

## ГОРЕНИЕ ТОПЛИВ С НЕИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Л. К. Гусаченко

(Томск)

1. Известны эксперименты, согласно которым скорость  $v$  горения смесового топлива может зависеть от направления, в котором распространяется горение. Рассмотрим наиболее простое объяснение эффекта. Пусть по технологическим причинам возникла изотропность теплопроводности топлива. Состав считаем однородным, возможным влиянием изотропности механических свойств через процессы диспергирования на скорость горения пренебрегаем. При сделанных предположениях заметная изотропность скорости  $v$  может быть, если ведущая стадия находится в твердой фазе, что дополнительно и предполагаем (если ведущая стадия в газовой фазе, скорость горения однородного топлива, согласно теории Я. Б. Зельдовича, практически не зависит от параметров твердой фазы, что можно показать и для изотропного случая). При перечисленных условиях требуется найти зависимость нормальной скорости горения от положения нормали  $n$  к горячей поверхности относительно системы координат, жестко закрепленной в топливе, и указать закон изменения во времени кривой поверхности.

2. Пусть коэффициент теплопроводности  $\lambda$  есть тензор второго ранга, так что

$$q = \lambda \nabla T, \quad q_i = \lambda_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (1)$$

Здесь  $q_i, \frac{\partial T}{\partial x_k}$  компоненты теплового потока  $q$  и градиента температуры  $\nabla T$  в направлениях  $x_i, x_k$  ( $i, k=1, 2, 3$ ). По повторяющемуся индексу  $k$  производится суммирование. Рассмотрим плоский фронт горения с нормалью  $n$ . На поверхности задана температура  $T_s = \text{const}$ . Скорость горения находится решением уравнения теплопроводности в твердой фазе. В такой постановке задача является одномерной ( $T$  меняется в направлении  $n$ ), несмотря на наличие компоненты  $q$ , направленной вдоль поверхности:

$$v \frac{dT}{dn} - Q(T) = \nabla q = \lambda_{nn} \frac{d^2 T}{dn^2}.$$

Здесь  $Q(T)$  — скорость тепловыделения. Уравнение совпадает с таковым для изотропного случая, если в последнее вместо скалярного  $\lambda$  подставить  $\lambda_{nn}$ , зависящее от ориентации  $n$ . Тогда известный для изотропного случая результат  $v \sim \sqrt{\lambda}$  [1] дает

$$v_{nn} \sim \sqrt{\lambda_{nn}}. \quad (2)$$

Здесь  $v_{nn}$  — нормальная скорость горения топлива по поверхности с нормалью  $n$ .

3. Если из горящего состава вырежем цилиндрический образец (рис. 1) с образующей, параллельной  $q$ , и теплоизолируем его по боковой поверхности, то это не повлечет за собой изменения скорости и искривления поверхности горения с течением времени. Вспоминая, что скорость движения безграничной поверхности определяется с точностью до касательной составляющей, замечаем, что скорость горения вырезанного длинного образца естественно считать направленной по образующей параллельно  $q$ , причем нормальная составляющая  $v_{nn}$  скорости  $v_n$  должна зависеть от ориентации  $n$  согласно (2). Перепишем (1), учтя, что  $\nabla = n \frac{\partial}{\partial n}$

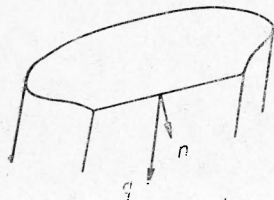


Рис. 1.

$$q = \lambda n \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = (n \lambda_{nn} + \tau \lambda_{n\tau}) \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Здесь  $\lambda_n$  — вектор теплопроводности, соответствующий площадке с нормалью  $n$ . Его компоненты, лежащие в плоскости, касательной к площадке, собраны вместе и обозначены  $\tau \lambda_{n\tau}$ ,  $\tau$  — единичный вектор, лежащий в касательной плоскости. Теперь видно, что скорость горения будет параллельна  $q$  и не вступит в противоречие с (2),

если взять ее в виде

$$v_n \sim \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_{nn}}} = \frac{n \lambda_{nn} + \tau \lambda_{n\tau}}{\sqrt{\lambda_{nn}}}, \quad (3)$$

где коэффициент пропорциональности, вводимый знаком  $\sim$ , уже не должен зависеть от ориентации  $n$ .

4. Распишем (3) более подробно для случая, когда главные значения теплопроводности  $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$ , т. е. имеется лишь одно преимущественное направление — направление главного вектора  $\lambda_1$ . Нужно найти  $\lambda_{nn}(n), \lambda_{n\tau}(n)$ , определить положение  $\tau$  в касательной плоскости и коэффициент пропорциональности в (3).

Пользуясь условием  $\lambda_2 = \lambda_3$ , можно показать, что  $\lambda_n$  лежит в плоскости  $\lambda_1, n$ .

Употребляемый в (3) единичный вектор касательной к поверхности горения  $\tau$  должен лежать в плоскости  $\lambda_1, n$  (рис. 2),  $\lambda_n$  зависит от угла  $\alpha$ , между  $\lambda_1$  или компоненты  $\lambda$  преобразуются в плоскости  $\lambda_1, n$  по формулам

$$\lambda_{ik} = \beta_{il} \beta_{km} \lambda'_{lm} \quad (i, k, l, m = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь  $\lambda'_{lm}$  — значения компонент  $\lambda$  в старой системе координат  $x'_1, x'_2$ , связанной с главными направлениями в топливе,  $\lambda_{ik}$  — в новой системе  $x_1, x_2$ , связанной с поверхностью горения (рис. 2),  $\beta$  — косинусы углов между соответствующими осями

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \cos(x_1 x'_1) = \cos \alpha, & \beta_{22} &= \cos(x_2 x'_2) = \cos \alpha, \\ \beta_{21} &= \cos(x_2 x'_1) = \sin \alpha, & \beta_{12} &= \cos(x_1 x'_2) = -\sin \alpha, \\ \lambda'_{11} &= \lambda_1, \lambda'_{22} = \lambda_2, & \lambda'_{12} &= \lambda'_{21} = 0. \end{aligned}$$

Согласно (4),

$$\lambda_{nn} = \lambda_{11} = \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_2 \sin^2 \alpha, \quad \lambda_{n\tau} = \lambda_{12} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \alpha \sin \alpha. \quad (5)$$

Коэффициент пропорциональности в (3) можно выразить через найденные экспериментально значения скорости горения по главным направлениям  $v_1, v_2 = v_3$ , учтя

$$\begin{aligned} v_1 &\sim \sqrt{\lambda_1}, \quad v_2 \sim \sqrt{\lambda_2}, \\ \frac{v_n}{v_1} &= \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_{nn} \lambda_1}} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{nn}}} \left( n \frac{\lambda_{nn}}{\lambda_1} + \tau \frac{\lambda_{n\tau}}{\lambda_1} \right), \\ \frac{\lambda_{nn}}{\lambda_1} &= 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right] (1 - \cos 2\alpha), \quad \frac{\lambda_{n\tau}}{\lambda_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right] \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

5. Рассмотрим горение топлива с кривой поверхностью. Если радиус кривизны велик по сравнению с толщиной прогреваемого слоя, скорость горения в каждой точке поверхности можно находить по (6). Чтобы изучить изменение поверхности, рассмотрим «адиабатическую» линию  $dr = v_n(x) dt$ , которая показывает в каждой своей точке

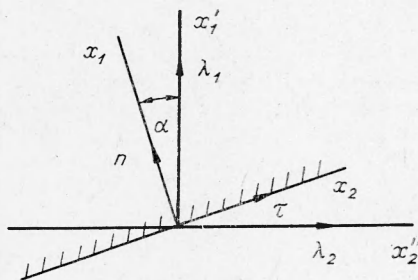


Рис. 2.

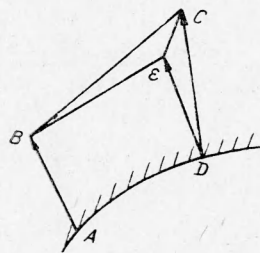


Рис. 3.

направление теплового потока в момент, когда через эту точку проходит поверхность горения. Через каждую точку поверхности проходит своя линия, значения  $\alpha$  могут быть различными на разных линиях и вдоль каждой из них. Представляет интерес производная  $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ , взятая в «адиабатическом» направлении. На рис. 3 слева от  $AD$  находится топливо,  $BC$  приближенно представляет собой положение участка поверхности горения через время  $\Delta t$ . Поверхность здесь передвинулась на  $\Delta r$  и повернулась на  $\Delta \alpha$

$$AB = v_n [\alpha (A)] \Delta t; \quad DC = v_n [\alpha (D)] \Delta t; \quad \varepsilon C = \Delta v_n \Delta t; \quad AD = \Delta \tau;$$

$$\angle CB \varepsilon \approx \Delta \alpha \approx n \Delta v_n \Delta t \frac{1}{\Delta \tau}.$$

Полагая  $\Delta \tau \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = n \frac{\partial v_n}{\partial \tau} = n \frac{d v_n(\alpha)}{d \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}. \quad (7)$$

Отсюда следует, в частности, прямолинейность «адиабатических» линий для изотропного случая, когда  $v_n = vn$ ,  $v = \text{const}$ . В нашем случае, вычисляя (7) по (6), имеем (см. рис. 2)

$$\frac{dn}{d\alpha} = -\tau, \quad \frac{d\tau}{d\alpha} = n, \quad n \frac{dv_n}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_1}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{nn}}} \frac{\lambda_n \tau}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{nn}}} \left( \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \frac{\lambda_{nn}}{\lambda_1} + \frac{\lambda_n \tau}{\lambda_1} \right) = 0.$$

Следовательно, вдоль каждой «адиабатической» линии  $\alpha = \text{const}$ ,  $v_n = \text{const}$ . Вспоминая определение  $\alpha$  и уравнение линии  $dr = v_n(\alpha) dt$ , видим, что эти линии прямые и являются изоклинами семейства поверхностей горения.

Отсюда следует графический или аналитический способ нахождения поверхности горения. Если начальная поверхность задана в зависимости от двух параметров как  $r_0(a, b)$ , то в момент  $t$  она задается по (8)

$$r = r_0(a, b) + t v_n[\alpha(a, b)]. \quad (8)$$

Поверхность (8) может быть самопересекающейся. Получающиеся в этом случае «петли» следует выбрасывать как не имеющие физического смысла.

Поступила в редакцию  
23/II 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., 1947.

УДК 532.536

#### ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ГАЗА ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Б. П. Миронов, А. В. Фафурин, И. Л. Кузнецов  
(Новосибирск)

При исследовании процессов (тепломассообмена, химических реакций и т. п.), происходящих на поверхности тела, обтекаемого потоком жидкости, весьма важно знать распределение скоростей в пограничном слое. Если среда имеет сравнительно