биологических тканей) однородных моделей, характеризующихся конечным набором физических постоянных, оказывается недостаточно для описания поведения деформируемых твердых тел. В этом случае необходимо использовать существенно более сложные расчетные модели и отказаться от гипотезы однородности.

Исследованию обратных задач о реконструкции неоднородностей различного типа посвящено большое количество работ, среди которых нужно отметить работы М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова, В. Г. Яхно, Х. Д. Бюи, Т. Ф. Чана, Дж. Чена, М. С. Гокенбаха, А. А. Хана, И. Ноулса, Дж. Маклохлина, Ф. Расити, Б. Д. Рухани, Кс. Ч. Тая. Заметим, что исследовать обратные задачи достаточно сложно, поскольку, как правило, такие задачи нелинейны и некорректны [1, 2]. Общие аспекты решения обратных и некорректных задач детально представлены в работах [1–5]. Одним из наиболее эффективных методов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00194-а) и в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

решения некорректных задач является принцип итеративной регуляризации. В [6, 7] этот метод применен для идентификации параметров в эллиптических краевых задачах. В настоящее время значительный интерес представляет решение задач о восстановлении коэффициентов Ламе по полям, измеренным внутри тела [8–11]. В работе [11] исследован вопрос об идентификации переменных упругих свойств в биологических тканях на основе анализа гиперболической системы второго порядка. Входной информацией для поставленной обратной задачи является зависящий от времени вектор перемещений внутри среды. В случае изотропного материала были заданы достаточные условия для идентификации единственным образом волновых скоростей и одновременного восстановления плотности и параметров Ламе. В случае анизотропного материала имеются примеры, доказывающие неединственность решения и показывающие структуру множества сдвиговых тензоров, соответствующих одинаковым исходным данным.

В настоящее время в зарубежной литературе большое внимание уделяется исследованию задач о восстановлении разрывных коэффициентов. В работах [12, 13] такие задачи изучены на основе методов расширенного лагранжиана и регуляризации функционала полной вариации. В настоящей работе рассмотрена обратная коэффициентная задача, заключающаяся в определении по амплитудно-частотным характеристикам при совместном анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний стержня для одного образца трех неоднородных характеристик стержня — модуля Юнга $E(x)$, модуля сдвига $G(x)$ и плотности $\rho(x)$ — как функций продольной координаты x . Отметим, что различные аспекты обратных задач определения модуля Юнга и плотности в стержне по амплитудно-частотным характеристикам смещений торца стержня были рассмотрены в работах [14, 15].

Основная проблема исследования обратных коэффициентных задач заключается в сложности процедуры построения операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые при анализе волновых процессов функции. Это объясняется тем, что коэффициенты дифференциальных операторов переменны. Поэтому в явном виде построить общие представления решений так же, как для операторов с постоянными коэффициентами, невозможно. В этом случае используются методы решения прямых задач, основанные либо на аппарате интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для стержней и пластин), либо на слабых постановках и конечно-элементных технологиях. Операторные соотношения в обратных задачах построены с помощью процедуры линеаризации и итерационных процессов, основанных либо на обобщении теоремы взаимности [16], либо на использовании условия ортогональности [17].

Вывод операторных уравнений для решения обратных задач. Рассмотрим обратную коэффициентную задачу о восстановлении неоднородных характеристик для общего случая упругого тела.

Задача об установившихся колебаниях с частотой ω ограниченной области V с границей $S = S_u \cup S_\sigma$ формулируется следующим образом:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, \quad m = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i. \quad (3)$$

Здесь n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S ; c_{ijkl} — компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-постоянными функциями координат и удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности. Сформулируем задачу определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости по информации

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (4)$$

Такая постановка задачи соответствует измерению в некотором диапазоне частот поля перемещений на части границы S_σ , на которой осуществляется нагружение.

Таким образом, данная обратная коэффициентная задача является нелинейной некорректной задачей. В соответствии с результатами работы [16] кратко сформулируем обобщенное соотношение взаимности. Пусть имеется два решения задачи (1)–(3), соответствующих различным модулям упругости и плотностям: $u_i^{(1)}, c_{ijkl}^{(1)}, \rho^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, c_{ijkl}^{(2)}, \rho^{(2)}$. Тогда имеет место обобщенное соотношение взаимности

$$\int_V (c_{ijkl}^{(2)} - c_{ijkl}^{(1)}) u_{k,l}^{(2)} u_{i,j}^{(1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS + \omega^2 \int_V (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) u_i^{(2)} u_i^{(1)} dV = 0, \quad (5)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2],$$

которое можно трактовать как нелинейное операторное соотношение для обратной задачи. На основе соотношения (5) нетрудно построить итерационные процессы и сформулировать последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода с суммируемым ядром для определения поправок. Проведем вывод линеаризованных уравнений для нахождения поправок. Полагая в соотношении (5)

$$u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}, \quad u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}, \quad c_{ijkl}^{(1)} = c_{ijkl}^{(n-1)}, \quad c_{ijkl}^{(2)} = c_{ijkl}^{(n-1)} + c_{ijkl}^{(n)},$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(n-1)}, \quad \rho^{(2)} = \rho^{(n-1)} + \rho^{(n)}$$

и сохраняя в нем линейные по величинам n -го приближения слагаемые, с учетом дополнительного условия (4) получаем следующее уравнение относительно поправок $c_{ijkl}^{(n)}, \rho^{(n)}$ [16]:

$$\int_V c_{ijkl}^{(n)} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} dV - \omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS = 0, \quad (6)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Соотношение (6) можно трактовать как линейное интегральное уравнение относительно компонент $c_{ijkl}^{(n)}(x)$ и $\rho^{(n)}(x)$, если предварительно решена прямая задача о нахождении полей смещений и деформаций внутри области V , материал которой имеет упругие характеристики $c_{ijkl}^{(n-1)}(x)$ и $\rho^{(n-1)}(x)$, и на ее границе S . Отметим, что этого уравнения недостаточно для определения всех характеристик. Необходимо исследовать поставленную задачу на простых моделях, таких как стержни, для которых несложно провести эксперименты по определению амплитудно-частотных характеристик.

Введем следующие стандартные обозначения функционалов:

$$\Pi(c^{(n)}, u^{(n-1)}) = \frac{1}{2} \int_V c_{ijkl}^{(n)} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} dV, \quad K(c^{(n)}, u^{(n-1)}) = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV,$$

$$A(p, f - u^{(n-1)}) = \int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS.$$

Заметим, что подынтегральные выражения в объемных интегралах в (6) по форме представляют собой аналоги удвоенной удельной потенциальной энергии деформаций и удельной кинетической энергии, в которой перемещения и деформации соответствуют $(n-1)$ -й (предыдущей), а модули — n -й (последующей) итерациям. Мерой выхода из итерационной процедуры является функционал

$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S_\sigma} (f_i - u_i^{(n-1)})^2 dS d\omega$, и в случае если его

значение становится меньше значения погрешности входной информации, итерационный процесс необходимо остановить.

С учетом введенных обозначений интегральное уравнение (6) принимает вид

$$2(\Pi - K) + A = 0. \quad (7)$$

Применим данный подход для вывода операторных уравнений в задаче определения всех механических характеристик $E(x)$, $G(x)$, $\rho(x)$ упругого изотропного неоднородного стержня. При этом отсутствует необходимость вновь анализировать краевые задачи, достаточно вычислить удельные потенциальную и кинетическую энергии. Отметим, что $V = [0, l] \times F$ (F — поперечное сечение стержня).

Будем считать известной (аналогично (4)) следующую информацию об амплитудно-частотных характеристиках торца консольно защемленного стержня:

$$u(l, \omega) = f_1(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

(для продольных колебаний),

$$w(l, \omega) = f_2(\omega), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4]$$

(для изгибных колебаний),

$$v(l, \omega) = f_3(\omega), \quad \omega \in [\omega_5, \omega_6]$$

(для крутильных колебаний), по которой требуется определить неизвестные функции $E(x)$, $G(x)$, $\rho(x)$. В настоящей работе для определения этих функций предложена следующая схема. На первом этапе на основе совместного анализа продольных и изгибных колебаний определяются функции, характеризующие законы изменения модуля Юнга $E(x)$ и плотности $\rho(x)$. На втором этапе при известной функции плотности в результате анализа крутильных колебаний определяется функция, характеризующая закон изменения модуля сдвига $G(x)$.

Рассмотрим призматический стержень, вдоль оси которого направлена ось Ox_1 .

При продольных колебаниях не равны нулю компонента вектора перемещений $u = u_1(x_1)$ ($u_2 = u_3 = 0$) и компонента тензора напряжений σ_{11} . В данном случае выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_{11}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F E (u')^2 dF dx = \frac{1}{2} \int_0^l EF (u')^2 dx,$$

а выражение для кинетической энергии —

$$K = \omega^2 \frac{1}{2} \int_V \rho u_i^2 dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \int_F \rho u^2 dF dx = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho F u^2 dx.$$

Тогда операторное уравнение, соответствующее (7), записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{du^{(n-1)}(x, \omega)}{dx} \right)^2 F(x) E^{(n)}(x) dx - \omega^2 \int_0^l (u^{(n-1)}(x, \omega))^2 F(x) \rho^{(n)}(x) dx = \\ = P(f_1(\omega) - u^{(n-1)}(l, \omega)), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \end{aligned} \quad (8)$$

При изгибных колебаниях (изгибающая сила направлена вдоль оси Ox_3) среди компонент вектора перемещений отличны от нуля компоненты (в рамках модели Бернулли)

$$u_3 = w(x_1, \omega), \quad u_1 = -w'x_3.$$

Далее последовательно находим $\varepsilon_{11} = -x_3w''$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{33} = 0$. Таким образом, выражения для потенциальной и кинетической энергии соответственно имеют вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V E\varepsilon_{11}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F Ex_3^2(w'')^2 dF dx = \frac{1}{2} \int_0^l JE(w'')^2 dx,$$

$$K = \omega^2 \frac{1}{2} \int_V \rho w_i^2 dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \int_F \rho w^2 dF dx = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l F\rho w^2 dx,$$

где $J = \int_F (x_3^2) dF$. Тогда операторное уравнение, соответствующее (7), в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 w^{(n-1)}(x, \omega)}{dx^2} \right)^2 J(x)E^{(n)}(x) dx - \omega^2 \int_0^l (w^{(n-1)}(x, \omega))^2 F(x)\rho^{(n)}(x) dx = -P(f_2(\omega) - w^{(n-1)}(l, \omega)), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4]. \quad (9)$$

В случае крутильных колебаний для стержня с круглым поперечным сечением при угле закручивания v среди компонент вектора перемещений отличны от нуля компоненты

$$u_3 = -\tau x_1 x_2, \quad u_2 = \tau x_1 x_3,$$

где постоянная $\tau = dv/dx_1$ — степень закручивания стержня. Тогда $\gamma_{12} = \tau x_3$, $\gamma_{13} = -\tau x_2$, $\gamma_{23} = \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 0$, и, следовательно, выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V G(\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2) dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F G(x_2^2 + x_3^2)(v')^2 dF dx = \frac{1}{2} \int_0^l J_p G(v')^2 dx,$$

где $J_p = \int_F (x_2^2 + x_3^2) dF$.

Таким образом, операторное уравнение для задачи о восстановлении функции, характеризующей закон изменения модуля сдвига при известной функции плотности, в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\int_0^l \left(\frac{dv^{(n-1)}(x, \omega)}{dx} \right)^2 J_p(x)G^{(n)}(x) dx = M(f_3(\omega) - v^{(n-1)}(l, \omega)), \quad \omega \in [\omega_5, \omega_6]. \quad (10)$$

Введя безразмерные функции и параметры

$$x = lz, \quad u = l\tilde{u}, \quad w = l\tilde{w}, \quad v = l\tilde{v}, \quad E(x) = E^*\tilde{E}(z), \quad \rho(x) = \rho^*\tilde{\rho}(z), \quad F(x) = F^*\tilde{F}(z), \\ G(x) = G^*\tilde{G}(z), \quad J(x) = J^*\tilde{J}(z), \quad J_p(x) = J_p^*\tilde{J}_p(z), \quad z \in [0, 1],$$

$$E^* = \max_{x \in [0, l]} E(x), \quad \rho^* = \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \quad F^* = \max_{x \in [0, l]} F(x), \quad J^* = \max_{x \in [0, l]} J(x), \quad J_p^* = \max_{x \in [0, l]} J_p(x),$$

$$G^* = \max_{x \in [0, l]} G(x), \quad \varkappa^2 = \frac{\omega^2 l^2 \rho^*}{E^*}, \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2 \rho^* F^* l^4}{E^* J^*}, \quad \chi^2 = \frac{\omega^2 l^2 \rho^*}{G^*}$$

(далее для сокращения записи знак “ \sim ” над всеми функциями опущен), полученные выше операторные уравнения Фредгольма первого рода можно записать в виде

$$\int_0^1 \left(\frac{du^{(n-1)}(z, \varkappa)}{dz} \right)^2 F(z) E^{(n)}(z) dz - \varkappa^2 \int_0^1 (u^{(n-1)}(z, \varkappa))^2 F(z) \rho^{(n)}(z) dz =$$

$$= P(f_1(\varkappa) - u^{(n-1)}(1, \varkappa)), \quad \varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_2],$$

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 w^{(n-1)}(z, \lambda)}{dz^2} \right)^2 J(z) E^{(n)}(z) dz - \lambda^4 \int_0^1 (w^{(n-1)}(z, \lambda))^2 F(z) \rho^{(n)}(z) dz =$$

$$= -P(f_2(\lambda) - w^{(n-1)}(1, \lambda)), \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4],$$

$$\int_0^1 \left(\frac{dv^{(n-1)}(z, \chi)}{dz} \right)^2 J_p(z) G^{(n)}(z) dz = M(f_3(\chi) - v^{(n-1)}(1, \chi)), \quad \chi \in [\chi_5, \chi_6].$$

Заметим, что на каждом шаге итерационного процесса необходимо решить прямую задачу с уточненными характеристиками. Прямые задачи решались с помощью сведения их к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода так же, как в [14, 15]. Таким образом, с использованием аппарата интегральных уравнений первого и второго рода построены итерационные процессы для идентификации неизвестных функций, позволяющие осуществить расщепление исходной обратной задачи на последовательность задач двух типов: решение прямой задачи с переменными коэффициентами и определение поправок на основе решения стандартной некорректной задачи — обращения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром.

Численная реализация. На первом этапе итерационного процесса необходимо знание начального приближения. Опишем его построение на примере более сложной задачи совместного анализа продольных и изгибных колебаний. Начальные приближения $E_0(z)$, $\rho_0(z)$ строились в классе линейных положительных ограниченных функций вида $E_0(z) = a_0 + a_1 z$, $\rho_0(z) = b_0 + b_1 z$. Из априорной информации об ограниченности модуля Юнга $0 < E_- \leq E_0(z) \leq E_+$ и ограниченности плотности $0 < \rho_- \leq \rho_0(z) \leq \rho_+$ получены ограничения на параметры a_0 , a_1 и b_0 , b_1

$$E_- \leq a_0 \leq E_+, \quad E_- \leq a_0 + a_1 \leq E_+,$$

$$\rho_- \leq b_0 \leq \rho_+, \quad \rho_- \leq b_0 + b_1 \leq \rho_+,$$

которые определили компактные множества U и W (выпуклые четырехугольники) на плоскостях изменения параметров (a_0, a_1) и (b_0, b_1) соответственно. Значения постоянных a_0 , a_1 , b_0 , b_1 находились с помощью условия минимума функционала невязки на построенных компактных множествах U и W :

$$\Phi = \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} |u(1, \varkappa) - f_1(\varkappa)|^2 d\varkappa + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |w(1, \lambda) - f_2(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Здесь $u(1, \varkappa)$, $w(1, \lambda)$ — функции смещения на свободном конце стержня в случае линейных законов изменения модуля Юнга и плотности.

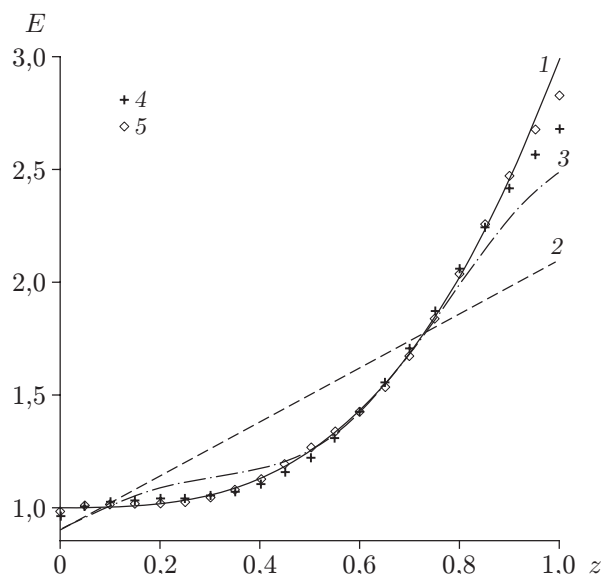


Рис. 1. Восстановление функции, характеризующей изменение модуля Юнга на различных шагах итерационного процесса:

1 — исходная функция; 2 — начальное приближение; 3 — первая итерация; 4 — третья итерация; 5 — седьмая итерация

Таким образом, на первом этапе решения задачи для определения модуля Юнга и плотности на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода (8), (9). На втором этапе для восстановления модуля сдвига на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма первого рода (10). Как правило, для решения таких некорректных задач использовался метод регуляризации А. Н. Тихонова [3].

Проведена серия вычислительных экспериментов в задачах идентификации переменных механических характеристик стержня при различных видах его неоднородности. Для проверки эффективности работы предложенных вычислительных схем проведен масштабный вычислительный эксперимент. На первом этапе рассчитывались смещения торцов стержня при анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний в зависимости от их частоты при выбранных законах неоднородности. Данные этих расчетов использовались при решении задач идентификации неоднородных свойств.

На рис. 1 представлены результаты восстановления безразмерной функции, характеризующей изменение модуля Юнга при известной плотности, на первом, третьем и седьмом шагах итерационного процесса для законов $\rho(z) = 1,5 + z^3$, $E(z) = 1 + 2z^3$. Расчеты проводились при $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_2 = 3$, что соответствует частотному диапазону, расположенному между первой и второй резонансными частотами продольных колебаний; измерения выполнены для семи частот внутри выбранного диапазона. Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что с каждым последующим шагом итерационного процесса восстановленная функция приближается к исходной, погрешность реконструкции после семи шагов данного процесса не превышает 5 %.

На рис. 2, 3 представлены результаты восстановления безразмерных функций, характеризующих законы изменения плотности, модуля Юнга и модуля сдвига для законов $\rho(z) = 2 - 1,5z^2$, $E(z) = 1 + 1,5z^2$, $G(z) = 1 + 3z^2$ (рис. 2) и $\rho(z) = 1 + e^{2z}$, $E(z) = e^{2z}$, $G(z) = 4 - z^3$ (рис. 3). Значение функции плотности на защемленном конце считалось известным, поскольку, как показано в работах [14, 15], оно не может быть восстановлено единственным образом. При продольных, изгибных и крутильных колебаниях рассматри-

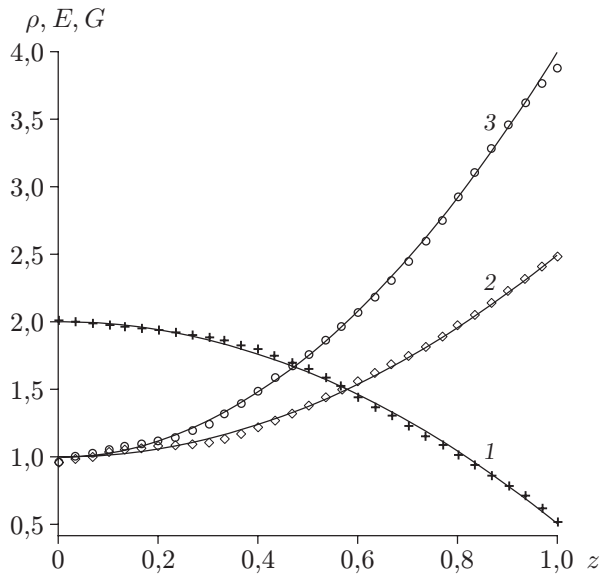


Рис. 2

Рис. 2. Восстановление трех неоднородных гладких характеристик стержня: сплошные линии — исходные функции, точки — восстановленные функции; 1 — $\rho(z) = 2 - 1,5z^2$; 2 — $E(z) = 1 + 1,5z^2$; 3 — $G(z) = 1 + 3z^2$

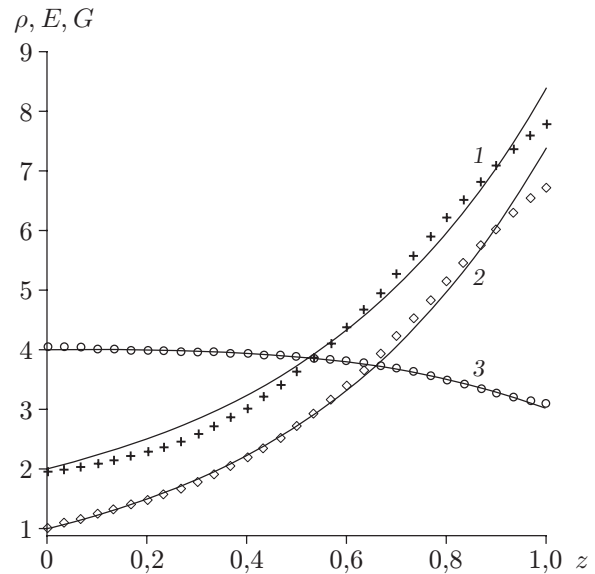


Рис. 3

Рис. 3. Восстановление трех неоднородных гладких характеристик стержня: сплошные линии — исходные функции, точки — восстановленные функции; 1 — $\rho(z) = 1 + e^{2z}$; 2 — $E(z) = e^{2z}$; 3 — $G(z) = 4 - z^3$

вались частотные отрезки $\varkappa \in [2,2; 2,6]$, $\lambda \in [2,35; 2,65]$, $\chi \in [2,0; 3,8]$, находящиеся между первой и второй резонансными частотами. Измерения проводились для трех частот внутри выбранных диапазонов для продольных и изгибных колебаний и для пяти частот внутри выбранного диапазона для крутильных колебаний. Для восстановления характеристик с погрешностью менее 6 % оказалось достаточно пяти итераций (см. рис. 2).

На рис. 3 при анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний рассматривались частотные отрезки $\varkappa \in [0,1; 0,5]$, $\lambda \in [0,1; 0,9]$, $\chi \in [0,2; 1,0]$, находящиеся ниже первых резонансных частот (как для продольных, так и для изгибных и крутильных колебаний). Измерения проводились для трех частот внутри выбранных диапазонов для продольных и изгибных колебаний и для пяти частот для крутильных колебаний. Для восстановления характеристик с погрешностью менее 8 % оказалось достаточно семи итераций (см. рис. 3).

Результаты реконструкции в проведенных экспериментах для гладких функций свидетельствуют о достаточной эффективности данной процедуры.

Проведены эксперименты по восстановлению кусочно-постоянных функций. На рис. 4 представлены результаты восстановления кусочно-постоянной функции плотности при изгибных колебаниях при следующей априорной информации: $\rho(z)$ — гладкая функция. В этом эксперименте рассматривался стержень, выполненный из двух различных материалов. Функция $\rho(z)$ имела вид

$$\rho(z) = \begin{cases} 0,02, & z \in [0; 0,3) \cup (0,7; 1,0], \\ 0,08, & z \in [0,3; 0,7]. \end{cases}$$

Результатом реконструкции по предложенной схеме является гладкая функция, близкая к искомой в среднеквадратичном.

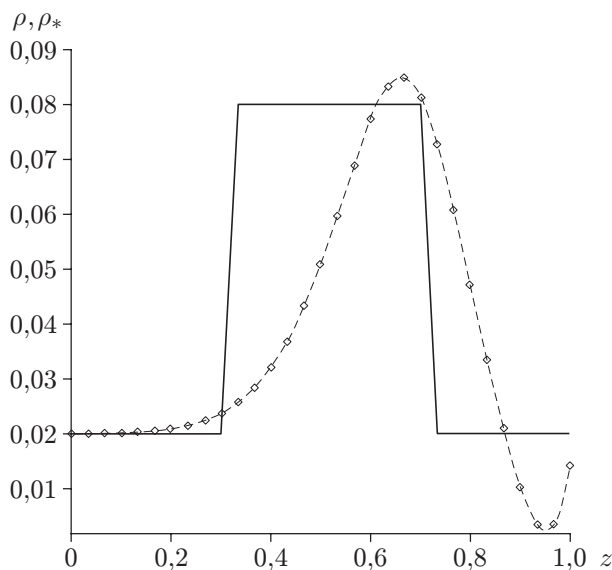


Рис. 4. Восстановление кусочно-постоянной функции плотности: сплошная линия — исходная функция плотности ρ ; штриховая — восстановленная гладкая функция ρ_*

Функция	M_0	M_1	M_2
ρ	0,044 00	0,0224	0,013 39
ρ_*	0,037 66	0,0205	0,013 02

Для каждой из двух функций — исходной кусочно-постоянной ρ и восстановленной гладкой ρ_* , представленных на рис. 4, вычислены следующие характеристики: среднее M_0 , моменты первого и второго порядков M_1 и M_2 на отрезке $[0, 1]$ ($M_k = \int_0^1 z^k \rho(z) dz, k = 0, 1, 2$). В таблице приведены значения полученных характеристик.

Проведено сравнение амплитудно-частотных характеристик для двух стержней: для первого закон изменения плотности представлен исходной кусочно-постоянной функцией, а для второго — восстановленной гладкой функцией.

На рис. 5 показаны амплитудно-частотные характеристики для исходного и восстановленного законов изменения плотности. Полученные результаты свидетельствуют о том, что до первого резонанса амплитудно-частотные характеристики для первого и второго стержней практически совпадают; далее различие амплитудно-частотных характеристик наблюдается только в области резонансных частот. Из рис. 5 следует, что с помощью различных в равномерной метрике функций получаются близкие амплитудно-частотные характеристики (исключение составляет область резонансных частот).

Заключение. На основе частотного зондирования стержневой системы представлен способ определения трех ее неоднородных характеристик: модуля Юнга, модуля сдвига и плотности. Для решения поставленной задачи реализованы различные режимы колебаний: продольные, изгибные, крутильные. На основе обобщенного соотношения взаимности построены операторные уравнения, связывающие искомые и измеряемые при анализе волновых процессов функции. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению различных видов неоднородностей. Из результатов экспериментов следует, что с помощью предложенного способа можно достаточно эффективно восстанавливать

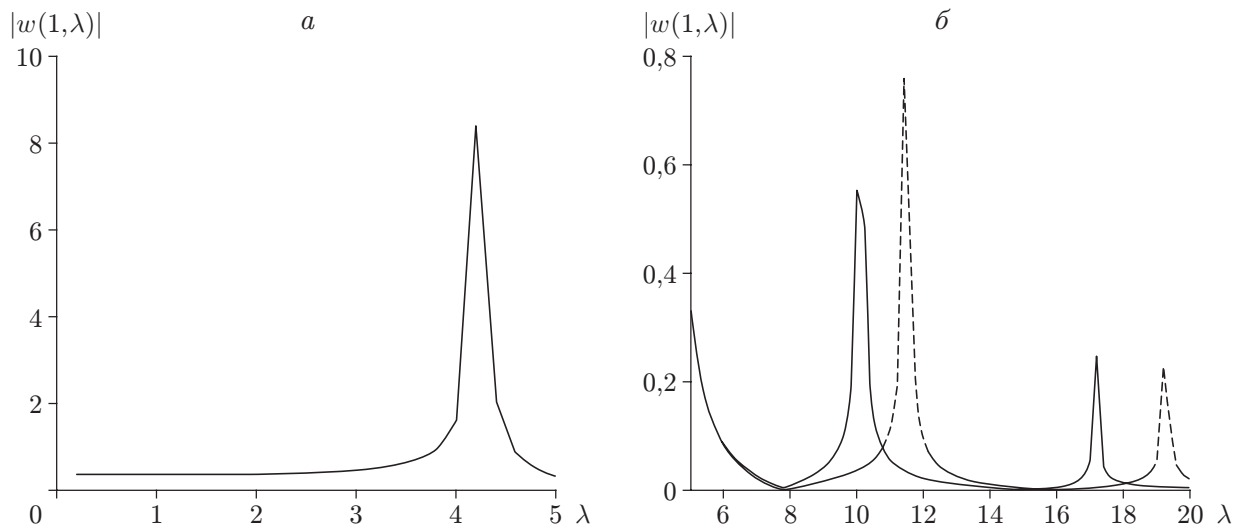


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики для исходного кусочно-постоянного (сплошная линия) и восстановленного гладкого (штриховая линия) законов изменения плотности:

a — частотный диапазон, включающий первый резонанс; *б* — частотный диапазон после первого резонанса

гладкие законы неоднородности, а задачи идентификации кусочно-постоянных неоднородностей требуют дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. М.** Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1999.
2. **Лаврентьев М. М.** Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. М.: Наука, 1980.
3. **Ватульян А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007.
4. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
5. **Яхно В. Г.** Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.
6. **Khan A. A., Rouhani B. D.** Iterative regularization for elliptic inverse problems // J. Comput. Math. Appl. 2007. V. 54, N 6. P. 850–860.
7. **Knowles I.** Parameter identification for elliptic problems // J. Comput. Appl. Math. 2001. V. 131. P. 175–194.
8. **Chen J., Gockenbach M. S.** A variational method for recovering planar Lamé moduli // Math. Mech. Solids. 2002. V. 7. P. 191–202.
9. **Jadamba B., Khan A. A., Raciti F.** On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // J. Comput. Math. Appl. 2008. V. 56, N 2. P. 431–443.
10. **Ji L., McLaughlin J.** Recovery of Lamé parameter μ in biological tissues // Inverse Probl. 2004. V. 20. P. 1–24.
11. **McLaughlin J., Yoon J.-R.** Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement // Inverse Probl. 2004. V. 20. P. 25–45.

12. **Chan T. F., Tai X. C.** Identification of discontinuous coefficients in elliptic problems using total variation regularization // SIAM J. Sci. Comput. 2003. V. 25. P. 881–904.
13. **Chen Z., Zou J.** An augmented lagrangian method for identifying discontinuous parameters in elliptic systems // SIAM J. Control Optim. 1999. V. 37. P. 892–910.
14. **Бочарова О. В., Ватульян А. О.** Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2008. № 3. С. 33–37.
15. **Бочарова О. В., Ватульян А. О.** О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 3. С. 275–282.
16. **Ватульян А. О.** Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Докл. АН. 2005. Т. 405, № 3. С. 343–345.
17. **Найфе А. Х.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 11/III 2011 г.
